Une archéologie de la logique du sens : arithmétique et contenu dans le processus de mathématisation de la logique au XIXe siècle

Juan Luis Gastaldi

Université Bordeaux Montaigne

École Doctorale Montaigne Humanités (ED 480)

THÈSE DE DOCTORAT EN « PHILOSOPHIE »

Une archéologie de la logique du sens

Arithmétique et contenu dans le processus de mathématisation de la logique au XIX[e] siècle

Présentée et soutenue publiquement le 26 septembre 2014 par

Juan Luis GASTALDI

Sous la direction de Charles Ramond et Jean-Michel Salanskis

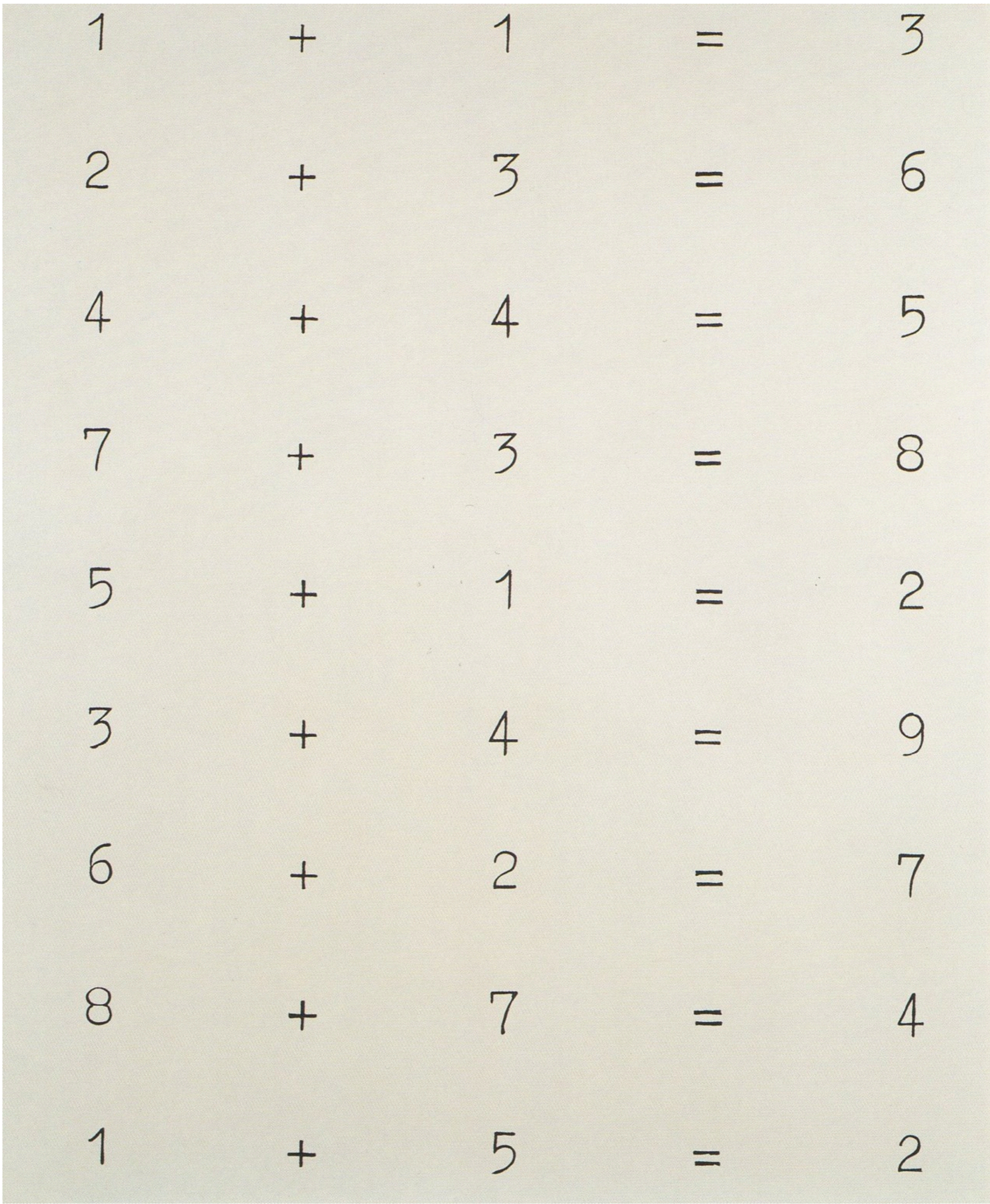
MEMBRES DU JURY

Charles RAMOND, Professeur, Université Paris 8 Vincennes Saint-Denis
(rattaché à l'ED « Montaigne Humanités » de l'Université Bordeaux Montaigne)

Jean-Michel SALANSKIS, Professeur, Université Paris Ouest Nanterre.

Pierre CASSOU-NOGUÈS, Professeur, Université Paris 8 Vincennes Saint-Denis.

Jean-Baptiste JOINET, Professeur, Université Lyon 3 Jean Moulin.



SIGMAR POLKE
Lösungen I-IV, 1967 (Tafel I)
Série *Die drei Lügen der Malerei*

Introduction

La triple racine de la raison formelle

To what extent can the content of a sign be suspended?

GEORGE BOOLE, *Selected Manuscripts on Logic and its Philosophy*

Deshalb verachte niemand die Zeichen!

GOTTLOB FREGE, *Ueber die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift*

Au tournant du XX^e siècle, l'ensemble de la philosophie a été affecté par un événement provenant des mathématiques. De cet événement, la logique a été à la fois l'occasion et le terrain. Car, en célébrant enfin ses noces si longtemps différées avec les mathématiques, la logique moderne accomplissait certes de vieux rêves philosophiques, mais elle suscitait aussi du même coup de nouvelles promesses et éveillait de nouvelles inquiétudes.

Au carrefour de cette histoire où la logique accède à son statut « formel », l'œuvre de Gottlob Frege apparaît comme le lieu où s'amorce la multiplicité des effets que cette mathématisation devait susciter dans la philosophie. Il n'est pas certain cependant que le rôle de Frege ait été bien compris. Mieux : si le sens de cet événement commence seulement à être mieux saisi, c'est que le véritable enjeu de l'œuvre de Frege dans cette histoire a été très mal compris.

En effet, dans l'histoire telle qu'elle aime à être racontée, le nom de Frege est immédiatement associé au programme dit « logiciste ». Ce projet, comme on sait, s'organise autour du postulat selon lequel l'Arithmétique ne constitue qu'une région de la logique, à partir de laquelle on peut reconstruire les mathématiques tout entières, en s'appuyant sur les instruments modestes mais puissants de cette logique, à laquelle on accorderait donc finalement la place de fondement. Le logicisme apparaît ainsi comme le prolongement naturel et éclairé du processus d'arithmétisation de l'Analyse, déclenché par la recherche d'un fondement pour les mathématiques du XIXe siècle. Dans ce processus « fondationnel »[1], la place de Frege serait celle donc, décisive à tous égards, du fondateur : il aurait trouvé la clé de la construction logique du nombre et énoncé l'ensemble des conditions systématiques de la logique qui serait capable de le construire. Négligé injustement par ses contemporains, la noble reconnaissance que lui apporta Bertrand Russell en le désignant comme le précurseur de ce temple du logicisme que seront toujours les *Principia Mathematica* suffira, malgré les paradoxes que Russell aura su corriger dans son système, pour assurer à Frege une place éminente dans le panthéon de la logique du siècle nouveau, et de ceux à venir. Cette place serait aussitôt étayée par l'influence, indirecte mais indubitable, que le logicien allemand aurait eue sur ces deux autres icônes de la pensée formelle contemporaine que furent Wittgenstein et Carnap.

Vers les années 1970, en 1973 plus précisément, Michael Dummett publia un livre qui transforma l'évaluation et l'appréhension de la place de l'œuvre frégéenne dans le cadre de la logique et de la philosophie contemporaines[2]. Résultant d'un extraordinaire travail de recherche autour d'écrits inédits de Frege encore mal connus, le travail de Dummett permet de prendre la mesure de la pluralité des dimensions de la pensée du logicien allemand, ainsi que de sa portée proprement philosophique. Accordant à l'invention de la quantification des variables un rôle privilégié et déterminant, l'approche de Dummett présente l'œuvre de Frege comme la construction progressive d'une minutieuse théorie de la signification ou du sens (*meaning*), commandée par les exigences de rigueur déductive réclamée par les mathématiques[3]. Ces travaux ont le mérite de rendre la pensée de Frege indépendante de l'interprétation russellienne, tout en l'inscrivant dans le projet autonome et étendu d'une philosophie du langage. Mais la présentation de Dummett est, pour cette même raison, plus apologétique encore que l'interprétation canonique faite par la philosophie analytique qu'elle prétend corriger. En particulier, le Frege de Dummett apparaît délibérément isolé de tout contexte scientifique ou philosophique : il y acquiert les traits, plus que d'un précurseur, du fondateur mythique d'une logique et d'une philosophie nouvelles. Sa démarche se voit d'ailleurs toujours idéalisée par Dummett comme la quête infatigable de la rigueur et de la vérité, dans l'horizon et les limites imposés par son adhésion aux postulats du logicisme.

Aussi, des années 1980 jusqu'à aujourd'hui, toute une série d'études critiques verront-elles le jour, essayant de replacer l'œuvre de Frege dans la complexité du contexte historique

---

[1] Je me permets de reprendre ici un anglicisme devenu courant dans les recherches sur ce sujet.

[2] Il s'agit, bien entendu, de *Frege : Philosophy of Language* (Dummett, 1973).

[3] Peter Sullivan reconstitue avec clarté les enjeux de l'interprétation de Dummett dans Sullivan (2010).

qui fut le sien. Les travaux de Hans Sluga, Gottfried Gabriel, G.P. Baker et P.M.S. Hacker, Michael Beaney, Peter Sullivan, Volker Peckhaus, Risto Vilkko, Jarmo Pulkkinen, Jamie Tappenden ou Mark Wilson, entre autres, ont retracé les multiples façons dont la pensée de Frege s'enracine dans le milieu logique, philosophique, mathématique, scientifique, intellectuel et culturel, voire institutionnel ou familial, du XIXe siècle[4]. La valeur de ces études, tout comme celle de Dummett, est certes indiscutable, et c'est bien à ce titre que nous nous appuierons sur elles dans les pages qui vont suivre, pour les discuter lorsque nous le croirons nécessaire. Toutefois, la prolifération de points de vue, de critères, d'approches, de domaines concernés, de méthodes, de stratégies et de motivations qui se manifeste à travers les études de ces dernières années, ont eu pour effet une dissémination de perspectives qui fait obstacle à la reconstitution d'une vision d'ensemble permettant de comprendre l'événement qui, malgré tout, a eu lieu pour la pensée, et pour la pensée philosophique tout particulièrement, dans le territoire circonscrit par le nom de Frege. La raison de cette dispersion réside sans doute dans le rejet – calme souvent, emporté parfois, décidé dans tous les cas – des mystifications unifiantes de la part d'un logicisme plus philosophique que logique ou mathématique, qui est loin d'être mort en 1931. Mais si ce rejet ne peut être que salutaire, ces approches ne semblent pas moins déterminées par la compréhension logiciste de l'œuvre du savant d'Iéna. Car, même dans les cas où le rejet du logicisme n'entraîne pas le rejet de Frege tout court, tout se passe comme si l'attachement de la pensée frégéenne au logicisme était si solidement établi qu'il ne pouvait être dissout qu'en dissolvant du même coup la cohérence et la puissance novatrice que ses formulations pouvaient avoir, au croisement des chemins des mathématiques, de la logique et de la philosophie de cette fin du XIXe siècle. Si bien que d'une manière ou d'une autre, dogmatiquement ou de façon critique, les différentes lectures de Frege ont jusqu'ici manqué la singularité du projet logique qui était le sien. Et avec elle, elles ont manqué tout autant ce qui s'y jouait, ce qui s'y joue toujours sans doute, pour la pensée en général. C'est pourquoi la reconstitution d'une cohérence globale nouvelle pour la logique qui est née avec Frege est devenue une exigence incontournable, si l'on veut restituer à la philosophie l'une des conditions décisives de sa contemporanéité : celle qui concerne son rapport aux pratiques et aux savoirs formels.

Cette exigence est notre point de départ. Énonçons tout de suite notre hypothèse : en nous efforçant de reconstituer les principes de son œuvre au plus près de ce qu'il signalait lui-même comme étant l'essence de son système, en réponse à l'incompréhension ou la désorientation de ses contemporains, nous soutiendrons que le projet premier et constant de

[4] On pourra trouver les références détaillées des travaux de tous ces auteurs dans la bibliographie placée à la fin de notre travail.

Frege a été celui d'une *logique du contenu*. Le rapport de Frege à la question du contenu a été quelques fois remarqué dans certaines études critiques des dernières décennies. Pourtant, la consistance et la radicale nouveauté du projet frégéen d'une logique du contenu nous semblent avoir été mal aperçues jusqu'ici, soit parce qu'on l'évaluait à travers les critères de cohérence définis par une logique qui n'était pas la sienne, soit parce qu'on l'assimilait de manière indifférenciée à une tradition avec laquelle justement il voulait rompre. Nous montrerons donc comment, du début à la fin de son œuvre logique, la question de la logique du contenu, c'est-à-dire du contenu dans la logique, avec la signification et la consistance singulières que Frege a su inventer pour une telle notion, offre une intelligibilité nouvelle à l'ensemble de son œuvre et permet d'intégrer toutes les pièces de son système dans une architecture cohérente, notamment (et surtout) en rendant compte de la dynamique de son évolution. C'est donc en replaçant le projet renouvelé d'une logique du contenu au centre de l'œuvre frégéenne que nous prétendons à la fois offrir une perspective critique en contraste avec les visions apologétiques, sans renoncer néanmoins à la vision unifiée dont ont manqué jusqu'ici les études critiques.

*
* *

Mais l'ambition véritable de notre recherche ne se réduit pas à cette intervention dans le débat spécialisé sur la réception de Frege. Cette mise en relief de la cohérence du projet renouvelé d'une logique du contenu ouvre bientôt tout un espace souterrain où cette logique prend racine. C'est de cet espace que la logique du contenu tient sa solidité incertaine, et c'est par lui qu'elle se perpétue, depuis le commencement du XIXe siècle, et de façon aussi souterraine peut-être, pour parvenir jusqu'à nos jours. C'est de lui qu'il sera avant tout question dans les pages qui suivent.

La découverte d'un tel espace ne saurait aboutir si l'on s'enferme dans l'étude de l'œuvre d'un seul auteur. Elle réclame une véritable pratique de la transversalité. C'est pourquoi ce travail propose une confrontation du projet global de Frege avec cet autre grand projet de formalisation que fut celui de Boole et des Booléens. Premier, dans un sens qu'il faudra encore préciser, le projet général de mathématisation de la logique des Booléens constitue le point de comparaison grâce auquel le sol sur lequel la logique moderne a acquis son caractère formel nous livrera sa structure. À ce comparatisme, qui plus qu'une méthode est l'un des modes mêmes de la philosophie[5], c'est Frege lui-même qui invite. Ou plutôt, c'est à un tel comparatisme qu'il se voit lui-même contraint face à l'incompréhension de ses contemporains au moment de la parution de ses premiers travaux. C'est par contraste avec Boole et les Booléens que Frege expliquera en effet la spécificité de son projet. Cependant, la clé de la véritable ouverture de cet espace souterrain n'est pas immédiatement donnée dans cette comparaison. Elle est d'ailleurs loin d'être évidente. Il faudra la découvrir dans les conditions mêmes du système que Frege bâtit, dont l'architecture est à retracer entièrement à l'écart des idées reçues concernant son « système formel ». Nous pourrons retrouver cette clé à la fin de cette reconstitution, dans ce que cette architecture a de plus problématique. Il deviendra alors clair que si nous cherchions à réinvestir l'œuvre de Frege d'une cohérence nouvelle, ce n'était pas pour rétablir l'unité stable et rassurante que les études critiques ont cherché avec tant de soin (et de raison) à remettre en cause. Car l'intelligibilité procurée par cette reconstitution permettra de localiser dans les formulations de Frege de véritables lacunes qui ne semblent pas avoir été identifiées comme telles jusqu'ici. Que la logique de Frege soit efficace malgré ces lacunes, voilà ce qu'il faudra expliquer. C'est l'explication de cette circonstance qui réclamera la découverte et l'exploration de l'espace où les systèmes de Boole et de Frege communiquent en profondeur.

On peut énoncer en une phrase la réponse que nous avancerons à ces questions : l'efficacité de la logique de Frege en tant que logique du *contenu* provient d'un certain rapport à l'*Arithmétique*. Si, énoncée sous cette forme, cette thèse peut paraître banale, il faut ajouter aussitôt qu'il ne s'agit pas ici du rapport fondationnel inexorablement associé à l'œuvre de Frege, selon lequel une logique (au besoin, du contenu) est capable de construire l'Arithmétique. Le rapport à l'Arithmétique que les conditions d'une logique du contenu révèlent est celui, dissimulé à force d'être invariablement incompris ou négligé, par lequel c'est la logique qui est construite d'après les principes de l'Arithmétique, avant qu'elle ne soit capable de la construire à son tour. Le décèlement de ce rapport, que nous appellerons *constitutif* pour le distinguer du rapport fondationnel, suffit à mettre en échec l'interprétation logiciste ; car il révèle une circularité au cœur même du projet frégéen qui oblige à abandonner toute attribution d'une place simple et première à la logique. Mais au-delà de cette confrontation avec le logicisme, la question du rapport constitutif d'une logique du contenu à l'Arithmétique comporte des problèmes bien plus substantiels que celui de la circularité du fondement. Notamment, la question se pose de caractériser avec précision à ce niveau constitutif la nature du rapport entre une logique du contenu comme forme *spécifique*

[5] Sur cette dimension ontologique du comparatisme, qui commence enfin à être reconnue comme telle, on pourra se référer aux travaux de Patrice Maniglier (2006; 2011).

de la logique dans le cadre de sa mathématisation, et l'Arithmétique comme domaine mathématique *particulier*.

Le rapport de Frege aux mathématiques de son siècle a déjà été abordé dans certains des travaux critiques des dernières décennies. Ainsi, en dehors de son affiliation canoniquement établie aux préceptes de l'arithmétisation de l'Analyse, des travaux plus récents ont exploré les affinités, les inspirations ou les implications de Frege envers des domaines mathématiques tels que la Théorie des fonctions[6], l'Analyse complexe[7] ou la Géométrie projective[8]. L'érudition de ces travaux, menés pour la plupart par des historiens des mathématiques, est souvent remarquable. Toutefois, ils souffrent, chacun à leur manière dans leur champ d'expertise respectif, des inconvénients et insuffisances que nous avons déjà indiqués pour l'ensemble des études critiques récentes. Motivés par la volonté de rompre l'association canonique de Frege au processus d'arithmétisation, ces travaux se concentrent souvent sur des aspects externes aux exigences de la *logique* frégéenne, et manquent ainsi le principe qui permettrait de comprendre la véritable place constitutive des mathématiques dans son système[9]. C'est ainsi que le lien qu'ils parviennent à établir entre les différents domaines mathématiques et les formulations du logicien allemand reste constamment de l'ordre de l'influence, de l'analogie ou de la similarité des méthodes. De ce fait, l'espace général, à l'intérieur duquel la mathématisation de la logique se trouve à la fois fondée et limitée, demeure irrémédiablement dans l'ombre.

La nature accidentelle du rapport constitutif des mathématiques à la logique tel que ces études l'envisagent se trahit dans la négligence dont ils font preuve à l'égard de la double spécificité *du contenu* dans la logique, et de l'*Arithmétique* dans les mathématiques. C'est pourtant bien ce lien que Frege met lui-même en avant lorsque, interpellé par l'incompréhension de ses contemporains, il se voit obligé de rendre compte de la singularité de son projet en le confrontant à celui des Booléens. Pour restituer la nécessité interne du rapport du contenu logique à l'Arithmétique, et inversement, force sera bien d'entendre les raisons que Frege a données avec insistance en faveur du rôle central que l'Arithmétique doit jouer dans l'amorçage de son système. On s'apercevra alors que si l'Arithmétique détient un rôle constitutif pour une logique résistant à l'abstraction du contenu, c'est dans la mesure où elle fournit un *langage modèle ou exemplaire* pour le système d'écriture ou de signes dans lequel cette logique a à s'exprimer. Cependant, Frege n'assume ouvertement l'exemplarité

---

[6] Baker et Hacker (1984) et Panza (2011).

[7] Tappenden (2006).

[8] Wilson (1992; 2010) et Belna (2002).

[9] La tentative de Panza constitue une exception à cet égard, et à ce titre nous lui accorderons une place singulière dans le corps de notre travail.

linguistique de l'Arithmétique au début de son entreprise que pour la laisser agir en silence par la suite, échaudé par l'incompréhension dont elle fut constamment la victime. Nous verrons que la remise en valeur que nous effectuerons de cette exemplarité jamais démentie jette une lumière nouvelle, non seulement sur le sens de la pensée frégéenne, mais plus profondément sur les mécanismes effectifs par lesquels logique et mathématiques communiquent à un niveau non fondationnel (mais qui n'est pas moins fondamental pour autant).

C'est parce que l'action linguistique de l'Arithmétique est silencieuse après le premier opuscule logique de Frege, que la reconstitution précise de ses ressorts intimes exige qu'on l'inscrive dans une perspective élargie, capable en principe de rapporter les différentes déterminations régionales des mathématiques aux propriétés et mécanismes des systèmes logiques dans leur spécificité. De l'analyse patiente de la constitution du système logique frégéen dans sa distance réglée au système booléen, une idée se dégagera lentement mais avec sûreté. Une idée qui nous semble constituer la contribution fondamentale de notre travail et la source de son originalité et de sa fécondité éventuelles : les différents systèmes de la logique mathématisée ou formelle ne reposent sur le domaine à la fois déterminé et ouvert des mathématiques que *par l'intermédiaire d'une dimension d'exercice, de réflexion et d'élaboration de signes*, où les circulations et les emprunts entre ces deux savoirs formels contemporains que sont les mathématiques et la logique non seulement se construisent, mais encore trouvent leur justification.

C'est par l'exploration minutieuse du processus de constitution de la logique booléenne à partir de l'émergence de l'Algèbre abstraite dans la première moitié du XIX^e siècle que cet espace sémiotique intermédiaire nous montrera d'abord clairement son importance et ses enjeux. Nous suivrons alors de près la multiplicité des dimensions qui se dégagent d'une sémiotisation progressive des pratiques mathématiques, associées au domaine particulier qui se dessine au croisement de l'Analyse et de l'Algèbre. Nous verrons aussi la façon dont cette sémiotisation des mathématiques s'est rapprochée naturellement du territoire de la logique. Ou plus précisément, nous comprendrons comment cette réflexion spontanée des mathématiques sur la nature de leurs signes a fini par déployer un régime de signes où les instruments de la logique traditionnelle se sont laissés reconnaître et capturer, avant d'être tout simplement remplacés par eux. La logique booléenne apparaîtra au terme de cette évolution, de telle sorte que son rapport aux déterminations mathématiques pourra être tracé à travers les multiples aspects du fonctionnement et de l'organisation des signes que les mathématiques, et l'Algèbre en particulier, auront nécessités dans leur développement. L'analyse de ce processus nous fournira plus qu'un contexte et une histoire. Elle nous fournira une première carte de l'espace dans lequel se développe la mathématisation de la logique, ainsi que les éléments pour comprendre la particularité du parcours dont résulte la constitution de la logique booléenne. Des éléments seront ainsi disposés, à partir desquels nous pourrions restituer au système frégéen le socle arithmétique qui était le sien.

Ce travail de mise en relief des dimensions sémiotiques intermédiaires entre les déterminations mathématiques et logiques permet donc de rapporter les unes aux autres *dans leur spécificité*. Cette spécificité se donne sous la forme de régions ou de domaines suffisamment cohérents, définissant les différents disciplines ou genres dans lesquels l'espace des mathématiques ou celui de la logique sont habituellement divisés : Algèbre, Arithmétique, Analyse, Géométrie… ou encore, Syllogistique, Logique propositionnelle, Calcul des prédicats…[10]. Or, si cette distribution est historiquement ambiguë et instable, l'approche sémiotique permet de lui donner une raison minimale. Nous verrons que ceci n'est pas un principe méthodologique de notre recherche, mais une condition historique du processus qui l'occupe. C'est pourtant à nous que revient la tâche d'identifier les multiples régimes généraux de formalisation qui s'articulent dans le cadre de ce processus. Nous parviendrons à en reconnaître deux : celui qui mène de l'Algèbre à la Logique propositionnelle, associé aux travaux de Boole ; celui, parallèle, voire alternatif, qui mène de l'Arithmétique au Calcul logique des prédicats, associé aux travaux de Frege. Mais vus à travers la perspective des signes qui les rapporte dans leurs dimensions constitutives, ces domaines risquent de ne pas être reconnaissables comme tels, et c'est pourquoi ces dénominations aujourd'hui usuelles ne peuvent qu'induire des projections nuisibles. Il faudra donc se déprendre de ces catégories chargées par l'histoire qui nous sépare de l'émergence de ces régimes, suspendre les distributions et les enjeux que nous avons tellement appris à y reconnaître, et entendre le bruissement au plus près de ceux qui forgèrent ces régimes, pour essayer d'y déceler la consistance fragile qui les orienta. C'est uniquement à cette condition que la singularité des œuvres respectives de Boole et de Frege par rapport à ces régimes pourra être mise en lumière, et qu'un lien transversal pourra s'annoncer à travers les différents régimes associant les déterminations de l'Arithmétique à celles du contenu logique.[11]

---

[10] Nous voudrions voir ces disciplines ou genres comme des zones particulières d'un espace, à la façon où les régions géographiques ou les divisions politiques délimitent des espaces qui réclament une désignation au moyen de noms propres. D'où notre utilisation des lettres majuscules pour les nommer.

[11] Nous proposons en annexe (pp. 563-566) un tableau comparatif détaillé capturant de manière générale les dimensions et aspects principaux de ces deux régimes. Ce tableau a été dressé comme résultat de notre recherche, mais il pourra sans doute servir de guide pour la lecture des différentes parties de notre travail.

*
* *

La thèse de l'importance des signes dans l'espace des savoirs formels comporte une valeur *épistémologique* et *méthodologique* immédiate : c'est par la présupposition de cette strate sémiotique intermédiaire entre la logique et les mathématiques que le rapport entre les déterminations de ces deux savoirs peut être restitué dans toute sa nécessité sans céder aux mystifications des approches fondationnelles. C'est pour avoir mésestimé systématiquement cette dimension que les approches critiques des dernières années n'ont pu accéder qu'à des éléments contingents et superficiels de la relation entre logique et mathématiques chez Frege. En cela, elles sont victimes du même défaut que les visions canoniques, à savoir d'envisager le lien entre logique et mathématiques comme un rapport *direct*. La multiplicité des opérations requises pour pouvoir ramener l'un à l'autre ces deux savoirs se voit ainsi court-circuitée. Dans le cas des conceptions traditionnelles, ce raccourci se fait au moyen des multiples versions du mythe de la rationalité intrinsèque aux mathématiques et de la logicité éminente de la raison. Ne pouvant profiter d'un tel recours, les critiques historicistes se voient obligées, quant à elles, d'accorder un caractère déterminant à des facteurs aussi incertains que les rapports d'influence, la ressemblance des méthodes, les inspirations probables ou les analogies suggestives. Contre cet écueil, les déterminations sémiotiques, c'est-à-dire les conditions sous lesquelles un signe est susceptible de fonctionner et peut être envisagé comme tel, sont douées d'une autonomie capable de soustraire les rapports entre ces savoirs sémiotiquement conditionnés au simple hasard des rencontres fortuites. Mais la nécessité minimale qu'ils assurent ne saurait pour autant inscrire ces savoirs dans le cours implacable d'une raison formelle sans faille ; car ces rapports s'établissent à partir d'une empiricité, celle du signe, qui comporte toujours un degré d'ambiguïté qui les rend potentiellement instables.

La négligence de la dimension sémiotique des savoirs formels est pourtant flagrante tout autant dans l'histoire et la philosophie de la logique que dans celles des mathématiques. Quelques exceptions remarquables peuvent, certes, être relevées. La dernière décennie a vu apparaître une série de travaux en histoire des mathématiques qui cherchent à contester le paradigme sinon logiciste, du moins analytique, qui domine encore ce champ de recherches. La modalité principale de ces travaux consiste dans la mise en avant d'une dimension « pratique » inhérente au savoir mathématique. À cette tendance appartiennent par exemple les travaux de Reviel Netz, Edwin Hutchings, ou plus généralement le travail collectif entrepris sous la direction de Paolo Mancosu[12]. Inspirés souvent d'une perspective anthropologique, ces travaux explorent avec lucidité des aspects fondamentaux de la signification mathématique. Toutefois, leur attachement à la notion de « pratique » qui oriente leurs recherches semble empêcher qu'une dimension autonome du signe puisse être dégagée comme telle. Dans ce sens, la dispersion de ces recherches, tant d'objet que de période ou de niveaux d'analyse, les rapproche plus d'une anthropologie des mathématiques que d'une théorie du signe[13]. Deux tentatives singulières peuvent cependant être également évoquées, qui échappent à ce jugement : celle de Brian Rotman et celle d'Alain Herreman[14]. Dans ces travaux contemporains mais non directement liés entre eux, les aspects sémiotiques des mathématiques sont assumés de manière ouverte comme une dimension fondamentale de leur existence en tant que savoir dans l'histoire. Néanmoins, malgré cette position claire, ces tentatives recèlent une difficulté parallèle : l'approche sémiotique qu'elles proposent pour les mathématiques est déterminée de façon préalable par des théories se présentant en principe comme antérieures et indépendantes des mathématiques qu'elles prennent pour objet. Dans le cas de Rotman, il s'agit de la sémiotique de Peirce, dans celui de Herreman, de celle de Hjelmslev. Certes, cette circonstance est méthodologiquement légitime. Pourtant, d'un point de vue épistémologique, il se peut que ces constructions sémiotiques ne soient aucunement dissociables des déterminations formelles dont elles prétendent rendre compte, voire historiquement déterminées par elles, et que cette situation provoque un grand nombre de problèmes (des projections, des effacements, des rabattements, des anachronismes).

Cette dépendance, ou du moins cette intrication historique entre déterminations sémiotiques et mathématiques, est évidente dans le cas de Peirce, en raison de son inscription ouverte dans la tradition booléenne. Bien que plus délicate à établir, elle ne joue pas moins un rôle important dans le cas de Hjelmslev. Plus généralement, toute perspective théorique gagnée sur le fonctionnement des signes se trouve associée d'une manière ou d'une autre aux pratiques sémiotiques auxquelles elles apportent une intelligibilité. Elles en restent en cela particulières et dépendantes. Cela sera en tout cas le point de vue que nous adopterons dans notre travail. Ce qui définit pour nous un principe méthodologique simple mais décisif : si une sémiotique des mathématiques est à construire, en accord avec la thèse que nous avançons ici, elle doit être le résultat du dégagement d'une cohérence (fût-ce ouverte et dynamique)

[12] Cf. Netz (1999), Hutchings (2005) et Mancosu (2008). Les travaux David Rabouin reprennent aujourd'hui en France de manière originale cette tradition ; cf. par exemple Rabouin (2014).

[13] Ceci est sans doute l'effet de la relative jeunesse de cette orientation de recherche, et l'on peut imaginer qu'une théorie du signe mathématique, capable de s'intégrer de manière inédite à une théorie du signe en général, finira par se dessiner dans l'évolution de cette approche qui demeure pour le reste très convaincante.

[14] Cf. Rotman (2000) et Herreman (2000).

immanente aux formulations des mathématiciens, au plus près de leur pratique des signes. C'est pourquoi notre travail a pour but de restituer la sémiotique qui *émerge* des formulations de ces deux *mathématiciens* du XIXe siècle que furent Boole ou Frege, à partir des termes et des moyens qui furent les leurs[15]. Ce principe est sans doute lié à la dimension épistémologique de l'approche qui est ici la nôtre. Mais l'intérêt d'une telle démarche n'est pas dans la valeur intrinsèque de ces sémiotiques émergentes, que l'on peut, après tout, trouver assez pauvres à côté de celles, par exemple, de Peirce ou de Hjelmslev. Aussi, la justification de ce principe méthodologique réside-t-elle, plus profondément, dans une autre dimension de notre travail, qui est à nos yeux plus fondamentale.

Pour mieux la saisir, il convient de se référer à une contribution récente sur cette question : celle de Michel Serfati[16]. Ce travail, retraçant en détail la constitution de l'écriture symbolique, fondamentalement dans la période qui va de Viète et Descartes jusqu'à Leibniz, semble contourner les raisons par lesquelles nous nous démarquons des travaux actuels en matière de sémiotique des mathématiques. Dans la perspective avancée par Serfati, une dimension des signes est envisagée comme telle dans les mathématiques, et est en même temps reconstruite à partir des formulations des mathématiciens dans leur travail le plus intime de création. Qui plus est, l'unité de la période traitée garantit l'unité du domaine sémiotique ainsi reconstruit, qui mérite dès lors le nom de « symbolique ». Et pourtant, dans ces réflexions, *la question de la logique est irrémédiablement absente*. Cette remarque est d'ailleurs valable pour l'ensemble des travaux appartenant à l'histoire et à la philosophie des mathématiques que nous venons d'évoquer, et c'est la raison pour laquelle ils ne recoupent que très occasionnellement l'objet de notre recherche. Certes, il n'y a pas de raison d'essence ni de principe pour que l'histoire et la philosophie des mathématiques soit dans l'obligation de s'occuper de la logique. Mais si l'absence du problème de la logique dans les cas précédents pouvait s'expliquer, soit par l'inexistence d'une approche sémiotique, soit par le recours à des perspectives sémiotiques considérées comme indépendantes et appliquées extérieurement aux pratiques mathématiques, cette absence dans un travail comme celui de Serfati montre que le problème ne se réduit pas à une question épistémologique, méthodologique ou disciplinaire, mais qu'il doit être envisagé dans toute sa portée *historique*.

---

[15] La totalité de l'œuvre de ces deux mathématiciens-philosophes constitue donc notre *corpus*, auquel s'ajoutent aussi les travaux fondamentaux des mathématiciens, logiciens ou philosophes avec lesquels ces œuvres entrent en contact et se construisent d'une manière ou d'une autre. On ne s'étonnera pas que, partant de ces deux œuvres majeures, l'on puisse reconstituer la trame dense du paysage logique du XIXe siècle dans son ensemble.

[16] Cf. Serfati (2005).

En effet, si la question de la logique ne se pose pas d'elle-même lorsque l'on explore de manière immanente la sémiotique des mathématiques de l'époque classique (de Descartes à Leibniz), alors même que nous soutenons que par ces aspects sémiotiques les mathématiques communiquent de manière nécessaire avec la logique, c'est parce que le rapport de la logique aux mathématiques tel que nous le connaissons et pouvons l'envisager, et même le critiquer aujourd'hui, *constitue un événement historiquement déterminé*. Pour des raisons qu'il faudra expliquer, ce rapport se tisse, avant d'aboutir à l'intrication étroite des deux domaines que nous connaissons de nos jours, comme conséquence d'un processus qui commence au tournant du XIXe siècle[17]. Ce processus est précisément celui de la *mathématisation de la logique*, ce qui est un autre nom pour désigner l'objet sur lequel porteront les pages qui vont suivre. On comprend dès lors pourquoi le caractère historique de ce processus est si important pour le traitement du rapport entre logique et mathématiques : c'est dans cette histoire que la dimension des signes se révèle dans toute sa nécessité d'intermédiaire, assurant les circulations entre les déterminations de ces deux savoirs. Plus précisément, comme nous aurons le temps de le montrer en détail, la mathématisation de la logique, telle qu'elle s'accomplit en suivant les deux projets majeurs de Boole et de Frege, a impliqué de façon nécessaire, consciente et explicite le développement d'une théorie du signe, sans lequel la circulation stable des déterminations entre les deux domaines aurait été inconcevable. En cela, la mathématisation de la logique constitue un événement singulier, au cours duquel des mathématiciens purs[18], entraînés par les exigences inhérentes à leur propre pratique, se sont vus obligés de réfléchir à la nature des signes mathématiques de manière spontanée, en autarcie et depuis un point de vue si général qu'ils finirent par développer une théorie originale du signe et de la signification, débouchant sur la constitution d'une logique d'un type nouveau. C'est par cette dimension sémiotique déployée sans autre recours que la spontanéité de la réflexion sur une pratique, qu'une continuité a fini par s'instaurer entre ces deux savoirs qui s'étaient maintenus jusque-là convenablement dissociés, malgré un certain nombre de tentatives sporadiques (de Raymond Lulle à Leibniz) pour les associer.

C'est donc dans le cadre de cette historicité de la mathématisation de la logique que la pensée de Frege peut apparaître comme un véritable « événement », associé à la structure plurielle et articulée d'un espace de déterminations agissant en profondeur. Par cette historicité, la thèse que nous avançons ici concernant l'intermédiation sémiotique gagne en précision. Car en suivant les traces de la formation de cet espace sédimenté, on remarquera

[17] Comme nous le verrons, ce processus n'est pas sans rapport avec certains effets des aspects l'œuvre de Leibniz dont Serfati fait l'histoire.

[18] À la différence de Descartes ou de Leibniz, par exemple, dont la vision des mathématiques, et même des aspects sémiotiques des mathématiques, était intimement liée à leur position de philosophes.

que si une dimension sémiotique opère comme intermédiaire entre les mathématiques et la logique en tant que savoirs formels, c'est parce que la constitution de la logique formelle a été l'effet d'une réflexion sémiotique dont les conditions, la nécessité et jusqu'à l'urgence, proviennent des exigences internes des mathématiques dans leur évolution historique. Ce qui veut dire que dans l'espace de la mathématisation de la logique, c'est le caractère « formel » des mathématiques qui est sémiotiquement transmis à la logique, qui ne le lui rend (sous la forme d'un fondement) que par un effet rétroactif, que nous nous garderons bien de tenir pour inefficace pour autant.

Mais sans doute cette notion de « formel » a besoin d'être réinterrogée. Car c'est dans cet espace stratifié, dont les aspects historiques de notre recherche viendront restituer minutieusement la structure, que la continuité asymétrique sémiotiquement conquise entre les mathématiques et la logique permettra d'imaginer pour ces deux savoirs le statut commun que l'on a l'habitude de reconnaître depuis sous l'adjectif « formel ». Une notion renouvelée du formel sera donc offerte à la pensée comme résultat de ce processus, et c'est dans la reconstruction de ce concept au plus près de ses conditions d'émergence historiques que se situe l'ambition proprement philosophique de notre contribution[19]. À ce sujet, l'intervention singulière de Frege dans l'espace où cette notion de formel s'agence comporte un effet remarquable, qui donne à la thèse de la médiation sémiotique une nouvelle dimension, *ontologique* cette fois-ci. Car en aménageant à l'intérieur de cet espace saturé par l'exigence du « formel » une place inédite pour le *contenu*, Frege promettait d'accomplir, d'une façon certes inattendue, les espoirs renouvelés que l'ontologie postcritique avait déposés dans la notion de contenu, au plus près d'une logique d'un type nouveau. Si l'œuvre de Frege fait événement non seulement pour la logique formelle, mais aussi pour la pensée philosophique, c'est donc aussi par cette étrange réaffirmation, dans l'espace stratifié du formel, d'une « logique du contenu », où s'étaient reconnus tant le projet kantien d'une Logique transcendantale, que celui hégélien d'une Dialectique, ou Logique spéculative. Le résultat de cette tentative frégéenne pour donner lieu à une notion de « contenu formel » sera la transformation de la notion de contenu en celle de *sens*, dont la centralité pour la pensée

[19] Sous cet angle, notre travail semble se rapprocher de celui de MacFarlane (2000). En effet, MacFarlane, en posant dès le départ la question du sens de la notion de « formel », s'engage dans une recherche critique qui fait appel à l'histoire comme instrument privilégié, pour critiquer l'idée reçue d'une logique formelle abstraite (c'est-à-dire, détachée de tout contenu matériel). C'est ainsi que, par un retour à l'œuvre de Kant, MacFarlane cherche à faire valoir un sens pluriel pour la notion de formel, qui serait capable de contribuer aux débats logiques contemporains. Notre propos est néanmoins de nature très différente. Car il ne s'agit pas pour nous de faire appel à l'histoire de la philosophie pour contribuer au débat logique actuel, mais d'une tout autre manière, de mobiliser l'histoire des mathématiques pour fournir un éclairage sur ce moment crucial pour la philosophie que fut, à la fin du XIX[e] siècle, le nouage d'un type de rapport nouveau au savoir logique. C'est donc à travers cette perspective particulière que notre travail prétend contribuer aux débats (philosophiques, logiques, voire mathématiques) contemporains.

contemporaine commence seulement à être mesurée[20]. Mais cette émergence de la notion de sens ne pourra être comprise qu'à travers la longue recomposition de l'espace du formel qui commande cette transformation. Il apparaîtra que la restitution et le traitement de la logique que cette notion de sens nécessite passe par l'élaboration, même rudimentaire, d'une *théorie de l'expression*, du fait du mode particulier et effectif dont la réaffirmation du contenu dans le formel a eu lieu avec Frege. Le développement d'un certain nombre d'éléments et de dimensions d'une telle théorie de l'expression constituera ainsi l'apport proprement ontologique de notre recherche.

C'est donc à l'histoire de cet évènement qui fut, au seuil du XX^e^ siècle, l'émergence d'une logique formelle du contenu, ou plus précisément d'une *logique du sens*, que nous allons nous livrer. Histoire qui est indiscernable donc d'une ontologie, et qui, par la façon même dont elle sera menée, pourrait sans doute être considérée comme une archéologie : *Archéologie de la logique du sens*[21].

*
* *

L'espace où cette archéologie aura à se déployer et à exercer son action critique est celui de la mathématisation de la logique, en tant que processus historiquement déterminé, se déroulant des premières années du XIX^e^ siècle (avec les textes de Robert Woodhouse, le premier des « algébristes de Cambridge ») jusqu'au tournant du XX^e^ (avec la correspondance entre Frege et Russell). Comme nous l'avons déjà annoncé, cet espace se structure en trois dimensions, envisageables comme autant de *strates*. Les transferts multiples et les configurations locales à travers la sédimentation de ces strates nous obligeront à les parcourir en plusieurs directions. Si nous devions cependant les présenter ici de façon systématique,

---

[20] Sur cette centralité de la catégorie de « sens » dans la philosophie contemporaine, deux œuvres doivent être mentionnées ici, celle de Jean-Michel Salanskis et celle de Jocelyn Benoist. Par des moyens et des styles différents, ces deux œuvres s'efforcent de prendre la mesure de ce qui se joue pour la philosophie de notre temps sous cette catégorie de « sens », au croisement des traditions continentale et analytique. Dans le cas de Salanskis, notamment, le projet d'une philosophie du sens comporte, comme une dimension essentielle, une rencontre avec le savoir mathématique, vis-à-vis duquel il défend une approche herméneutique. Pour l'œuvre de Salanskis on pourra notamment se rapporter à *L'herméneutique formelle* (1991) et à *Sens et Philosophie du sens* (2001) ; pour celle de Benoist, à *Représentation sans objet* (2001) et *Sens et sensibilité* (2009). Leur influence diffuse n'est pas moins réelle sur notre recherche.

[21] Le nom de Michel Foucault s'impose immédiatement à la mention d'une méthode archéologique. Toutefois, il ne saurait s'agir pour nous d'application directe de ses formulations, ou encore moins de mimétisme méthodologique. Notre rapport à Foucault est de l'ordre d'une clarification conceptuelle nécessaire pour le type très particulier de recherche auquel nous allons nous livrer. De ce point de vue, notre travail peut aussi être lu comme une tentative d'exploration de la méthode archéologique dans l'histoire des mathématiques, et plus généralement, des savoirs formels.

nous commencerions sans doute par la strate la plus profonde, correspondant à celle du savoir *mathématique*. Envisagé comme un savoir dynamique et ouvert (et non pas comme une science instituée et close), le domaine des mathématiques apparaît, du point de vue de la mathématisation de la logique, comme un ensemble de *pratiques* : pratiques algébriques, pratiques arithmétiques, mais aussi et surtout, pratiques se situant au croisement de plusieurs disciplines. Dans ce sens, les travaux d'histoire des mathématiques que nous avons déjà mentionnés ont bien raison de mettre en avant la catégorie de « pratique mathématique » ; à condition d'envisager ces pratiques comme des pratiques *sur des signes*. Douée d'une certaine autonomie, cette strate constitue une source de synthèses, déterminées par les contraintes et les possibilités issues de sa propre tradition. Elle se compose d'un faisceau positif de règles, procédures, mécanismes, distributions, figures, déplacements… portant sur la manipulation et la compréhension des signes. Ce faisceau des *formes* de la pratique mathématique ne se présente pas pour autant dans une dispersion radicale, mais s'organise autour de problèmes, de techniques ou de stratégies efficaces, ainsi que de solutions partielles. C'est d'ailleurs par cette organisation que ces formes sont capables de se composer dans des fonctionnements complexes, dans un équilibre instable qui suffit pourtant à les détacher des règles et contraintes propres à la tradition mathématique et à définir ainsi une nouvelle strate dans cet espace. C'est cette strate qu'il faut appeler proprement *sémiotique*[22]. Son niveau le plus irréductible est donc constitué par ces *fonctionnements* qui se dégagent des pratiques mathématiques sur les signes. Mais libérés des contraintes typiquement imposées par ce savoir (concernant par exemple les « objets » mathématiques, ou les « opérations » ou les « structures » proprement mathématiques), ces fonctionnements acquièrent une liberté nouvelle qui habilite les circulations ailleurs interdites, les connexions inattendues, les analogies improbables, les changements de niveau ou les dispositions nouvelles. Cette strate est donc animée par une création ou une émergence des formes, dont l'efficacité locale des assemblages semble être le seul principe. Par ce foisonnement des formes, les transferts entre ce niveau inférieur de la strate sémiotique et celle des pratiques mathématiques sont fréquents. Cependant, si les fonctionnements provenant des mathématiques sont doués d'une stabilité certaine, les assemblages sémiotiques inédits qui s'opèrent à partir de ces fonctionnements

---

[22] À l'écart du sens que ce terme a pris depuis la fin du XIXe siècle, notamment à partir des travaux de Peirce, mais aussi de la tradition de la linguistique structurale qui se développera dans la suite des travaux de Saussure, nous garderons pour ce mot un sens élémentaire, voire naïf. Dans l'ensemble de notre travail, « sémiotique » voudra toujours renvoyer à l'adjectif associé au nom « signe ». Ainsi, une pratique, un fonctionnement, ou même une forme « sémiotique » renverra tout simplement à une pratique des signes, à un fonctionnement des signes ou à la forme d'un ou des signes. C'est pourquoi l'usage fondamental que nous en faisons est toujours adjectival. Tout autre contenu dont ce mot sera chargé dans notre travail sera le résultat des propriétés ou des déterminations que nous aurons établies dans son développement.

sont quant à eux hautement précaires et instables. C'est pourquoi une deuxième couche sémiotique se dessine, définissant le niveau supérieur de cette strate, où une *configuration conceptuelle* ou catégorielle s'organise, dans le but d'assurer pour ces fonctionnements locaux et fragiles une stabilité et une généralité minimales. Cette conceptualité résulte d'une certaine réflexivité ; mais sa consistance rudimentaire reste liée à l'efficacité des fonctionnements sémiotiques par l'intelligibilité qu'elle est capable de projeter sur eux. En ce sens, il ne saurait s'agir à ce niveau de concepts spéculatifs. Au plus près de la pratique des signes, leur consistance ne pourrait être établie *a priori* ; elle résulte du fait après tout mystérieux qu'une certaine pratique sémiotique « marche », et elle dure aussi longtemps que « ça marche »[23]. Pour autant, de tels concepts ou catégories n'en sont pas moins capables de se cristalliser dans des configurations relativement complexes, constituant des sortes de « proto-théories » du signe et de sa façon de signifier. C'est pourquoi nous pouvons appeler ce niveau supérieur de la strate sémiotique : *sémiologique*[24]. En effet, c'est à ce niveau, toujours en contact avec l'efficacité possible de leur fonctionnement singulier, qu'une rationalité, hésitante mais précise, se définit pour les signes avec une prétention modeste de généralité. Il peut d'ailleurs arriver que certaines configurations sémiologiques atteignent une généralité et une consistance telles qu'elles deviennent la source d'une conceptualité suffisamment rigide pour supporter une véritable systématisation du domaine des signes. De telles systématisations définissent la dernière strate, en surface de cet espace, celle de la *logique*[25]. C'est à ce niveau-ci, à la surface de l'espace complexe où des formes sémiotiques circulent, et comme résultat d'une multiplicité stratifiée de médiations jamais entièrement certaines, que de véritables *systèmes* logiques peuvent être projetés et effectivement édifiés. La solidité et la généralité de cette strate logique l'investissent d'ailleurs de la prétention de projeter sur le reste des strates l'intelligibilité qu'elle procure, par un effet en retour qui relance de nouvelles circulations des formes.

Voilà donc l'organisation générale de l'espace archéologique que notre recherche prend pour objet. Cet espace, nous l'avons dit, est celui de la mathématisation de la logique, telle qu'elle émerge et se développe du début à la fin du XIXe siècle, suivant une dynamique qui remonte des strates les plus profondes jusqu'aux plus superficielles. Dans ce parcours, la

---

[23] Cf. Maniglier (2013).

[24] Tout comme pour le cas du mot « sémiotique », nous détachons en principe le sens du mot « sémiologique » de celui qui s'est établi dans le courant du XXe siècle. Dans les pages de notre travail, l'adjectif « sémiologique » renverra principalement à l'intelligibilité gagnée sur la nature des signes comme résultat d'une réflexivité au plus près des pratiques sémiotiques.

[25] Cette connexion intime entre la strate logique et le niveau supérieur de la strate sémiotique vient justifier une seconde fois pour ce dernier sa caractérisation de *sémiologique*. Il nous arrivera aussi d'écrire « sémio-logique » pour nous référer à l'espace continu constitué par l'association de la strate sémiotique et de la strate logique.

place intermédiaire de la dimension sémiotique est essentielle pour garantir la continuité des « formes » mathématiques jusqu'aux systèmes « formels » de la logique. De ce point de vue, la strate sémiotique n'est pas moins « formelle » que les autres, avec lesquelles elle communique à travers la circulation de déterminations, car à son niveau spécifique, les propriétés qui la traversent, et que l'on finira par appeler « formelles », se déterminent tout autant comme telles. Aussi, *mathématiques*, *sémiotique* et *logique* constituent-elles les *trois racines de la raison formelle*, qui émerge dans le sol de la pensée occidentale au XIXe siècle.

Or pour que cette dynamique puisse atteindre les niveaux systématiques supérieurs assurant la persistance et la continuité qui perpétueront l'effectivité de cet espace jusqu'à nos jours, un facteur a été décisif dans l'ensemble de ce processus. En plus des conditions singulières au niveau des pratiques mathématiques qui déclenchèrent l'escalade de la mathématisation, l'accès final à la systématisation logique de l'ensemble irrégulier et vacillant de déterminations sémiotiques fut accompagné, et comme guidé, mesuré et légitimé par une confrontation des capacités de ces systèmes *aux effets de sens des expressions du langage courant*. Si bien que le langage, dans son usage le plus ordinaire, s'est vu prendre une place fondamentale dans ce processus de mathématisation de la logique. Cette place garantira, d'ailleurs, à la logique mathématisée une voie privilégiée de communication avec la philosophie contemporaine. C'est pourquoi le langage courant ne saurait être absent de l'espace où ce processus de mathématisation de la logique se déploie. On peut être tenté d'imaginer pour lui une nouvelle strate, au-delà de la logique, d'où il ferait foisonner ses *expressions* anarchiques, avec une spontanéité pratique qui le rapprocherait des strates les plus profondes. Pourtant, force est de reconnaître que l'action signifiante du langage courant est constatable à chacun des niveaux de cet espace. C'est l'une des raisons pour lesquelles les systèmes logiques ont éprouvé le besoin de se mesurer à lui ; dans leur volonté de projection sur l'ensemble de l'espace de la signification formelle, la capacité de se substituer à l'efficacité étendue mais approximative du « langage des mots » constituait une condition primordiale. La possibilité de réduire les effets de sens du langage courant aux composantes et règles strictes de la systématicité logique procura ainsi à la fois une orientation et une confirmation pour la formalisation de la logique. C'est pourquoi cette formalisation apparaît souvent comme indiscernable d'une formalisation du langage tout court. Aussi, si on élargit la perspective pour inclure dans son espace cette double place déterminante du langage courant (point local de repère et d'évaluation par rapport aux systèmes logiques, et efficacité disséminée sur tout l'espace), la mathématisation de la logique doit être envisagée plus généralement comme un processus de *formalisation du sens*. Non pas que cela ait été son but ; mais c'est sans doute en cette qualité que la mathématisation de la logique produira les effets les plus décisifs sur la pensée philosophique contemporaine.

Dans le cadre de notre travail, nous emploierons donc l'expression « formalisation du sens » pour désigner de manière générale le processus historique par lequel le sens véhiculé par le langage courant s'est vu attribuer des déterminations de nature formelle comme résultat du processus spécifique de mathématisation de la logique. Il apparaîtra que la notion même du sens, considérée dans l'historicité de son émergence, comme un terme dans un faisceau des « distinctions essentielles », est elle-même l'effet de la mise en avant d'une notion spécifique de « formel » à l'intérieur de l'espace sémiotique de mathématisation, tel que nous venons de le présenter. Autrement dit, à l'usage relativement insouciant du mot « sens » auquel renvoie l'expression « formalisation du sens » (et qui n'est pas plus le nôtre que celui de l'ensemble de mathématiciens et logiciens participant au processus de mathématisation de la logique), s'oppose le concept sémiologique de sens (*Sinn*), qui s'est cristallisé comme résultat d'une façon particulière de traverser et d'organiser l'espace de ce processus. Ainsi, la logique du sens constitue seulement une des possibilités ouvertes par le processus général de formalisation du sens ; précisément celle où une catégorie suffisamment précise de *sens* parvient à se faire une place dans la configuration sémiologique sur laquelle un système logique peut trouver une assise.

Cette singularité de la logique du sens dans l'espace général de la formalisation du sens trahit une circonstance fondamentale : la formalisation du sens ne constitue pas un processus unifié. Plusieurs configurations parallèles se structurent dans cet espace, comme résultat des parcours singuliers frayés depuis les strates les plus souterraines jusqu'aux édifications en surface. Par cette multiplicité, autant de conceptions particulières de la notion de « formel » sont élaborées et proposées à la pensée. D'où notre utilisation souvent hésitante de ce mot, dont la signification varie suivant le parcours dans lequel elle s'inscrit ou dont elle résulte. Ce n'est pas pour autant que ces significations multiples demeurent entièrement déconnectées ; la preuve en est que les logiciens appartenant à l'une ou l'autre de ces parcours ne cessent pas d'en discuter comme s'il s'agissait de la même chose. Le travail d'une archéologie est donc de révéler les mécanismes et les effets qui animent cette multiplicité. C'est de cette façon que nous parviendrons à donner une réponse à la question du lien spécifique entre Arithmétique et contenu dans l'œuvre de Frege, ainsi qu'une intelligibilité à l'événement déterminé par l'émergence d'une notion de « sens » dans l'espace de la logique formalisée.

*
* *

Ce que nous présentons dans cette introduction comme une vision relativement unifiée d'une longue histoire n'a de sens cependant qu'à être resitué dans le parcours sinueux par lequel cette histoire se fait. Si nous sommes ici capables de présenter avec une systématicité minimale l'ensemble des conditions qui permettent de comprendre le sens de cet événement que constitua l'émergence, au seuil de notre contemporanéité, de l'idée d'une logique du sens, c'est parce qu'une organisation plus ou moins stable s'est dégagée lentement au rythme de nos cheminements vétilleux. Notre parcours possède néanmoins le caractère méthodique d'une *enquête*. Ou celui, plutôt, d'une *lecture symptomale*, suivant laquelle, plus que les édifications systématiques, ce sont les lacunes ou les inconsistances rencontrées par nos analyses qui nous indiqueront le chemin à suivre.

Ainsi, notre travail s'ouvre sur l'incompréhension suscitée, dans le milieu logique et philosophique européen, et allemand tout particulièrement, par la parution en 1879 de la *Begriffsschrift*, premier opuscule logique de Frege. Nous verrons que cette incompréhension n'a pas été contingente, mais qu'elle a été l'effet, plus profondément, des termes qui organisaient le débat philosophique post-hégélien sur la logique, déterminé par l'opposition entre une logique formelle et une logique du contenu. La réponse de Frege à la réception de son ouvrage, effectuée sous la forme d'un remarquable exercice comparatif par rapport à la logique booléenne, nous permettra d'identifier dans sa notion singulière de « contenu », les raisons de l'incompréhension de ses contemporains. Cela nous donnera aussi le principe et les éléments pour une restitution du système frégéen suivant les termes et les fondements qui furent les siens. Il en ressortira que, du fait de la définition du contenu logique dans une relation réciproque inédite à l'ensemble des expressions, son système se voit indissociablement lié à une dimension strictement sémiotique, jusqu'ici généralement négligée. Cette mise en lumière du caractère expressif du système frégéen fera apparaître toute une série de propriétés et de catégories qui n'ont guère été remarquées dans son travail, à cause de l'approche purement logique dont celui-ci a fait l'objet. Ce sont pourtant ces propriétés et ces distributions qui nous permettront de localiser, de construire et d'énoncer, à la fin de notre première partie, ce qui constitue le véritable problème de notre recherche : les principes du système frégéen (notamment, d'inférence et d'égalité des expressions) restent insuffisants pour déterminer ses instruments. Pourtant, ses instruments n'en sont pas moins déterminés. C'est dans cet écart qui se découvre entre les fondements et l'effectivité de la logique frégéenne que notre enquête cherchera à s'installer et trouvera son point de départ réel. On y devinera aussitôt, comme nous l'avons annoncé, la place constitutive de l'Arithmétique pour cette logique du contenu. Mais d'autres problèmes se poseront immédiatement. Car l'Arithmétique agissant déjà, de l'aveu même de Boole, comme infrastructure de la logique booléenne, qu'est-ce qui expliquerait que celle-ci ne dispose pas d’une notion de contenu ? Deux pistes se présenteront alors à nous : celle d’une distinction entre l’Arithmétique et l’Algèbre dans cette place constitutive des systèmes logiques ; celle aussi, d’une différence possible dans l’interprétation de l’Arithmétique en tant que langage.

Ce seront ces deux pistes que nous nous efforcerons de suivre dans le détail dans les deux parties suivantes, à travers une analyse de l’évolution qui mène de l’émergence de l’Algèbre abstraite anglaise à la constitution de la logique mathématisée de Boole. La deuxième partie retrace ainsi dans un premier temps le processus d’établissement de l’Algèbre abstraite anglaise à partir des travaux des « algébristes de Cambridge », de Woodhouse à Gregory. On a souvent dit, et à juste titre, qu’une conception opératoire du signe prend naissance dans ce contexte. Pourtant, comme nous l’avons anticipé, la question de la place problématique de l’Arithmétique dans le développement de cette conception symbolique mettra en relief le principe d’une dynamique sous-jacente à cette évolution. En effet, l’expulsion de l’Arithmétique hors de l’espace sémiotique défini par l’Algèbre naissante anima la réflexion sur la nature du symbole, et engendra l’élaboration de la part de ces mathématiciens d’une série de catégories et concepts définissant une théorie élémentaire de la signification qui se rapproche des principes de la pensée logique. Un parcours détaillé de l’œuvre mathématique du jeune Boole, qui n’a pas, jusqu’à ce jour, suscité beaucoup d’intérêt, permettra ensuite de constater sa pleine inscription dans le contexte problématique des algébristes anglais, en même temps que de détecter le point où il déborde leur conceptualité sémiologique pour aller vers la systématisation d’une logique mathématisée très originale. Par la restitution des bases de la logique booléenne, où la notion d’abstraction occupe une place charnière, nous arriverons enfin à dresser un tableau du régime mathématico-sémio-logique qui s’est cristallisé comme résultat de l’ensemble de ce processus, et que nous qualifierons d’*Abstraction symbolique*. C’est de cette façon que se verra minutieusement établi le lien entre une logique de l’abstraction qui exclut le contenu, et une Algèbre se définissant ouvertement par l’exclusion de l’Arithmétique.

Pourtant, des principes sémiotiques liés à l’Arithmétique persistent étrangement dans le système logique tel que Boole lui-même le bâtit. « Étrangement », puisque la construction booléenne dispose de tous les instruments pour les éradiquer, permettant à sa logique d’atteindre à la simplicité et à la cohérence que nous lui attribuons de nos jours. Au lieu de mésestimer cette circonstance, comme cela a été généralement le cas, en la considérant comme une erreur, une contradiction ou pire une obstination de la part de Boole, nous essaierons dans notre troisième partie d’entendre les raisons d’une telle persistance, au plus près des conditions du régime qui donne sens à la logique booléenne. C’est ici que notre lecture symptomale trouve sans doute son terrain le plus fertile, bien que la minutie de ce travail risque de paraître par instants légèrement égarante. Par un travail proprement archéologique d'analyse des morceaux disséminés d'une Arithmétique fragmentée, nous réussirons à recomposer une série des dualités dans le système de Boole sur le fonctionnement desquelles un double principe de contenu logique voudrait prendre forme. Plus précisément, nous trouverons dans la différence de traitement de l'addition par rapport à la multiplication lors de leur interprétation logique, le point par où Boole se distingue de tous les autres algébristes, le point par où chez lui résiste quelque chose comme un « contenu ». L'action des principes du nombre à travers ces dualités des régimes de répétition et de différence dans ce système apparaîtra sous cette lumière comme une véritable genèse sémiotique de l'objet et du concept. Au demeurant, la seconde piste de notre enquête aura ainsi gagné en précision et pourra dès lors être considérée comme confirmée.

Dans la quatrième partie, nous commencerons par mettre en rapport ce dispositif booléen du contenu logique avec celui de la logique frégéenne. D'autre part, la perspective gagnée dans la reconstitution de l'Abstraction symbolique nous permettra de restituer au système frégéen la strate mathématique qui agit sous sa configuration sémio-logique, et que nous identifierons comme celle d'une approche fonctionnelle de l'Arithmétique. Un régime parallèle à celui de l'Abstraction prendra ainsi forme, que nous qualifierons d'*Expressionnisme*. Commandé par l'analyse fonctionnelle des expressions arithmétiques en tant que dynamique sous-jacente, les modifications de la conceptualité et de l'instrumentalisation du système de Frege deviennent intelligibles. C'est dans le cadre de ces modifications et ajustements que le concept de *sens* verra le jour dans le cadre de la logique formelle. Qui plus est, ces ajustements fourniront les éléments pour comprendre enfin la façon dont l'Expressionnisme frégéen résout les lacunes qui motivaient le début de notre enquête.

Les limites de l'Expressionnisme tel que Frege l'avait conçu et mis en œuvre ne devaient pas tarder à se manifester. Dans la dernière partie de cette recherche, nous nous occuperons des effets sur l'Expressionnisme de la manifestation principale de ces limites, le paradoxe de Russell. Peu de choses n'ont pas été dites à propos de cet épisode célèbre de l'histoire de la logique, de la philosophie, voire de la pensée tout court. Mais ici aussi nous nous intéresserons aux symptômes, en proposant une lecture serrée de la correspondance Frege-Russell. Car malgré l'évidence que l'histoire tend à accorder aux positions de Russell, il importe de comprendre pourquoi Frege, lui, n'a jamais souscrit aux raisons du correspondant anglais. Non pas qu'il ait négligé le problème soulevé par son paradoxe, bien au contraire. Mais l'attitude de Frege à son égard suggère qu'il n'y reconnaît tout simplement pas le même problème que Russell. La perspective sémiotique qui aura été la nôtre s'avérera capable de rendre compte de cette divergence, subtile mais cruciale, à partir d'une étude minutieuse de la correspondance entre les deux logiciens. Cette partie, et avec elle, notre long parcours, se finit par un retour aux sources méconnues de la pensée frégéenne, marquées du nom de Gauss, pour y déceler les conditions mêmes de l'Expressionnisme, qui ne seraient pas autres que celle de la logique contemporaine. On y verra que le nombre se place au croisement d'une multiplicité de structures dont les propriétés mathématiques restent indiscernables des propriétés sémiotiques (par exemple, la structure polynomiale, la factorisation binomiale ou la décomposition en facteurs premiers). Le nombre y apparaîtra comme l'effet de la fixité des renvois entre les différentes structures. Autour de ce croisement, où la dualité entre les opérations d'addition et de multiplication s'avèrera prendre une place centrale, nous verrons subitement se rassembler l'ensemble des fragments du nombre que nous aurons recueillis au long de notre parcours. Enfin, nous aurons le temps d'identifier dans les principes agissant sous ce rassemblement les mêmes principes que Gödel mobilisera sémiotiquement dans les travaux qui le rendirent célèbre. Mais ce ne seront là encore que des fragments, dans l'espoir qu'ils puissent devenir l'objet des nouvelles synthèses encore à venir.

Remerciements

La réalisation d'une Thèse de Doctorat est un travail qui se fait dans une solitude profonde et inévitable. Au terme de ce travail, pourtant, j'éprouve avec intensité le besoin d'exprimer ma gratitude la plus sincère à un nombre étonnamment grand de personnes. Ce qui me fait comprendre, soudain, que cette solitude a été plus un impératif qu'une réalité. Et que remercier, c'est toujours remercier de ne pas être seul.

Je tiens à remercier d'abord *Charles Ramond* et *Jean-Michel Salanskis,* qui ont accepté le risque de diriger conjointement cette recherche, et qui ont respecté, encouragé et secoué cette solitude à chaque fois qu'il le fallait. Des pages entières de cette Thèse ont été écrites dans un dialogue explicite ou implicite avec l'un ou l'autre, guidées par la précision de leurs remarques. Que l'admiration que je leur porte soit un témoignage de la gratitude qui sera pour toujours la mienne à l'égard de leur fidélité et de leur confiance sans faille.

Je tiens à remercier aussi *Patrice Maniglier*. Ce que cette Thèse lui doit ne se laisse tout simplement pas exprimer. Depuis la discussion ininterrompue des idées qu'elle contient, jusqu'à la verbalisation méticuleuse et harassante des phrases exagérément nominales qui la composent, la marque qu'il aura laissée sur mon travail excède largement la présente recherche. À son côté j'ai appris la sagesse d'une façon en tout indiscernable de l'amitié. À son côté j'ai appris, donc, au sens strict, la philosophie. Cette Thèse ne peut dès lors que lui être dédiée, en espérant qu'un jour les idées qu'elle prétend avancer pourront encourager aussi les siennes.

Mes parents, *Susana Semilla* et *Luis Gastaldi,* ont soutenu sans aucune réserve ma volonté philosophique dès sa naissance, alors que celle-ci pouvait sembler n'être guère plus qu'un délire excentrique. L'achèvement de ce travail est aussi pour moi une façon d'honorer leur confiance inconditionnelle et l'occasion de les remercier une fois de plus, sachant qu'ils ne cesseront jamais de m'offrir de nouvelles raisons de le faire. *Luciana Gastaldi* a bien hérité de cette inconditionnalité, et la savoir présente a toujours été pour moi une source de sérénité.

Trois personnes ont été les piliers d'un monde où cette Thèse, et tout ce qu'elle implique, constituait un pari nécessaire. *Alejandro Rabinovich* a invariablement été l'avant-garde de ce qui trop souvent s'est présenté comme une bataille. Sa force a été et sera toujours la mienne. *Samantha* a tout donné. Elle a cru et elle a fait croire. Elle aurait sans doute voulu voir la fin de cette Thèse de plus près, mais elle n'imagine même pas à quel point nous ne saurons jamais être loin. Je n'ai rien à dire devant l'immensité de *Juan Manuel Ferreyra*. Seulement à parier – puisque de paris il s'agit – que les silences ne sont que des pauses.

Sans la sagesse éclairée, militante et tutélaire de *Manuel Navarro*, je me serais perdu il y a longtemps dans d'autres aventures moins fondamentales, moins passionnantes, que celles de la philosophie, et même que celles de la philosophie du sens. Malgré toutes les distances, il restera pour moi un maître éternel. *Sonia Bengoechea* et *Silvia Robin* ont eu à mon égard une combinaison très rare de confiance et de générosité sans limites. Je tiens d'elles cette obligation, ce besoin, même, de perpétuer l'une et l'autre, ce qui est une manière de perpétuer bien plus que leur souvenir.

Paris a été une fête grâce à *Carlos Pérez, Noëlle Lieber*, *Dolores Linares*, *Eleonora Giménez*, *Daniel Álvaro*, *Luis Ferreyra*… Sans eux la dureté des terres étrangères aurait été douloureuse. *Benoît Conti* et *Gautier Ferrero* m'ont appris à me débarrasser de mon étrangéité par leur amitié accueillante et sans frontières. Une relation fraternelle et profonde me lie à *Andrea Torres* et *Nicolás Alvarado,* que n'effraient guère toutes les distances à venir. Parmi toutes les choses que cette Thèse a été, elle a aussi été la circonstance contingente de tisser une amitié nécessaire avec *Julia Peker,* à qui je dois d'avoir appris le courage qu'il y a à accepter qu'il peut y avoir des choses bien plus importantes qu'une Thèse. À *Manuel Semilla* et *Malena Musich* je dois le fait à tous égards essentiel d'avoir affronté l'écriture de cette Thèse dans le meilleur de mes états physiques, et donc spirituels. *Pablo Duran* a su être là, en croyant n'y être pour rien, à chaque fois que j'ai eu besoin de quelqu'un. L'aide précise et appliquée d'*Emmylou Haffner* lorsque tout pressait a été précieuse et décisive. *Mladen Alexiev, Roberto Yanguas, Rob Santaguida*, *Ariane Pauls* et *Julia von Leliwa* ont su rendre cette Thèse elle-même une fête au moment de solitudes autrement étrangères. *Leandro Minuchín, Julián Cavalli, Gisela Cadirola, Mavie Pagano, Jan Maršálek* et *Anoush Gangipour* ont été, chacun à leur façon, présents au long de toutes ces années de travail.

Frédéric Worms et *David Lapoujade* ont accueilli avec bienveillance ma volonté philosophique et lui ont permis d'emprunter la direction qui a conduit à cette Thèse. Dans la traversée de ces nouveaux chemins, j'ai pu profiter d'échanges éclairants avec *David Rabouin, Jean-Baptiste Joinet* et *Élie During,* ainsi que du contexte philosophique exceptionnel que seul un centre comme le *CIEPFC* pourrait offrir. Autrement exceptionnel, mais également précieux, a été le contexte que *Matías Ruffini* a su aménager au sein de la *Facultad de Humanidades y Artes* de la *Universidad Nacional de Rosario,* autour du séminaire dans lequel j'ai pu discuter le début de ces recherches avec des étudiants lucides et étonnamment concernés. Mes étudiants à l'*École des Beaux-Arts de Montpellier Agglomération* (ESBAMA) ont eux aussi souffert de la survenue insoupçonnée de la logique au milieu de leur cursus. Plusieurs pistes de cette Thèse se sont affirmées à l'issue de tous ces déplacements réciproques.

Cette Thèse a bénéficié d'un financement de la part de l'Équipe SPH (anciennement LNS) de l'Université de Bordeaux-3 Michel de Montaigne, sous la forme d'une Bourse d'établissement (Bourse LNS). Sans cette aide financière, la réalisation de cette Thèse aurait été pratiquement impossible. Je tiens donc à remercier tout particulièrement l'*Équipe SPH*, et notamment son ancien directeur *Charles Ramond* et son actuel directeur *Valéry Laurand*, pour ce soutien fondamental, en espérant que les résultats de mon travail seront à la hauteur de leurs expectatives, et qu'ils constitueront surtout une raison de plus pour maintenir et généraliser ces dispositifs alternatifs de financement de la recherche.

L'*Akademie Schloss Solitude* constitue de nos jours l'une des rares institutions dans le monde où la pensée peut être exercée dans une liberté absolue. Cette Thèse a énormément profité de cette liberté et des conditions extraordinaires sous lesquelles l'Académie s'efforce de la mettre en place. À l'origine de cet esprit se trouve la perspective convaincue de son directeur, *Jean-Baptiste Joly*. Qu'en sa personne l'ensemble de l'équipe du *Schloss* soit remercié.

Mon intégration au sein de l'équipe enseignante de l'*ESBAMA* m'a permis de terminer ce travail dans les meilleures conditions ; je dois cela avant tout à la confiance patiente que m'ont accordée ses directeurs *Philippe Reitz* et *Christian Gaussen*. Plus profondément, l'ESBAMA a supposé pour moi la sphère où cristalliser une volonté de pensée et de création collectives, qui trouve dans les noms de *Christian Gaussen*, *Laetitia Delafontaine* et *Gregory Niel* (auxquels il faut nécessairement ajouter celui de *Patrice Maniglier*), la forme concrète du « *nous* » auquel j'ai toujours voulu appartenir.

Le dévouement absolu de *Bérénice Serra* a fait des interminables derniers jours, dernières semaines, derniers mois, de ce long cheminement l'occasion de sceller une complicité émouvante et indélébile. Je lui dois déjà bien de choses essentielles ; mais je lui dois avant tout cet étrange bonheur de savoir qu'avec la fin de cette Thèse, à laquelle elle a contribué d'une façon discrète mais fondamentale, c'est aussi la nécessité de la solitude qui prend fin.

I. Première Partie

La forme du contenu

I.1. La nouveauté de la *Begriffsschrift*

I.1.1. Les recensions de la *Begriffsschrift*

Dans l'année qui suivit la parution de la *Begriffsschrift* en 1879, au moins six recensions de cet opuscule furent publiées par différents logiciens dans des revues spécialisées[26]. Ces comptes rendus, négatifs pour la plupart[27], forcèrent Frege à revenir de manière explicite sur des aspects concernant le projet général de son idéographie qui n'avaient pas trouvé leur place dans le court texte de 1879. L'intérêt de cette controverse, qui ne fut pas un véritable échange, réside ainsi dans la mise en perspective de ce qui pour Frege constituait à la fois la spécificité et la nouveauté de son projet logique dans le contexte de son émergence.

De ce contexte, Frege n'avait donné aucun aperçu ni témoigné pour lui le moindre intérêt. Certes, les noms d'Aristote, de Bacon, de Leibniz ou de Kant étaient évoqués à propos de certains aspects précis et souvent périphériques. Mais au moment de la *Begriffsschrift,* le paysage de la logique, et notamment celui des rapports entre la logique et les mathématiques dans lequel le projet de Frege s'inscrivait, n'était certainement pas le même que celui d'un siècle auparavant. C'est pourquoi tous les critiques s'accordèrent pour introduire dans le débat les formulations logiques en vigueur, dominées en grande mesure sinon par l'œuvre, du moins par le nom de George Boole. En effet, Boole est mentionné dans quatre des six recensions (seuls R. Hoppe et P. Tannery ne s'y réfèrent pas explicitement). Michaëlis, par exemple, vers la fin de son compte rendu, regrette que Frege n'ait absolument pas tenu compte des travaux existants sur le même sujet, et il ajoute immédiatement :

---

[26] Il s'agit des comptes rendus de Reinhold Hoppe, Kurd Lasswitz, Karl Michaëlis, Ernst Schröder, John Venn et Paul Tannery. Une traduction anglaise de l'ensemble de ces textes peut être trouvée en annexe à l'édition anglaise de la *Begriffsschrift* préparée par Bynum (cf. Frege, 1972, pp. 209-235). Nous traduisons donc de l'anglais, à l'exception de la recension de Schröder (1880a), que nous traduisons directement de l'allemand, en donnant l'original en note.

[27] Sur le signe de la réception de la *Begriffsschrift* par ses contemporains, on pourra voir Risto Vilkko (1998), qui examine l'ensemble de ces comptes rendus ainsi que d'autres textes de la même époque pour contester l'idée généralement admise d'une réception ouvertement défavorable.

> Je pense aux recherches de Boole, Jevons, Schröder, MacColl, et d’autres qui – en partie cherchant à résoudre exactement les mêmes problèmes que Frege, et en partie voulant établir un calcul logique – se sont occupés nécessairement de l’établissement de formules et symboles pour des opérations logiques. (Michaëlis, 1880/1972, p. 218)

Le logicien anglais John Venn, célèbre pour avoir conçu, dans le cadre de la logique booléenne, les diagrammes qui portent son nom, remarqua lui aussi cette absence, suggérant que Frege n’avait pas connaissance des formulations de Boole ni de celles de ses continuateurs. Les vertus du système frégéen ne seraient, pour lui, que les vertus de la méthode symbolique tout court déjà en œuvre dans ces formulations, et la nouveauté de la *Begriffsschrift* résiderait uniquement dans son aspect diagrammatique (combinaison des lettres et des traits horizontaux et verticaux) qui, loin de constituer un progrès par rapport aux systèmes symboliques des Booléens, s’avérait « encombrant et inconvenant » (1880/1972, p. 235).

Mais la plus remarquable parmi ces recensions était, à n’en pas douter, celui de Ernst Schröder. Non seulement à cause de la longueur du texte et le niveau de détail des remarques (une quinzaine de pages face à une moyenne de deux pour les autres recensions). Au moment de la publication de la *Begriffsschrift*, Schröder était le plus grand représentant de la logique formelle en Allemagne telle qu’elle s’était développée à partir des travaux de Boole dans le cadre de l’Algèbre symbolique anglaise. L’ouvrage *Operationskreis des Logikkalkuls*, que Schröder venait de publier en 1877, apportait des aménagements critiques à la logique booléenne, l’introduisant ainsi dans le contexte philosophique allemand, principalement dominé par le néo-kantisme. Quelques années plus tard, les trois volumes de ses *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, feraient de lui la figure centrale de la logique booléenne en Europe. Si bien que vers le début des années 1880, Schröder pouvait être vu comme le porte-parole de la logique symbolique mathématisée dans un milieu qui regardait avec suspicion le rapprochement de la logique et des mathématiques[28]. Son avis sur la *Begriffsschrift* était loin d’être insignifiant.

De manière attendue, le compte rendu de Schröder confronta de façon assez détaillée le texte de Frege au système des Booléens, à l’avantage évident de ce dernier. Dans ces pages, après avoir reconnu le domaine des investigations de Frege comme étant aussi le sien, Schröder commence par inscrire toute la problématique sous la question leibnizienne d’une

[28] Pour un aperçu de l’œuvre de Schröder et du contexte de son développement, on pourra consulter notamment les articles de Peckhaus (2004b; 2009a) et les chapitres 2 et 3 de l’ouvrage de Pulkkinen (2005).

langue universelle, que Frege avait évoquée dans la préface de son ouvrage, et que Schröder pose dans les termes suivants :

> …construire extrinsèquement tous les concepts complexes au moyen d'un petit nombre d'opérations simples, complètement déterminées et clairement classifiées, avec le nombre le plus petit possible de concepts fondamentaux (*catégories*) dont les extensions sont parfaitement délimitées. (Schröder, 1880a, p. 81)[29] [30]

Mais si Schröder reconnaît en cela la tâche de l'idéographie frégéenne, il ne croit pas pour autant que celle-ci ait atteint ce but. À son avis, malgré le titre de l'opuscule de Frege, et même peut-être à l'insu de son auteur, c'est plutôt le projet leibnizien d'un « *calculus ratiocinator* » qui y est développé. Ce qui n'a rien de méprisable en soi, si ce n'était d'avoir déjà été réalisé dans une large mesure par Boole et ses continuateurs. En effet, Schröder ne voit dans le contenu principal de la *Begriffsschrift* que la simple « transcription », par des moyens symboliques nouveaux, de la théorie booléenne des jugements. Il essaiera donc de montrer la supériorité des formulations booléennes par rapport à celles du nouvel arrivant.

Le premier défaut souligné par Schröder concerne l'articulation entre le langage logique et le langage mathématique *au niveau des signes*. En effet, Boole utilisait pour sa logique les signes usuels des mathématiques, tels que « + », « – », « 0 », « 1 » ou des lettres, dont le sens logique découlait de l'usage habituel de ces signes en Arithmétique ou en Algèbre. La notation de Frege, avec ses traits horizontaux et verticaux, avec sa distribution spatiale et ses différences typographiques, n'avait rien de tout cela. Le résultat, selon Schröder, était de cacher de façon « artificielle » « les nombreuses belles, réelles et véritables analogies, que la langue formulaire logique possède naturellement avec celle de l'arithmétique » (1880a, p. 84)[31]. Schröder ne détecte à cet égard chez Frege que la simple utilisation de lettres dans les deux cas (logique et mathématique), ce qui rend, à son avis, certainement abusif l'appel à l'Arithmétique fait dans le sous-titre de l'ouvrage[32], auquel ses prédécesseurs rendaient

---

[29] *…mittelst weniger, einfacher, völlig bestimmter und übersichtlich classificirter Operationen alle zusammengesetzteren Begriffe aus möglichst wenigen (ihrem Umfange nach unzweifelhaft begrenzten) Grundbegriffen (Kategorien) auch äusserlich aufzubauen*.

[30] NOTE SUR LES SOURCES EN LANGUE ALLEMANDE : Pour les sources en langue allemande, nous nous appuyons sur les traductions françaises existantes, en les évaluant par rapport au texte original, et les corrigeant lorsque nous le croyons nécessaire. Dans ce dernier cas, nous indiquons toujours les raisons et la nature de notre intervention. Dans le cas des sources pour lesquelles une traduction française ne serait pas disponible, nous proposons une traduction directe de l'allemand (à quelques très rares exceptions près) dans le corps du texte, et nous donnons la citation originale en note en bas de page.

[31] *...die vielen schönen, wirklichen und echten Analogien, welche die logische Formelsprache mit der arithmetischen naturgemäss besitzt.*

[32] En effet, la *Begriffsschrift* porte le sous-titre : « *Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* » (« Langage formulaire de la pensée pure construit d'après celui de l'arithmétique »). Le véritable sens de ce sous-titre est pourtant demeuré incompris par la plupart des lecteurs et interprètes de l'œuvre

manifestement plus de justice. Schröder continue ensuite par une exposition succincte des principes booléens sous la forme de ce qu'il appelait « calcul de l'identité de domaines d'une multiplicité » (*Calcul der Identität von Gebieten einer Mannigfaltigkeit*), exemplifié par le calcul des régions dans le plan, et qu'il considérait comme une discipline purement mathématique, dont le calcul logique découlait par simple « changement dans l'interprétation des symboles » (p. 84)[33]. Si bien qu'en interprétant ces domaines, exprimés par des lettres, comme des « classes » (*Classen*) d'individus constituant l'extension (*Umfang*) des concepts, les opérations sur les domaines correspondent très exactement à des opérations logiques sur des concepts. Cette conception extensionnelle de la logique néglige, selon Schröder, tout *contenu des concepts* (*Inhalt der Begriffe*). À ce sujet, Kurd Lasswitz avait déjà dénoncé, dans son compte rendu de la *Begriffsschrift*, l' « unidimensionnalité » (*Einseigtigkeit*) résultante de la séparation des concepts par rapport au contenu, propre à l'Algèbre de la logique de Boole et Schröder (Lasswitz, 1879, p. 210). Schröder répond alors en assumant cette unidimensionnalité comme une propriété motivée de cette logique, justifiée par la possibilité de déterminer parfaitement de manière extensionnelle des concepts qui n'ont absolument pas de contenu (tel le concept de « non-homme » par exemple).

Le système frégéen, pourtant, ne coïncidait pas avec l'interprétation du calcul de domaines en termes de classes, mais, comme Schröder l'avait déjà remarqué, avec son interprétation en termes de jugements. Pour le montrer, Schröder présenta très brièvement le sens de certains signes fondamentaux de la *Begriffsschrift* et réalisa la transcription de quelques propositions dans la notation booléenne, pour remarquer non seulement que cette dernière pouvait s'écrire en une seule ligne, voire en une seule formule, mais aussi que le fonctionnement proprement algébrique de cette écriture (par exemple, la possibilité de factoriser des équations) permettait de rendre manifestes, *au niveau même de l'écriture*, des propriétés logiques inhérentes à la proposition en question. Cette fertile simplicité de la notation booléenne ne se voit pas contestée d'ailleurs par l'utilisation de deux types de connecteurs (multiplication et somme) au lieu de l'unique mode de connexion frégéen, puisqu'en vertu de la loi de dualité (*Opposition*) entre la multiplication et la somme, toute formule peut être écrite à l'aide d'un seul de ces connecteurs. Vouloir opérer cette réduction à un seul connecteur (tout comme Frege l'avait fait) ne serait cependant pour Schröder que l'expression d'une « pédanterie » (p. 228). À partir de ce moment-là, les critiques de Schröder s'enchaînent : l'écriture frégéenne est encombrante et dans sa verticalité elle gaspille trop

---

de Frege, à commencer par Schröder lui-même. Aussi, pourrait-on comprendre une grande partie de nos efforts à venir comme la tentative de restituer ce véritable sens, et d'assumer l'ensemble de conséquences qu'il implique.

[33] …*ein blosser Wechsel in der Interpretation oder Deutung der Symbole*.

d'espace ; les jugements présentés dans le livre ne sont que des identités logiques qui ne revêtent pour la plupart aucun intérêt ; le choix des théorèmes semble marqué d'un grand manque de systématisation ; enfin, les répétitions et les ajouts superflus abondent dans l'ouvrage.

Pourtant, Schröder reconnait deux atouts du système frégéen. Le premier concernant les jugements particuliers (du type « quelques *A* sont quelques *B* »), qui dans le cas des formulations de Boole, pouvaient, à cause d'un défaut d'expression, être vrais même dans le cas où aucun *A* n'est *B* [34]. L'expression de la généralité de Frege, combinée avec la possibilité de sa négation (en d'autres termes, sa théorie de la quantification) résout ce problème puisque grâce à elle un jugement particulier devient équivalent à l'expression « il existe au moins un *A* qui est un *B* ». Mais Schröder ajoute immédiatement que cela ne justifie pas « ses autres déviations par rapport à la notation de Boole », car cette modification pourrait aussi avoir lieu dans la notation booléenne, comme en témoignent les travaux de Cayley ou Peirce (pp. 229-230). Le deuxième point d'intérêt de l'idéographie frégéenne souligné par Schröder touche à la notion de *fonction logique*, bien que Schröder se limite à dire que cette originalité ne lui semble pas injustifiée.

Enfin, Schröder dirige son attention vers la théorie générale des suites esquissée par Frege dans le troisième et dernier chapitre de la *Begriffsschrift*, dont le sens, qui réside pour lui dans l'abstraction atteinte au moyen de la généralisation de la notion de suite, n'a aucune valeur devant celle déterminée par des notions comme « ensemble » (*Menge*), « système », ou « multiplicité » (*Mannigfaltigkeit*) (p. 231). Schröder termine par un retour au propos général de l'ouvrage de Frege, à savoir l'exploration de la nature logique de l'Arithmétique, pour affirmer qu'il s'agit d'une tâche déjà accomplie, notamment dans les travaux d'Hermann Grassmann, et à laquelle une grande quantité de littérature a dédié ses efforts, dont il aurait été souhaitable que l'auteur de la *Begriffsschrift* tienne compte. Une bibliographie succincte, incluant Jevons, Peirce, Wundt, MacColl, Delboeuf, et Schröder lui-même, clôt ce compte rendu en guise de proposition, sinon de provocation ouverte.

I.1.2. Lingua et Calculus

Les biographes ne sont pas entièrement d'accord sur le point de savoir si Frege connaissait effectivement l'œuvre de Boole et des Booléens avant la parution de la

[34] Sur cette question, voir, par exemple, Hailperin (1986, p. 108 sqq.).

Begriffsschrift [35]. Ce qui est certain, en revanche, c'est qu'aucun témoin de cette connaissance ne peut être trouvé dans ses écrits antérieurs à 1880. À l'exception, peut-être, d'une remarque faite dans la préface de cet opuscule, que Schröder lui-même avait compris comme une objection plus ou moins directe à la logique booléenne, et où Frege affirme avoir voulu s'écarter de la compréhension du concept comme étant la « somme de ses marques caractéristiques (*Merkmale*) », suivant une similitude artificielle avec l'Arithmétique[36] (Frege, 1879/1999, p. 6). Ce qui est certain aussi, c'est qu'après l'appel massif à la logique booléenne dans les différents comptes rendus de son ouvrage, Frege s'est vu obligé d'étudier en détail ces questions afin de répondre aux critiques adressées à son projet. La réponse s'étale sur une série d'articles écrits entre 1880 et 1882.

Il n'est sans doute pas étonnant que le premier de ces textes, « La logique calculatoire de Boole et l'idéographie » (1880-81), soit une réponse longue et très détaillée au compte rendu de Schröder. La publication de ce texte fut néanmoins refusée successivement par trois revues mathématiques de l'époque, y compris celle-là même où avait paru l'article de Schröder. Frege en rédigea alors une version réduite sous le titre « Le langage formulaire logique de Boole et mon idéographie » (1882a), qui fut aussi refusée par une autre revue, ces deux textes restant finalement inédits. Un nouvel article, « Que la science justifie le recours à une idéographie » (1882b), cette fois d'une portée très générale et évitant tout traitement direct des aspects techniques de son idéographie, fut finalement accepté dans une revue de philosophie en 1882. Enfin, une conférence donnée la même année à la *Jenaische Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft*, où Frege s'était déjà exprimé au sujet des applications de la *Begriffsschrift*, fut l'occasion de revenir sur les critiques de Schröder de manière succincte mais suffisamment précise. Le texte de cette conférence fut ensuite publié sous le titre de « Sur le but de l'idéographie » (1882c).

En dépit des diverses modalités discursives et stratégies argumentatives, ces textes s'organisent tous autour du même point : dans tous les cas, Frege insiste sur le fait que, malgré certaines ressemblances superficielles, *le projet de l'idéographie est d'une nature profondément différente du projet booléen*, parce qu'informé par d'autres buts. Différence dont la nature profonde est énoncée avec une clarté surprenante, pour se laisser capturer aussitôt par celle qui sépare la langue du calcul :

---

[35] Terrell Bynum, par exemple, appuyé sur les cours pris par Frege à l'Université, suggère à plusieurs reprises que Frege ne connaissait pas ces œuvres avant l'apparition des comptes rendus de sa *Begriffsschrift* (Bynum, 1972, p. 77) ; Hans Sluga, pour sa part, soutient d'abord (1980, pp. 48-49) que Frege connaissait bien l'œuvre de Boole au moment de la préparation de son opuscule, mais semble se corriger plus tard (1987, p. 81) en affirmant qu'il l'a connu quelque peu avant l'achèvement de ce texte, probablement grâce à l'ouvrage de Schröder de 1877 *Operationskreis des Logikkalkuls*.

[36] Remarque qui pourrait d'ailleurs viser Leibniz aussi bien que Boole.

> …le reproche qui m'est adressé ignore principalement que mon but fut autre que celui de Boole. Je n'ai pas voulu donner en formules une logique abstraite, mais donner l'expression d'un contenu au moyen de signes écrits, et d'une manière plus précise et plus claire au regard que cela n'est possible au moyen des mots. En fait, je n'ai pas voulu créer seulement un *calculus ratiocinator* mais une *lingua characterica* au sens de Leibniz… (Frege, 1882c, pp. 70-71)[37]

Beaucoup a été dit sur la distinction entre la logique comme calcul et la logique comme langage à partir de ces évocations dans l'ensemble d'écrits qui ont immédiatement suivi la *Begriffsschrift*. Depuis les remarques du jeune Husserl ou la préface de Philip Jourdain à l'édition anglaise de *L'Algèbre de la logique* de Couturat par exemple, jusqu'à nos jours, en passant par la déjà célèbre lecture de Jan van Heijenoort[38], cette distinction a été souvent considérée comme la clef de voûte de l'originalité frégéenne face aux efforts de ses prédécesseurs. Mais malgré sa puissance heuristique avérée pour l'histoire et la philosophie de la logique, il se peut que la distinction entre *lingua* et *calculus* ne soit pas, en tant que telle, adéquate pour comprendre ce qui constitue la nouveauté des formulations de Frege, et leur retentissement pour la philosophie. Certes, c'est Frege lui-même qui a décidé d'ouvrir sa réponse à Schröder au moyen de ces catégories. Il suffit cependant de suivre de près le traitement qu'il en fait pour remarquer qu'il n'a jamais cessé de critiquer la séparation entre langue et calcul que cette distinction habilite. Déjà dans la préface de sa *Begriffsschrift*, Frege parlait de l'idée de Leibniz « d'une caractéristique universelle, d'un *calculus philosophicus* ou *ratiocinator* » comme d'une idée unique et indifférenciée (1879/1999, p. 7). Qui plus est, dans la réponse de Frege au compte rendu de Schröder, la question de l'intimité entre les deux dimensions du programme leibnizien est formulée explicitement dès le début, où l'on peut lire que l'idée de Leibniz d'une *lingua characterica* « se reliait selon lui de la façon la plus étroite avec celle d'un *calculus ratiocinator* » (1880-81, p. 17). À quoi Frege ajoute aussitôt : « C'est précisément dans la possibilité d'exécuter une sorte de calcul que Leibniz voyait un avantage

---

[37] Cet appel à la distinction entre un *calculus ratiocinator* et une *lingua characterica* comme instrument pour marquer ses distances avec les formulations de Boole, était aussi présent dans le premier texte de cette série de réponses, où Frege développait, en guise d'introduction, quelques aspects du double projet leibnizien. On peut trouver le même argument dans Frege (1880-81, p. 21; 1882a, p. 61) ainsi que dans (1882b, p. 68).

[38] Dans un article décisif datant de 1967, van Heijenoort (1997) soutient, à partir d'une lecture de la réponse de Frege à Schröder, que la distinction entre *lingua* et *calculus* informe une divergence fondamentale dans l'histoire de la logique, déterminée par l'universalisme inhérent au projet frégéen, face à un certain particularisme et pluralisme de la logique booléenne (donné par la multiplicité possible d'univers de discours). La dynamique entre ces deux conceptions permettrait, selon lui, de comprendre les conditions d'émergence du problème de la métamathématique au début du XX[e] siècle, notamment par la reprise de la tradition calculatoire de Boole et Schröder par Löwenheim. Pour un traitement des multiples aspects de cette thèse, voir les différents articles de J. Hintikka rassemblés dans (1997b), où le texte de van Heijenoort est reproduit en annexe. Pour une critique de certains points du texte de van Heijenoort, voir aussi Sluga (1987) et plus récemment Peckhaus (2004a). Une étude de cette question dans le contexte de la philosophie dite « continentale » peut être trouvée dans Kusch (1989).

principal d'une écriture qui compose le concept à partir de ses constituants » (p. 17), pour montrer ensuite comment, même en développant un calcul, « Leibniz y suivait très étroitement le langage » (p. 18) et « avait sûrement en tête avec cette tentative la *lingua characterica* » (p. 18). La reprise du couple *lingua-calculus* dans le dernier de ces articles est à cet égard aussi claire que possible : « …je n'ai pas voulu créer seulement un *calculus ratiocinator* mais une *lingua characterica* au sens de Leibniz, *étant bien entendu que le calcul de la déduction est à mon sens partie obligée d'une idéographie.* » (1882c, p. 71, nous soulignons). Enfin, lorsque bien plus tard Frege parlera du système de Peano, il reprendra ces catégories, qu'il avait entièrement oubliées entretemps, pour affirmer : « la logique de Boole est un *calculus ratiocinator* mais non pas une *lingua characterica* ; la logique mathématique de Peano est pour l'essentiel une *lingua characterica*, et en même temps aussi un *calculus ratiocinator* ; tandis que mon idéographie est les deux, avec le même accent » (1897, p. 242)[39].

Cette volonté constante de la part de Frege pour récuser l'opposition entre langue et calcul constitue une raison suffisante pour écarter toute tentative de comprendre le sens de son entreprise au moyen d'une distinction entre ces deux termes. À moins que cette récusation ne soit elle-même l'expression de la nouveauté essentielle de son projet. On pourrait alors se demander pourquoi Frege a tout de même décidé de mettre en avant cette alternative comme manière de présenter ce qui pour lui était l'essentiel de son invention. Or à regarder de plus près, on comprend que ce n'était pas lui, mais Schröder qui, le premier, avait présenté dans son compte rendu la double dimension du programme leibnizien comme une disjonction plus ou moins exclusive. En effet, Schröder avait dit de la *Begriffsschrift* : « Au lieu de se décider pour une « caractéristique universelle », [cet ouvrage] se décide au contraire (inconsciemment pour l'auteur, peut-être) pour le « *calculus ratiocinator* » de Leibniz » (1880a, p. 82)[40]. Il n'est dès lors pas étonnant que Frege ait repris cette distinction comme stratégie argumentative dans un texte qui se voulait entièrement une réponse à Schröder, d'autant plus que la présentation de son propre programme sous la lumière du double projet leibnizien lui permettait d'établir une continuité avec une tradition que ses critiques avaient dénoncée comme absente de ses formulations. Ce qui explique d'ailleurs que cette distinction ne se retrouve guère dans le reste de son œuvre et que les formulations leibniziennes dans leur ensemble y soient constamment placées par la suite du côté de Boole et Schröder, comme ce dont son idéographie cherche à prendre ses distances. Quant à Schröder, l'association de la

[39] Nous traduisons de l'anglais.

[40] *Statt nach der Seite der „allgemeinen Charakteristik", neigt sich dieser — dem Verfasser vielleicht selbst unbewusst — vielmehr entschieden nach der Seite des „*calculus ratiocinator*" von Leibniz…*

logique booléenne à l'idéal leibnizien d'un calcul logique était en effet déjà présente dans son *Operationskreis des Logikkalkuls*, où l'œuvre de Boole est présentée dès les premières lignes comme l'accomplissement d'un tel calcul (cf. Schröder, 1877, p. III). La reprise de cette question dans l'introduction du premier volume de ses *Vorlesungen* en 1890 montre que Schröder est devenu entretemps sensible à la question d'une langue universelle, qu'il appela « pasigraphie » et qu'il rapportait directement au projet leibnizien d'une *lingua characteristica universalis*. La réalisation de cet idéal de désignation systématique y est pourtant subordonnée à l'établissement d'un calcul des opérations comme celui des Booléens (cf. Schröder, 1890/1966, pp. 94-95). Schröder prendra plus tard le temps de s'étendre sur son idée de pasigraphie dans le cadre du Congrès International de Mathématiques en 1897, où le problème d'une *lingua characteristica* est posé essentiellement dans les mêmes termes que dans sa recension de la *Begriffsschrift*[41]. Le *calculus ratiocinator* est alors vu comme « réglant, même gouvernant, nos catégories et nos opérations fondamentales, aux lois duquel ces éléments primitifs de la pensée sont nécessairement assujettis » (Schröder, 1898, p. 52)[42]. Si bien que, malgré une certaine volonté témoignée par lui pour concevoir les rapports entre les projets d'une *lingua* et d'un *calculus*, Schröder ne parvient pas à échapper à une dualité selon laquelle le premier doit se subordonner au second[43]. C'est en tout cas bien au nom d'une alternative entre ces deux notions de *lingua* et de *calculus* que Schröder juge et critique la *Begriffsschrift.*

Et pourtant, ce n'est pas non plus Schröder qui introduit ces deux notions à proprement parler. En effet, le double projet leibnizien d'un *calculus ratiocinator* et d'une caractéristique universelle avait été présenté par Adolf Trendelenburg dans une conférence intitulée « *Ueber Leibnizens Entwurf einer allgemeinen Charakteristik* », publiée dans le troisième volume de son *Historische Beiträge zur Philosophie* en 1867[44]. Dans cet article, qui est la source

---

[41] Schröder (1898, p. 46) : « Le problème à résoudre, pour n'importe quelle branche donnée de la science, revient à : exprimer toutes les notions qu'elle comprend, adéquatement et de la manière la plus concise possible, par un minimum de notions primitives, des « catégories », par le moyen d'opérations purement logiques d'application générale. »

[42] Ce calcul est ouvertement identifié à l' « *Algebra of Relatives* » de Peirce. Quant à Frege, Schröder ne semble pas avoir changé l'idée qu'il s'en était fait lors de son compte rendu : sa tentative est vue comme « isolée », et Frege lui-même comme quelqu'un qui « sans tenir compte de rien de ce qui a été accompli par d'autres dans la même direction, a déployé d'immenses efforts pour faire ce qui avait déjà été bien mieux fait, et [qui] était ainsi caduque dès le départ, mettant ainsi au monde un enfant mort-né » (1898, pp. 60-61).

[43] Sur la question d'une langue universelle dans l'œuvre de Schröder et de son rapport à l'œuvre de Frege, on pourra consulter l'article de Peckhaus (2004b, pp. 598-602), qui tire cependant des conclusions légèrement différentes aux nôtres.

[44] Comme l'indique Peckhaus (2012b), Trendelenburg était la figure la plus importante dans la réception de Leibniz au milieu du XIXe siècle. Professeur à l'Université Friedrich Wilhelm de Berlin depuis 1837, il devient secrétaire de la Section Philosophique et Historique de l'Académie Royale des Sciences de Prusse, héritière de la *Societät der Wissenschaften* dont Leibniz avait été l'initiateur et premier président. C'est ainsi dans le cadre d'une cérémonie dédiée à Leibniz en 1856 dans cette Académie que Trendelenburg délivre sa conférence

commune de Schröder et de Frege en ce qui concerne leur rapport à Leibniz[45], Trendelenburg présente constamment le calcul et la langue caractéristique comme deux dimensions d'un projet unique. C'est ainsi qu'il parle de « *lingua characterica universalis* » et de « *calculus philosophicus* ou *calculus ratiocinator* » comme des noms d'une seule et même entreprise[46]. Certes, ces noms comportent des significations différentes : le *calculus* porte sur les dénominations ou désignations (*Bezeichnung*), tandis que la *lingua* porte sur les contenus des concepts (*den Inhalt der Begriffe und die Erfindung*) (Trendelenburg, 1867, p. 6). Mais il ne reste pas moins que le propre du projet leibnizien est, pour Trendelenburg, de fusionner de manière indissoluble ces deux significations :

> Il existe donc deux tentatives, la combinaison calculatoire et la pensée d'une désignation générale, que Leibniz a étroitement associées dans son projet. Ainsi, dans une lettre à Placcius, le savant hambourgeois, il décrit son entreprise avec les mots suivants : il faut aboutir à *characteribus et calculo,* et [dans une lettre] à Oldenburg, [il utilise] l'expression *combinatoria characteristica.*
>
> Deux orientations d'esprit, autrement rarement réunies, ont toutes deux chez Leibniz une énergie singulière, la direction des derniers fondements et la direction de l'invention et de l'application ; et ces deux directions, l'une philosophique et l'autre également pratique, se chevauchent dans l'idée audacieuse d'un calcul caractéristique. (Trendelenburg, 1867, pp. 10-11)[47]

La référence déjà évoquée au projet leibnizien dans la préface de la *Begriffsschrift*, où Frege traite de façon indifférenciée les deux dénominations en question, s'accorde parfaitement avec les idées de ce texte de Trendelenburg, auquel Frege renvoie d'ailleurs dans une note en bas de page. C'est pourquoi la distinction entre les deux directions sur laquelle

---

donnant lieu à l'article de 1867. Quant à la place de Trendelenburg dans le débat philosophique et logique allemand, on pourra aussi consulter Peckhaus (2013).

45 En effet, Schröder y renvoie par exemple dans *Operationkreis* (1877, p. VI) ou dans les *Vorlesungen* (1890/1966, pp. 38, 93), et Frege dans l'introduction de sa *Begriffsschrift* (1879/1999, p. 7)

46 Trendelenburg (1867, p. 6) : « Déjà le nom que Leibniz donne au projet révèle sa signification. Tantôt, il l'appelle *lingua characterica universalis* ou l'alphabet de la pensée humaine, tantôt au contraire, *calculus philosophicus* ou *calculus ratiocinator*. »

[*Schon die Namen, welche Leibniz dem Unternehmen giebt, kündigen seine Bedeutung an. Bald nennt er es* lingua characterica universalis *oder das Alphabet der menschlichen Gedanken, bald hingegen* calculus philosophicus *oder* calculus ratiocinator]

47 *So lagen zwei Bestrebungen vor, die rechnende Combination und der Gedanke einer allgemeinen Bezeichnung, welche Leibniz in seinem Entwurf mit einander eng verband. Daher beschreibt er in einem Briefe an Placcius, den Hamburger Gelehrten, sein Unternehmen mit den Worten: es müsse zu Stande kommen* characteribus et calculo *und an Oldenburg mit dem Ausdruck* combinatoria characteristica.

Zwei Richtungen des Geistes, sonst selten vereinigt, haben beide in Leibniz eine ungemeine Energia, die Richtung auf die letzten Gründe und die Richtung auf Erfindung und Anwendung; und beide Richtungen, jene philosophische und diese zugleich praktische, drängten sich in dem kühnen Gedanken einer allgemeinen rechnenden Charakteristik in einander.

Schröder met l'accent dans son compte rendu doit attirer l'attention, d'autant plus qu'il finira lui-même, comme nous venons de le voir, par essayer de penser leur dépendance. Cette distinction ne prend tout son sens que lorsque l'on considère le terrain sur lequel Schröder essaie de transplanter la pousse booléenne. Quant à Frege, la reprise de la distinction entre *lingua* et *calculus* dans les articles immédiatement postérieurs à la *Begriffsschrift* a, nous l'avons dit, un caractère strictement stratégique. Elle lui permet à la fois de répondre aux critiques de Schröder et de mettre ses propres travaux en rapport avec la tradition logique et philosophique. Mais plus profondément, cette distinction lui sert à identifier ce qui constitue la différence de nature entre son projet et celui des Booléens, et présenter par ce moyen ce qu'il considère être l'essence de sa propre nouveauté, puisqu'elle ouvre la voie à ce que Frege reconnaît comme point d'articulation fondamentale de son système. La distinction entre *lingua* et *calculus* ne recouvre pas la différence entre la logique de Frege et celle de Boole, mais, une fois admis que *lingua* et *calculus* doivent être intimement liés, la notion de *lingua characterica* devient pour Frege un outil pour dénoncer ce que la logique de Boole n'est pas, et rendre manifeste du même coup ce que sa propre logique est véritablement.

Qu'est-elle donc véritablement ? À la différence de Schröder, qui, dans sa définition d'une *lingua characterica universalis*[48], mettait l'accent sur l'aspect caractéristique et combinatoire de cette langue, ou à la différence des interprètes modernes, comme van Heijenoort ou Hintikka, qui mettent l'accent sur sa dimension universelle, ce que Frege entend dans l'idée d'une *lingua characterica,* c'est avant tout *la nature de langue d'une telle langue*, autrement dit, ce qui fait d'elle une langue capable de rivaliser avec, voire de remplacer, le langage naturel (ou « langage des mots »), articulé de manière phonétique et syllabique[49]. Comme Frege le dira quelques années plus tard en parlant de son idéographie : « Comme le nom l'indique, ses constituants primitifs ne sont ni des sons, ni des syllabes, mais des signes écrits ; elle est, pour utiliser une expression leibnizienne, une *lingua characterica* » (1897, p. 236). De fait, c'est dans le remplacement du langage des mots dans les textes

[48] Comme l'indique Peckhaus (2004a, p. 4, note 4), l'expression *lingua characterica universalis*, due à Trendelenburg, de qui Schröder et Frege ont extrait l'expression *lingua characterica*, ne se trouve nulle part chez Leibniz. Celui-ci parle en revanche d'une part de « lingua generalis », « lingua universalis », « lingua rationalis », « lingua philosophica », et d'autre part de « characteristica » ou « characteristica universalis » pour désigner sa théorie générale des signes.

[49] Certes, Schröder soulignera plus tard cette distinction entre une pasigraphie et la langue des mots ou parlée (1898, p. 46; 1890/1966, pp. 93-94), mais ce ne sera là qu'un trait accessoire de sa langue scientifique ; le fait que Schröder ne se sente pas obligé de s'engager dans une véritable critique du langage naturel en témoigne suffisamment.

mathématiques que l'idéographie a trouvé explicitement son but, en accord avec le problème des fondements de l'Arithmétique qui était à son origine[50]. Ainsi, en l'allégeant de la plupart des spécificités qui déterminent sa tâche, Frege ne se sert de la notion de *lingua characterica* que pour présenter ce qui est le véritable but de son idéographie, à la fois point d'articulation de toutes ses ressources et raison de sa nouveauté à l'égard d'une tradition qui ne se limite pas à Boole.

Mais au lieu de représenter ce but comme celui, générique, de la constitution d'un langage, Frege utilise des termes qui lui confèrent une précision nouvelle, à savoir la mise en place d'un système de signes déterminé par sa capacité d' « *expression d'un contenu* » (*Ausdruck eines Inhaltes*)[51]. Depuis le début jusqu'à la fin de sa production logique, Frege n'abandonnera jamais ces termes dans lesquels le but fondamental de son entreprise se laisse énoncer. Et c'est précisément cela qui ressort avec fermeté dans cette première mise en perspective forcée autour des comptes rendus de sa *Begriffsschrift.* Il suffit de regarder attentivement les quatre articles qu'il a écrits à la suite de la publication de son opuscule pour constater que la question qu'on pourrait croire accessoire de l'expression des contenus revient avec insistance, et est à chaque fois désignée comme décisive. Qui plus est, dans la table de matières du manuel de logique que Frege a à peine commencé à rédiger à cette période-là, le « contenu jugeable » occupe la première place, après l'introduction, et avant l'analyse des jugements, la définition des concepts et celle des objets (cf. 1879-91, p. 9). Si bien que, de l'avis même de Frege, la question du contenu et de son expression constitue, à n'en pas douter, le point crucial de l'idéographie qu'il venait de proposer. Ce qui ne manquait pas d'être explicite déjà dans les pages introductives de son opuscule :

[50] Dans la préface de la *Begriffsschrift*, Frege affirme : « Tandis que je visais à satisfaire cette exigence [d'absence de lacunes dans la chaîne de déductions] le plus rigoureusement, je trouvai un obstacle dans l'inadéquation de la langue ; malgré toutes les lourdeurs provenant de l'expression, plus les relations devinrent complexes, moins elle laissa atteindre l'exactitude que mon but exigeait. De ce besoin résulta l'idée de l'idéographie dont il est question ici » (1879/1999, p. 6). Frege reviendra sur cette idée dans sa réponse à Schröder, où il écrit que le langage formulaire « de l'arithmétique même ne suffit pas pour son propre domaine ; car précisément aux endroits les plus importants, lorsqu'il faut introduire de nouveaux concepts, établir de nouveaux fondements, il doit céder la place au langage des mots… » (1880-81, p. 21)

[51] Nous avons vu que c'est bien de cette manière que Frege présente ce qui le distingue de Boole, avant de faire appel à la distinction entre *lingua* et *calculus*. Juste après il dira : « Si l'on prend une vue d'ensemble du langage formulaire de Boole, on voit qu'il consiste à habiller la logique abstraite du vêtement des signes algébriques ; il n'est pas propre à l'expression d'un contenu et tel n'est pas non plus son but. Or, c'est là précisément mon intention » (1882c, p. 73). Les mêmes propos peuvent être trouvés aussi dans sa réponse à Schröder (1880-81, p. 21). Frege utilise souvent aussi « *Darstellung eines Inhaltes* » (par exemple dans 1880-81, p. 58), qui est généralement traduit par « *représentation* d'un contenu », mais qui doit être distingué de « *Vorstellung* », traduit aussi par « représentation », mais cette fois suivant l'emploi technique que Frege en fait de représentation psychologique.

> Au § 3 j'ai désigné comme *contenu conceptuel* ce qui seul m'importait. Cette explication doit par conséquent toujours être gardée à l'esprit si l'on veut comprendre correctement l'essence de mon langage formulaire. (Frege, 1879/1999, p. 6)

Que le langage soit défini par sa fonction *expressive* ne constitue certainement pas une nouveauté dans l'histoire de la pensée. C'est pourtant dans la conception du *contenu* dont le langage est censé être l'expression que réside la grande originalité frégéenne, ainsi que dans la redistribution que l'axe expression-contenu suppose dans l'organisation du débat logique où elle trouve son lieu d'émergence, et enfin, dans les ressources que cette redistribution est capable de faire apparaître et de mettre à disposition pour la pensée logique. On ne peut donc que s'étonner devant le silence dans lequel les innombrables interprètes de l'œuvre frégéenne, et les non moins innombrables philosophes et historiens de la logique, ont caché ces rapports entre expressions et contenus qui, de l'aveu même de Frege, structureront l'ensemble de sa pensée logique. C'est ainsi de la restitution de ces rapports, de leur intimité non moins que de leur place décisive, que nous aurons à nous occuper.

I.1.3. Forme vs. Contenu

Parmi les critiques de la *Begriffsschrift*, seul Kurd Lasswitz avait remarqué l'importance et la nouveauté de la question des contenus. Il n'est pas étonnant d'ailleurs qu'il ait été le seul à l'avoir accueillie favorablement. Il dénonçait ainsi l' « unidimensionnalité » (*Einseigtigkeit*) de la logique des Booléens, dans laquelle « la véritable nature et formation des concepts dans leur relation à la déduction et au jugement (qui ne devraient pas être séparés du contenu) sont insuffisamment considérées », et il concluait : « il est ainsi gratifiant de trouver dans le présent travail une tentative d'envisager ce problème d'une manière différente » (Lasswitz, 1879, p. 210).

Comme nous l'avons vu, Schröder répondait à cette critique en assumant cette unidimensionnalité comme une propriété motivée de cette logique, justifiée par la possibilité de déterminer parfaitement de manière extensionnelle des concepts qui n'ont absolument pas de contenu (tel le concept de « non-homme », par exemple). Or, cette réponse s'appuie sur l'opposition entre « extension » et « contenu », qui présuppose l'assimilation du contenu d'un concept à sa compréhension ou intension. Plus tard, dans les *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Schröder fera de cette présupposition une définition explicite. Du concept, Schröder dira :

> Son « essence » (essentia), ou, comme l'on dit également, son « *contenu* » (complexus, intent), forme justement les marques caractéristiques communes des choses désignées par le

nom commun. Ainsi, assurément son contenu « *factuel* » forme certaines de ces dernières, qu'il peut réfléchir par sa formation, tandis que son contenu « *idéal* » forme la totalité des caractéristiques communes, qui, comme telle, pourraient être connues, ce qui n'est peut-être jamais possible à imaginer entièrement.

Par opposition à ce contenu, la totalité, la classe des individus conçus ensemble sous le nom commun (distributif) sera désignée comme l'*extension* (ambitus, sphaera, extent) du concept correspondant. (Schröder, 1890/1966, p. 83)[52]

Mais pour comprendre ce qui est en jeu dans ce que Frege désigne comme le cœur de son innovation, il est nécessaire de comprendre cette assimilation du contenu à l'intension comme quelque chose de plus qu'une circonstance simplement idiomatique, donnée par le fait que l'opposition extension/intension était traditionnellement rendue en allemand par le couple de termes *Begriffsumfang*/*Begriffsinhalt* [53]. Ce qu'il faut voir derrière cette assimilation, c'est l'opération subtile de la part de Schröder, qui ne reçoit tout son sens que lorsqu'elle est comprise dans le cadre des configurations particulières que ces termes acquièrent dans les débats logiques de XIX^e^ siècle en Angleterre et en Allemagne respectivement. En effet, les logiciens anglais n'utilisent pas à cette époque le mot « contenu » pour désigner l'ensemble de qualités communes possédées par une classe d'objets et déterminant le concept correspondant à cette classe. Ils emploient de préférence le terme « *intension* », introduit par Hamilton pour nommer ce que les logiciens de Port Royal appelaient « compréhension » [54]. Pourtant, l'adoption du point de vue extensionnel de la part des Booléens, selon lequel les lois gouvernant les concepts (c'est-à-dire, les lois logiques) ne dépendent que de la classe des objets qu'ils déterminent (donc, de leur extension), suppose bien pour eux l'abandon de tout appel au contenu de ces concepts. Dans un manuscrit de l'époque immédiatement postérieure à la parution de son grand ouvrage *The Laws of Thought*, Boole semble clair sur ce point :

The laws of the signs which express our concepts of things or which express the intellectual operations and relations to which such concepts are subject are independent of the special

[52] *Sein „Wesen" (essentia), oder, wie man auch sagt, seinen „*Inhalt*" (complexus, intent) bilden eben die gemeinsamen Merkmale der mit dem Gemeinnamen bezeichneten Dinge, und zwar seinen „*faktischen*" Inhalt diejenigen der letztern, auf welche bei seiner Bildung reflektirt wurde, seinen „*idealen*" Inhalt aber die sämtlichen gemeinsamen Merkmale überhaupt, welche als solche erkannt werden könnten, die es aber vielleicht niemals vollständig auszudenken möglich.*

*Im Gegensatz zu diesem Inhalte wird die Gesamtheit, Klasse der unter dem Gemeinnamen (distributiv) zusammengefassten Individuen bezeichnet als der „*Umfang*" (ambitus, sphaera, extent) des zugehörigen Begriffes*.

[53] Les traducteurs anglais traduisent souvent « *Inhalt* » par « *intension* » dans le cas de Schröder. Cette traduction rend incompréhensibles les discussions de Schröder avec Frege non moins qu'avec Husserl.

[54] Hamilton (1870, pp. 289-290) utilisait le mot « intension », ainsi que « profondeur » (*depth*), comme synonyme de « compréhension », pour faire référence aux « quantités internes » des classes, face aux « quantités externes » constituant l'extension. C'est aussi le terme employé par Boole, par exemple dans (1856, pp. 74-76), et, en général, par tous les logiciens booléens anglais, tels Jevons ou Venn.

> meaning or content of those concepts and are dependent solely upon the general notion of *class,* which they embody. (Boole, 1856, p. 71) [55] [56]

Cette indifférence à l'égard du contenu des concepts, compris sans plus de précision comme sens (*meaning*), est pour les Booléens le résultat d'une opération d'abstraction qui constitue ce qui pour eux donne à la logique son caractère strictement « formel ». Comme l'affirme encore Boole dans son manuscrit :

> Formal Logic is conversant with things not phenomenologically as objects of perception, nor absolutely as they exist in themselves but only as they fall under the general notions formed by the mental process of abstraction […] Logic therefore is conversant with things only as they fall under the general notion of Class and under the several relations or affections of that notion. (Boole, 1856, p. 67)

Nous aurons l'occasion de montrer que si l'abstraction du contenu est un trait commun aux Booléens, la position de Boole à cet égard est bien plus complexe. Ce qui importe pour le moment, c'est que d'après cette façon particulière de tracer les frontières du territoire de la logique, que nous pouvons déjà appeler booléenne, une alternative se dessine entre la logique formelle et la prise en compte du contenu, articulée par l'opposition entre extension et contenu, puisque ce n'est qu'en étant extensionnelle que la logique peut être formelle. De ce fait, intension et contenu se trouvent tous les deux exclus de la scène de la logique formelle, et l'association entre ces deux notions devient alors possible, ne serait-ce que de manière négative. Mais si l'extension se trouve dans une opposition naturelle avec l'intension, il n'en est pas de même pour ce que Boole appelle le contenu. En effet, le rapport d'exclusion entre extension et contenu n'a lieu que par la médiation de l'abstraction, puisque ce n'est qu'en étant abstraite (c'est-à-dire, en faisant abstraction du contenu) que la logique peut être extensionnelle.

L'opposition entre extension et contenu chez Schröder empruntera pourtant d'autres chemins. Comme Schröder le dit dans son compte rendu, si la logique des classes ou extensions peut légitimement se déprendre de la question du contenu, c'est dans la mesure où

---

[55] On pourra trouver aussi l'exposition de la distinction entre intension et extension chez De Morgan (1847a, pp. 234-235), qui prend ouvertement parti pour l'extension, même et surtout lorsqu'il s'agit des concepts qui sont « contenus » dans d'autres.

[56] NOTE SUR LES SOURCES EN LANGUE ANGLAISE : En raison de l'absence de traductions françaises pour la plupart de nos sources en langue anglaise, et étant donné que l'accès à la langue anglaise est de nos jours relativement étendu, nous avons décidé de travailler directement sur les textes originaux, en fournissant en note en bas de page les traductions françaises lorsqu'elles seraient disponibles, pour les citations appartenant au corps de notre texte. C'est notamment le cas pour les deux écrits principaux de Boole *The Mathématical Analysis of Logic* (1962; 1969) et *The Laws of Thought* (1992). Ces traductions sont pourtant données uniquement à titre indicatif ; nous nous appuyons directement sur la source en discutant à partir de celles-ci les questions terminologiques lorsque cela sera nécessaire. Pour le reste, par souci de lisibilité, nous traduisons toute citation qui serait inscrite dans le contexte d'une phrase française à l'intérieur de l'un de nos paragraphes.

elle est capable de capturer effectivement des concepts qui ne peuvent pas être déterminés de manière intensionnelle. Cet argument trouvera un développement plus détaillé dans les *Vorlesungen*, où, comme on l'a vu, le contenu est divisé en effectif ou factuel (*faktischen*) et idéal. Parce que le contenu idéal peut être infini, il résulte que ses marques caractéristiques ne se laissent jamais énumérer complètement :

> …les marques caractéristiques qui sont communes aux individus tombant sous un concept (« qui appartiennent à sa catégorie »), et celles qui, dans leur connexion en constituent le contenu idéal, ne se laissent jamais énumérer complètement. Le contenu complet du concept ne se laisse jamais pleinement « décrire ». (Schröder, 1890/1966, p. 86)[57]

Le contenu complet des concepts ne se laisse donc jamais capturer dans ces cas. Ceci entraîne qu'une logique de l'intension n'est capable de déterminer de manière directe qu'une partie nécessairement restreinte des concepts (ses « marques distinctives caractéristiques ou essentielles »), déterminant les autres de manière seulement médiate et indirecte. De telle sorte que sa portée ne saurait excéder celle des concepts qui sont fournis par le langage courant, restant incapable de déterminer d'elle-même tous ceux qui ne le sont pas. Ces derniers ne peuvent alors être déterminés que par le moyen des « lois de la conséquence nécessaire » (comme dans le cas de « non-homme » par exemple), ce qui présuppose la logique extensionnelle. C'est pourquoi Schröder affirme que vouloir construire la logique à partir du contenu des concepts (*Begriffsinhalt*) revient à vouloir construire le toit avant la maison[58]. Cette circonstance est suffisante pour sanctionner la prééminence de la logique extensionnelle sur toute logique intensionnelle, et par ce moyen, celle de la logique formelle sur toute logique du contenu. Tant que la logique aura à établir l'ensemble des déterminations conceptuelles, elle devra embrasser la formalité, ce qui voudra dire abandonner du même coup toute prise sur le contenu, moins à cause de la nature abstraite de l'extension que du caractère intensionnel du contenu :

> …tous les concepts les plus indispensables devraient demeurer exclus d'une Logique du contenu et elle n'aurait ainsi aucun droit à comprendre avec ses lois toute notre pensée, ou à posséder la généralité requise. (…) Et la question « Logique du contenu ou logique de l'extension ? » aurait ainsi dû être déclarée hors propos, si, entre autres choses, elle [la logique du contenu] ne s'était vue considérablement restreinte par l'exigence de n'avoir jamais à former que des classes de sujets déterminées *conceptuellement*, et si elle ne s'était, en réaction contre une telle restriction, portée chaque fois comme par nécessité au-delà de

[57] *...lassen die Merkmale, welche den unter einen Begriff fallenden („zu seiner Kategorie gehörigen") Individuen „gemeinsam" sind, und welche in ihrer Verbindung dessen* idealen *Inhalt ausmachen, sich überhaupt nie vollständig aufzählen. Der volle Inhalt des Begriffs lässt nie sich fertig „beschreiben".*

[58] Schröder (1890/1966, p. 99).

> ses limites et – au prix de l'inconséquence ! [De façon conséquente, par exemple, la Logique du contenu ne devrait surtout pas pouvoir former des jugements particuliers – à moins qu'il ne s'agisse de jugements identiques ou « insignifiants » […]]. (Schröder, 1890/1966, p. 100)[59]

Apparemment insignifiante au milieu de l'ensemble des aménagements d'ordre fondamentalement technique apportés par Schröder à la logique booléenne, l'identification entre contenu et intension évoquée dans sa recension de la *Begriffsschrift*, et cristallisée dans l'introduction des *Vorlesungen,* comporte une dimension philosophique non négligeable. Par cette identification, l'opposition entre extension et contenu peut maintenant faire l'économie de l'argument de l'abstraction qui, malgré les efforts de Boole pour faire de l'abstraction une opération formelle, pouvait toujours être perçu comme un argument de nature essentiellement psychologique[60]. Si de tels arguments pouvaient être considérés comme secondaires dans le contexte des débats des algébristes anglais autour de Boole, ils ne le sont certainement pas dans l'Allemagne où Schröder essaie d'importer la logique booléenne. En effet, la question de la logique dans le débat académique allemand de la seconde moitié du XIXe siècle s'inscrivait entièrement dans le cadre des discussions philosophiques déterminées de manière essentielle par les œuvres de Kant et de Hegel. Ces deux œuvres majeures de l'Idéalisme allemand avaient défini le projet fondamental de la philosophie comme celui de l'édification d'une logique capable à la fois de contenir et de dépasser la logique syllogistique ordinaire (appelée « logique générale » par Kant et « logique d'entendement » par Hegel) afin de pouvoir assumer les problèmes constitutifs de la métaphysique. La question du contenu prenait alors une place centrale, car, tant pour Kant comme pour Hegel, la possibilité de l'élaboration d'une telle logique (« transcendantale » pour l'un, « spéculative » ou « Dialectique » pour l'autre) se mesurait, d'une manière ou d'une autre, à sa capacité à prendre en charge le contenu dont la logique ordinaire, purement formelle, faisait nécessairement abstraction. Ainsi, pour Kant :

> *La logique générale fait abstraction* […] *de tout contenu de la connaissance*, c'est-à-dire de toute relation de celle-ci à l'objet, et elle considère uniquement la forme logique dans la relation que les connaissances entretiennent entre elles, c'est-à-dire la forme de la pensée en

---

[59] *Von einer Logik des Inhaltes müssten (darnach also) ganz unentbehrliche Begriffe ausgeschlossen bleiben und hätte solche keinen Anspruch darauf, mit ihren Gesetzen unser ganzes Denken zu umfassen, oder die erforderliche Allgemeinheit zu besitzen. […] Und die Frage: ob Logik des Inhalts oder des Umfangs? müsste darnach sogar für irrelevant erklärt werden, hätte sich nicht jene durch die Anforderung, u. a. immer nur* begrifflich *bestimmte Subjektklassen zu bilden, ganz übermässig eingeschränkt gesehen, und wäre sie nicht in Reaktion gegen solche Einengung notgedrungen allemal über ihre Grenzen hinaus getreten, und — inkonsequent geworden! [Konsequenterweise könnte z. B. die Logik des Inhalts partikulare Urteile überhaupt nicht bilden — es sei denn als identische oder „nichtssagende“ Urteile […]].*

[60] Sur l'abstraction comme opération, voir Boole (1854, p. 37; 1856, pp. 79-80). Ricketts (2010, p. 196) souligne l'association de l'abstraction et du psychologisme aux yeux de Frege.

> général. Toutefois, parce qu'il y a des intuitions pures aussi bien qu'empiriques (comme le fait apparaître l'Esthétique transcendantale), il pourrait fort bien se trouver aussi une différence entre la pensée pure et la pensée empirique des objets. Dans ce cas, *il y aurait une logique où l'on ne fait pas abstraction de tout contenu de la connaissance* ; car celle qui contiendrait simplement les règles de la pensée pure d'un objet exclurait toutes les connaissances qui seraient de contenu empirique. (Kant, 2006, p. 146, nous soulignons)

La philosophie de Hegel peut sur ce point être comprise comme une radicalisation critique du projet kantien. Pour Hegel aussi, une différence essentielle entre la logique spéculative et la logique habituelle ou d'entendement « suivant laquelle le concept est considéré simplement comme une forme en soi sans contenu de notre pensée subjective » (Hegel, 1986, p. 190), c'est que dans la logique spéculative « le *contenu* et la *forme* ne sont absolument pas isolés » (p. 591).

Aussi, après la mort de Hegel en 1831, une discussion s'est-elle installée dans les cercles intellectuels allemands autour de la nature métaphysique ainsi que des fondements scientifiques de la logique telle qu'elle avait été envisagée par ces grands projets philosophiques. L'un des principaux protagonistes en fut précisément Adolf Trendelenburg, source commune de Schröder et de Frege, qui inaugura la discussion dans un article de 1842 intitulé « *Zur Geschichte von Hegel's Logik und dialektischer Methode* ». Le nom de « question logique », figurant dans le sous-titre de l'article, désignera, avec celui de « réforme de la logique », de manière plus ou moins ouverte le territoire problématique où cette discussion aura lieu[61]. Dans ses écrits, Trendelenburg opposa la logique formelle liée à Herbart, à la conception hégélienne de la logique. Par « logique formelle », Trendelenburg entendait la logique qui, suivant la distinction entre forme et contenu établie par la philosophie kantienne, écartait de son domaine tout contenu de pensée. Une telle logique, appuyée sur la combinaison de concepts déjà donnés, et sur les principes formels d'identité et de contradiction, ne lui semblait pourtant pas capable de rendre compte des ressorts essentiels de la pensée, qui demeurent après tout intimement liés au contenu des concepts. Mais la dialectique hégélienne, où la fusion de la forme et du contenu entraînait l'identification de la logique avec la métaphysique, ne pouvait pas, à son avis, fournir une solution. D'une part, elle lestait la logique d'un « projet titanique », incapable d'être supporté par les « frêles moyens » dont la logique dispose. D'autre part, la méthode dialectique de Hegel ne pouvait que très difficilement être considérée une méthode scientifique. Ainsi Trendelenburg écrit-il :

[61] Sur la « question logique », voir Peckhaus (1999; 2004a) et Vilkko (2009), sur lesquels nous nous appuyons fondamentalement ici. On pourra aussi consulter Pulkkinen (2005) et le livre plus récent de Lejeune (2013).

> …la logique formelle est essentielle mais n'est pas suffisante pour accomplir la tâche de la logique. La dialectique de Hegel, quant à elle, promet plus – en réalité le plus grand qui peut être imaginé – mais s'avère impossible. (cité dans Vilkko, 2009, p. 217)[62]

Cette double critique ouvrait la voie à la recherche d'une réforme de la logique qui la rende capable de surmonter, par des méthodes scientifiquement fondées, l'écart présupposé par la logique formelle entre l'être et la pensée, l'objet et sa représentation conceptuelle, sans aller jusqu'à l'identification absolue avec la métaphysique. Par là, le débat logique dans l'Allemagne post-hégélienne, inauguré par Trendelenburg et animé par des philosophes et des logiciens tels que Prantl, Gruppe, Lotze ou Windelband, *se trouvait essentiellement articulé autour de l'alternative entre forme et contenu*, et orienté par la volonté d'établir une logique du contenu *face à l'abstraction* propre à la logique formelle, sans cesser pour autant d'être justiciable des principes de scientificité. Le mépris de l'abstraction de la part des protagonistes de la question logique allemande transparaît clairement dans la réaction du philosophe et logicien Moritz Wilhelm Drobisch, défenseur de la logique formelle, directement visé par les critiques de Trendelenburg. En effet, Drobisch écrit :

> La logique formelle *ne* présuppose *pas* la pensée pure et ne tente pas d'analyser ou d'expliquer les formes de la pensée *in abstracto*… La logique formelle ne reconnait pas des formes *sans* contenu. (cité dans Vilkko, 2009, p. 218)

Enfin, parmi les effets les plus remarquables de cette façon de poser le problème du rapport entre logique et philosophie, il faut signaler le fait que le langage, dans sa fonction expressive ainsi que dans sa nature dynamique, fut naturellement appelé au devant de la scène logique comme moyen de poursuivre une telle recherche par des sentiers capables de contourner les écueils identifiés[63].

C'est donc dans le contexte de ce débat que le glissement opéré par Schröder concernant l'opposition entre extension et contenu prend tout son sens. En effet, l'opération de Schröder, selon laquelle le contenu est identifié à l'intension face à une logique formelle extensive, peut être comprise comme une manière d'interpréter l'Algèbre de la logique anglaise dans les termes d'un débat qui n'en tenait véritablement pas compte. Mais ce faisant, Schröder intervenait dans ce débat de manière subtile, réduisant l'alternative entre forme et contenu à celle de l'extension et de l'intension, sans faire appel à l'abstraction

[62] Nous traduisons de l'anglais tous les passages extraits de ce texte de Vilkko.

[63] Comme l'affirme l'historien de la logique Volker Peckhaus : « A main point of criticism held in common by these authors was their rejection of the doctrine that the laws of formal logic are independent of the content of the sentences or judgments involved. The aim of most critiques was to model the dynamic aspect of reasoning, i.e. reasoning as a process. This led to a focus on language as the expression of thought. The dynamics of language was considered to be manifest in its variability and its historical development. » (Peckhaus, 2009a, pp. 15-16).

comme élément déterminant dans l'opposition ente forme et contenu[64]. Par là, la nature avant tout philosophique du débat logique allemand héritier des grands projets de l'Idéalisme devenait susceptible d'un traitement principalement technique, associé à la capacité de la conception extensionnelle de la logique pour déterminer des plages de conceptualité plus vastes que celles délimitées par le langage dans le cas d'une logique du contenu, qui ne comptait que sur des déterminations intensionnelles. Schröder croit ainsi apporter des arguments décisifs contre toute logique du contenu au nom de la scientificité qui avait poussé la logique à quitter les territoires hégéliens, tout en reléguant à l'arrière-plan l'argument de l'abstraction constitutive de la logique extensionnelle, cible privilégiée des partisans de la reforme logique allemande.

C'est sous cette lumière que doit être comprise d'ailleurs la réaction contre Schröder, et contre sa tentative d'introduction de l'Algèbre logique anglaise, de la part de celui qui sera l'un des protagonistes de la scène philosophique contemporaine en train de naître. Comme on le sait, dans la dernière décennie du XIXe siècle la primauté de l'extensionalité sur le contenu défendue par Schröder fut sévèrement critiquée par le jeune Edmund Husserl. Dans une série d'articles publiés entre 1891 et 1893, incluant une très longue récession critique des *Vorlesungen* de Schröder[65], Husserl dénonçait la prétention du calcul de classes booléen à totaliser le domaine du logique, entendu comme celui des pures conséquences. La question du contenu était encore centrale. Parmi d'autres arguments avancés, Husserl conteste l'affirmation selon laquelle les contenus idéaux définis par Schröder ne se laissent pas saisir à cause de l'impossibilité de les représenter entièrement de manière effective, puisque ces contenus peuvent être saisis de la même façon que toutes les classes, même infinies, c'est-à-dire, sous la forme de représentations symboliques (1891b, p. 68). Aussi, au moyen de

---

[64] Certes, la notion d'abstraction n'est pas éradiquée des considérations philosophiques de Schröder, développées fondamentalement dans l'introduction de ses *Vorlesungen* (cf. notamment 1890/1966, pp. 58-63). Mais elle est soigneusement écartée du débat concernant l'alternative entre la forme et le contenu, repris sous celle de l'extension et l'intension/contenu (1890/1966, pp. 82-83). Dans ce contexte, Schröder affirme, par exemple : « Étant donné que grâce à la figure de la « *liaison* » (combinaison) et de la « *séparation* » (séparation), ainsi que notamment – comme modification de cette dernière – sous la forme de la « négation » (négation), nous est également donné la capacité de construire médiatement des concepts à partir des éléments habituels de représentation ou marques caractéristiques dont nous parvenons à l'acquisition par l'abstraction, il en résulte que réflexion et abstraction ne doivent pas être retenues comme les uniques sources du développement du concept » (Schröder, 1890/1966, p. 98).

[*Zuzugeben ist wol, dass wir in Gestalt der „*Verknüpfung*" (Kombination) und „*Trennung*" (Separation) und — als eine Modifikation der letztern — insbesondre in Form der „Verneinung“ (Negation), von durch Abstraktion gewonnenen Vorstellungselementen oder Merkmalen auch das Vermögen besitzen, Begriffe mittelbar zu konstruiren, sodass Reflexion und Abstraktion nicht als die einzigen Quellen der Begriffsentwickelung hingestellt werden dürfen*.]

[65] Les articles en question sont : la « Récension du livre de Schröder : Leçons sur l'algèbre de la logique » (1891a) ; « Le calcul de la conséquence et la logique du contenu » (1891b) et son supplément (1891c) ; « La « Logique élémentaire » de A. Voigt et mes exposés sur la logique du calcul logique » (1893a) ; la réponse de Voigt à l'article précédent, sous le titre « Sur la logique du contenu » (1983) ; et enfin, la réponse de Husserl à cette réponse de Voigt (1893b). Tous ces articles sont recueillis et traduits en français dans Husserl (1975).

symboles représentant des ensembles de marques distinctives, une logique intensionnelle devient susceptible d'un traitement algorithmique à la manière du calcul des classes, par simple changement d'interprétation du « calcul identique » ou des multiplicités schröderien (c'est-à-dire, du calcul de l'identité de domaines d'une multiplicité). Selon l'exemple donné par Husserl, au jugement portant sur des classes « Tous les hommes sont mortels » se substitue le jugement « Le concept idéal de l'homme inclut celui de la mortalité », portant sur des concepts, mais entièrement équivalent au premier quant au reste. Et en général, à la forme « Tous les A sont des B » se substitue « la forme du pur jugement de contenu : 'Dans la mesure où quelque chose est un A, c'est un B.' » qui peut, d'après Husserl, être considérée comme une relation entre les contenus de concepts (1891b, pp. 84-85). Par là, toutes les opérations du calcul booléen peuvent être directement exercées sur les contenus des concepts ainsi définis, ce que Husserl réalise effectivement dans l'un de ces articles, pour obtenir exactement les mêmes résultats propres au calcul des pures conséquences, sans avoir besoin de passer par le détour des classes.

En exhibant les nouvelles règles d'interprétation du « calcul identique » pour les contenus des concepts, Husserl prétend prouver la fausseté de l'argument partagé par les Booléens qui postule la primauté de la logique extensionnelle, ainsi que la prétention d'indépendance de l'extension par rapport au contenu qui en découle. Mais, ces réfutations mises à part, rien n'est obtenu, selon Husserl, qui soit d'intérêt pour une véritable logique du contenu, puisque le calcul du contenu qui en est le résultat est pratiquement inutile :

> Effectivement, des contenus de concept (le mot étant entendu au sens habituel) peuvent être considérés comme ensembles de marques distinctives, et par conséquent être comparés à la manière des multiplicités. L'ensemble total des marques distinctives de l'un peut être actuellement inclus par celui d'un second, ou bien exclu par lui, etc. De cette façon, l'application du calcul identique devient possible, et il se forme un algorithme de relations de contenus. Mais, à vrai dire, il est assez inutile. Il ne constituerait ni directement ni indirectement ce que l'on appelle un calcul logique, c'est-à-dire un calcul qui embrasse et commande le domaine total des pures conséquences. Son domaine ne comprend que des jugements analytiques au sens de Kant, donc des jugements catégoriques dans lesquels le concept du prédicat est contenu actuellement dans le concept du sujet. (Husserl, 1891b, p. 65)

D'où vient cette inutilité ? Certainement pas de la logique du contenu en tant que telle, qui pour Husserl constitue et doit constituer la raison d'être de la logique tout court. Le problème ne peut venir que de sa réduction algorithmique au calcul identique. Autrement dit, de sa formalisation. Le contenu a beau être formalisé sous le mode d'un calcul sans qu'il y ait besoin d'avoir recours à l'extension, une véritable logique du contenu n'est pas atteinte pour autant. La raison en est que cette réduction ne peut être effectuée qu'à condition de comprendre le contenu idéal d'un concept comme sa définition en termes de marques distinctives, c'est-à-dire, comme intension. Et si Husserl avait accepté de le faire dans le seul but de développer ses objections à la logique de l'extension sur le terrain de celle-ci, il n'a pas moins exprimé dès le départ l'illégitime d'une telle identification entre contenu et intension :

> Que la détermination d'un concept idéal présuppose la logique déductive, et même la logique tout entière, cela n'est pas douteux. Mais où est la logique, je le demande encore une fois, qui a entendu par « définition » une telle détermination de concept et qui se l'est fixée pour but ? […] Le coup porté [par Schröder] contre la logique du contenu est par conséquent un coup d'épée dans l'eau. Et il l'est parce que la logique du contenu qui est combattue ici est une invention forgée par l'auteur. Comment a-t-il pu parvenir à identifier cette fiction d'une logique des contenus idéaux de concepts à toute la logique qui a existé jusqu'à maintenant ? Cela reste pour moi complètement un mystère. (Husserl, 1891a, pp. 26-27)

Si bien que, si le contenu idéal d'un concept peut être formalisé, c'est moins une vertu de la formalisation qu'un défaut de la manière de comprendre ce contenu. D'après la perspective de Husserl, l'exclusivité de l'alliance établie par les Booléens entre formalisation et extension se trouve brisée puisque, comme il l'a montré, une formalisation de l'intension est aussi possible ; mais cela n'entraîne nullement une nouvelle alliance de la logique formelle avec le contenu. Bien au contraire, l'écart s'approfondit : la logique formelle ne s'éloigne pas du contenu parce qu'extensionnelle, *mais parce que formelle*.

Ce qui fait problème n'est pourtant pas la forme de cette formalité ; Husserl prend bien soin de souligner que ses objections ne portent pas sur le « calcul identique des simples multiplicités » en tant que tel, dont l'utilité en mathématiques, et notamment en Théorie des fonctions, devait bientôt faire ses preuves. Le problème se trouve plutôt dans le fait que l'interprétation de ce calcul en termes logiques ne donne, et ne peut donner, qu'une simple technique, habile mais aveugle, incapable de rendre compte des questions essentielles quant à la nature de sa propre logicité. Une telle technique, dont les résultats sont d'ailleurs très pauvres, ne peut dans le meilleur des cas que servir à des fins logiques, et « en tant qu'elle est non pas une logique nouvelle, mais une méthode logique spéciale, elle appartient totalement à la logique du contenu. » (Husserl, 1891a, p. 30). C'est pourquoi toute réduction de la logique à la méthode purement formelle du calcul ne peut qu'être ruineuse pour la philosophie. Une telle volonté de réduction relève, selon Husserl, de la méconnaissance de la différence entre langage et algorithme. Ce qui laisse entendre que l'essence de la véritable logique du contenu réside quelque part à l'intérieur du langage où le calcul n'a pas de prise. Mais dans le contexte de ces discussions, et à ce stade-là de sa pensée, Husserl ne fournit guère d'indication sur les déterminations que l'espace d'une telle logique pourrait avoir. Seuls sont évoqués l'œuvre propre du langage dans l'expression symbolique des phénomènes psychiques, et l'art correspondant à la désignation (*Bezeichung*) linguistique dans la grammaire (1891a, p. 31).

Si Husserl est arrivé à rapprocher l'extension du contenu, compris comme intension, il semble opposer à plusieurs reprises la forme à un contenu qui serait plus essentiel[66]. On comprend ainsi le sens de sa démarche : l'adoption de la logique formelle proposée par les Booléens comporte des enjeux philosophiques derrière l'alternative prétendument technique entre extension et intension sous laquelle Schröder a voulu les déguiser. Par la critique de l'opposition entre extension et contenu, Husserl cherche à faire ressortir la véritable nature philosophique de l'alternative, qui se joue entre une forme purement calculatoire et algorithmique et un contenu idéal exprimé dans le langage. La position de Husserl devant cette alternative ne laisse aucun doute, mais son véritable coup de force consiste à dénoncer la tentative de réduction schröderienne orchestrée au moyen de l'interprétation du débat logique allemand dans les termes de l'Algèbre logique anglaise. C'est en ce sens, par exemple, que Husserl s'oppose à l'utilisation que Schröder fait de l'argument de Lotze concernant l'extension définie des concepts sans contenu : « l'auteur confond sa terminologie propre avec celle d'autres logiciens, qui, comme Lotze, ne désignent pas comme concepts les concepts négatifs (non-homme par exemple) » (1891a, p. 28).

La polémique entre Husserl et Schröder (à laquelle participe aussi le schröderien Andreas Voigt) se présente comme l'alternative entre une logique de l'extension et une logique du contenu, dans la possibilité incertaine d'une réduction du contenu à l'intension. Or, remise en perspective historique, il apparaît que cette polémique ne constitue rien d'autre que l'état avancé de la « question logique » dans le débat philosophique allemand. En effet, l'introduction de la logique booléenne par Schröder dans ce contexte, avec l'ensemble de remaniements qu'il a opéré en vue de sa plus grande consistance, a sans doute entraîné un renouvellement réel de ce débat par l'introduction d'éléments nouveaux à l'appui d'une logique formelle, massivement méprisée par les protagonistes de cette discussion. Face à ce défi lancé à la tradition allemande en quête d'une identité post-hégélienne, ou plus généralement post-idéaliste, nous voyons le jeune Husserl commencer à préparer le terrain pour un renouvellement de la pensée du contenu par la position d'un « contenu idéal », dont il

[66] Par exemple, dans (1891a, p. 16) : « Déjà la diversité des méthodes algorithmiques, qui prennent dans leur contenu et dans leur forme des voies tout à fait différentes pour résoudre les mêmes problèmes – il suffit de comparer les méthodes de Boole, de Jevons, de Schröder, entre autres –, nous montre que dans les formules algorithmiques nous ne voyons pas se refléter le canon des activités de connaissance consistant à tirer des conséquences. » ; et aussi dans (1891b, p. 66) : « Schröder a sans doute cherché à prouver qu'une "logique des contenus idéaux" renferme un cercle, et il pense même atteindre par là toute la logique du contenu jusqu'à aujourd'hui, depuis Aristote jusqu'à Sigwart, puisqu'il l'identifie à sa fiction d'une logique des contenus idéaux. ».

est encore trop tôt pour connaître les déterminations, hormis le fait qu'il s'exprime dans un langage inaccessible à l'algorithme. Mais en dépit des moyens nouveaux qu'elle trouve de part et d'autre pour se développer, il n'en reste pas moins que la « question logique » continue à être articulée autour de l'alternative forme-contenu que celle de l'extension et de l'intension cherche avec un succès douteux à recouvrir. La « forme » extensionnelle du booléen qu'est Schröder a beau ne pas être la forme visée par Herbart, le « contenu idéal » non intensionnel du jeune Husserl a beau annoncer quelque chose de nouveau par rapport à la tradition logico-philosophique allemande, il ne reste pas moins que l'une continue à pouvoir être pensée par opposition à l'autre, et que l'axe dessiné entre ces deux pôles détermine une alternative entre deux conceptions de la logique qui continue à ordonner le territoire des questions philosophiques que la logique soulève.

C'est donc bien dans ce contexte que s'explique, comme nous l'avons anticipé, la distinction effectuée par Schröder entre *calculus ratiocinator* et *lingua characterica*. La séparation des deux tâches que Trendelenburg présentait comme étant indissociables vient à l'appui de la thèse selon laquelle une logique formelle, construite au moyen du calcul des extensions et en principe indépendante de tout contenu, serait possible en dehors d'une logique du contenu qui, à cause de son caractère intensionnel, serait par nature incapable de s'intégrer dans un calcul. Puisque le contenu est associé à l'idée d'une langue caractéristique, et l'extension au calcul, la séparation entre *lingua* et *calculus* reproduit ainsi le partage que contenu et forme établissent dans le domaine logique.

On ne sera pas étonné, au demeurant, si les remarques de Husserl s'accordent avec celles de Schröder sur ce dernier point, fût-ce pour prendre des partis opposés. En effet, interpellé par Voigt au sujet de Frege, Husserl affirme que, en dépit d'un certain « parallélisme » entre les formules de Frege et celles du calcul booléen, « l'écriture conceptuelle de Frege n'est absolument pas un calcul au sens prégnant du terme », mais « veut être avant tout une *characteristica universalis* » (1893b, p. 122). Husserl fait référence ici aux articles de Frege autour de la publication de la *Begriffsschrift*, qu'il dit avoir devant lui au moment de répondre à Voigt. Contrairement à ce que ce dernier suggère, Husserl avait connaissance de ces écrits de Frege avant cette polémique, mais pas avant l'écriture de la recension des *Vorlesungen* ni de son article sur le calcul de la conséquence et la logique du contenu. Frege les lui avait envoyés lui-même précisément en réponse à l'envoi de la part de Husserl de ces deux articles et de sa *Philosophie de l'Arithmétique* [67]. Dans sa lettre de réponse à Frege, datant de juillet 1891, Husserl célèbre tout particulièrement la distinction

[67] Il est bien connu que Frege rédigea une longue recension critique du premier livre de Husserl (Frege, 1894). Pour une analyse de ce débat, voir English (2002) et Benoist (2002).

frégéenne entre *calculus ratiocinator* et *lingua characterica* comme étant un point de convergence entre les deux philosophes, et rappelle qu'il avait lui-même établi une distinction entre calcul et langage dans son article sur Schröder (cf. Frege, 1976, p. 100). En effet, Husserl avait dédié une longue page à cette question dans cette recension, où il affirmait :

> …les deux concepts sont fondamentalement différents. Le langage n'est pas une méthode pour déduire des conséquences d'une façon systématique et symbolique, le calcul n'est pas une méthode pour extérioriser d'une manière systématique et symbolique les phénomènes psychiques. (Husserl, 1891a, p. 31)

L'accord entre les formulations de Husserl et celles de Schröder à propos de cette double dissociation (forme-contenu, calcul-langue) témoigne suffisamment du fait que les deux logiciens-philosophes représentent, à ce stade de leur pensée, la phase tardive de la « question logique » en Allemagne, selon laquelle, peut-être malgré les desseins de Trendelenburg lui-même, une alternative se dessine entre une logique formelle, dont les audaces d'ordre calculatoire ne suffisent pas à effacer les regrets laissés par la soustraction du contenu, et une logique du contenu, cachée derrière les mystères d'un langage qui se place toujours au-delà des filets algorithmiques à partir desquelles pourrait commencer à se tisser un calcul.

C'est cette configuration problématique singulière que l'idéographie de Frege viendra mettre profondément en question.

I.1.4. Frege et le contenu formel

Si l'incompréhension dont témoignent la plupart des comptes rendus de la *Begriffsschrift* peut être considérée comme un signe de l'apparition de quelque chose de nouveau sur la scène logique allemande de la fin du XIX[e] siècle, le fait que Schröder place les efforts de Frege du côté d'un *calculus ratiocinator* avec la même évidence et conviction que Husserl les place du côté d'une *lingua characterica* en est sans doute un autre. À quoi il faudrait aussi ajouter la place que le projet frégéen occupe dans la polémique Voigt-Husserl. L'idéographie de Frege y est évoquée lorsque Voigt cherche à se défendre des accusations de Husserl concernant l'originalité d'un calcul logique du contenu. Voigt rappelle alors que le fait que l'Algèbre logique puisse « être elle aussi une logique du contenu, cela a été montré pour la première fois, autant que je sache, par M. Frege » (Voigt, 1983, p. 116). Husserl répond alors qu'il est incapable de trouver dans les écrits de Frege la moindre allusion aux idées dont il est question, et il ajoute :

> Il est d'ailleurs significatif que M. Frege ne puisse pas lui-même se défendre d'une manière suffisamment décisive contre la confusion des efforts d'un Boole, d'un Schröder, entre

> autres, pour établir un calcul, avec ses propres efforts pour établir une écriture conceptuelle… (Husserl, 1893b, p. 122)

Étrange situation où le schröderien Voigt affirme que les réalisations de Frege ne sont pas différentes de celles de Husserl, et où Husserl maintient que, loin de se rapprocher de ses propres idées, elles ont du mal à marquer ses distances par rapport à celles de Boole et de Schröder. Qui plus est, malgré l'intérêt et la sympathie que Husserl témoigne pour les travaux de Frege, il se montre aussi incapable que Schröder d'y reconnaître une pensée du contenu digne de ce nom[68].

Si bien que la question du contenu dans la *Begriffsschrift*, que Frege avait signalée dès le début comme devant toujours être gardée à l'esprit pour comprendre l'essence de son système, est finalement passée entièrement inaperçue d'un côté comme de l'autre de la scène logique et philosophique où elle fit apparition, tant de ceux qui y voyaient un calcul que de ceux qui y voyaient une langue, tant des partisans d'une logique formelle que des partisans d'une logique du contenu, les uns et les autres ayant par ailleurs du mal à placer ces efforts de façon univoque dans leur propre terrain ou dans celui des adversaires. Tout se passe comme si dans le débat tardif sur la question logique en Allemagne, les formulations de Frege n'arrivaient pas à trouver leur place véritable.

La raison de cette mécompréhension se trouve dans la conception radicalement nouvelle du contenu que Frege introduit dans le débat logique et philosophique de son époque. En effet, ce que Frege appelle contenu semble résister à toute identification simple à l'intérieur des places établies par la configuration conceptuelle de ce débat. D'une part, Frege avait écarté toute confusion du contenu avec l'intension d'un concept. Aussi, à propos du contenu conceptuel dans la préface de son opuscule, il avait affirmé :

> Tout effort pour élaborer une similitude artificielle [avec le langage formulaire arithmétique] en comprenant un concept comme étant la somme de ses marques caractéristiques est cependant resté absolument hors de ma pensée. (Frege, 1879/1999, p. 6)

Comme on l'a vu, cette phrase n'était pas passée inaperçue de Schröder, qui l'évoque dans son compte rendu comme la seule référence directe à la logique booléenne. Cette volonté explicite de Frege de maintenir la notion de contenu aussi loin que possible de l'intension du

---

[68] De façon symétrique, dans son compte rendu de la *Philosophie de l'arithmétique*, Frege critiquera avec sévérité le recours de Husserl à l'abstraction dans la tentative de ce dernier de donner un fondement à l'Arithmétique. Pour une étude de la question de l'abstraction dans le débat entre Frege et Husserl, voir Brisart (2002a). Cette critique de l'abstraction a été constamment rapportée à la question de l'antipsychologisme ; à la lumière de notre perspective sur la critique frégéenne de l'abstraction booléenne, il se peut que la discussion Frege-Husserl soit liée plus fondamentalement à la question d'une logique du contenu. Dans cette direction, Benoist (2002) essaie d'associer la question de l'abstraction au problème de la nature des concepts chez Frege et Husserl.

concept, déterminée par ses marques caractéristiques, explique pourquoi Schröder, pour qui contenu et intension devaient être des synonymes, se montrait incapable de reconnaître dans la *Begriffsschrift* la moindre inclinaison dans la direction d'une *lingua characterica*, ni le moindre développement concernant le contenu.

D'autre part, la notion de contenu proposée par Frege est loin de pouvoir être placée dans un rapport d'opposition ou d'étrangeté à l'égard de la forme ou du formel, que l'on entende par formel la possibilité d'effectuer des opérations de détermination des concepts en fonction uniquement des éléments tombant sous ces concepts, selon la conception extensionnelle du formel que Schröder met surtout en avant, ou que l'on entende par là une méthode de déduction symbolique déterminée par la « conversion et substitution réglées des signes par des signes », selon la conception algorithmique et calculatoire dénoncée par Husserl (1891a, pp. 31-32). En effet, bien que le rapport entre les contenus conceptuels et l'extensionalité ne soit pas chez Frege un rapport simple[69], et qu'une grande partie de l'originalité de son approche tienne à la façon dont il transforme le traitement classique des extensions ou classes, la notion du contenu mise en avance par Frege est déterminée de façon intime et nécessaire par l'extensionalité. Au point même où, comme on le verra, l'une des définitions que Frege donne du contenu jugeable à cette époque se confond avec le critère d'extensionalité. Et malgré le fait que Frege dénonce parfois une vision de la logique qui serait exclusivement algorithmique[70], il ne fait pas de doute que son idéographie se présente comme une méthode déductive appuyée sur des règles de transformation portant sur des signes qui expriment des contenus, à tel point qu'elle est aujourd'hui largement reconnue comme étant le premier véritable système formel[71]. On comprend dès lors que Husserl puisse affirmer que Frege avait du mal à éviter la confusion de ses efforts avec ceux des Booléens.

Mais malgré la mésentente profonde témoignée à son égard par ses contemporains, l'œuvre de Frege n'est certainement pas coupée de la tradition logique et philosophique de son époque[72]. Contre toute logique abstraite, la prise en compte du contenu par des moyens

[69] Sur la nature problématique de l'extensionalité chez Frege, voir par exemple de Rouilhan (1988, pp. 52-55).

[70] Par exemple, dans la remarque suivante : « Boole présuppose comme tout prêts des concepts logiquement parfaits, et donc comme accomplie la partie la plus difficile du travail, et il peut ensuite à partir d'hypothèses données tirer ses conclusions à l'aide d'un procédé mécanique de calcul. Stanley Jevons a même inventé une machine à cet effet. […] Le langage formulaire de Boole ne représente qu'une partie de notre pensée ; l'ensemble ne pourra jamais être exécuté à l'aide d'une machine, ni remplacé par une activité purement mécanique. » (1880-81, p. 45).

[71] Pour une discussion critique de cette question, voir Sullivan (2004, § 2.3).

[72] Hans Sluga a sans doute raison de contester l'affirmation de Dummett selon laquelle il faut envisager les formulations de Frege comme étant « nées du cerveau de Frege, sans être fertilisées par des influences externes » (Sluga, 1980, p. 5). Pour une très bonne reconstitution de ces influences, et notamment de Leibniz, Kant, Trendelenburg et Lotze, nous renvoyons donc à son ouvrage déjà célèbre, *Gottlob Frege, The arguments of the philosophers* (1980).

scientifiquement rigoureux faisait partie, comme nous l'avons mentionné, des préoccupations centrales du débat post-idéaliste allemand, où Frege puise constamment des arguments. Tout comme la place capitale accordée dans cette recherche à une réflexion sur le langage, et sur le rôle déterminant du système des signes. C'est précisément en développant ces pistes que Frege arrivera à proposer une conception nouvelle du contenu, notamment par élaboration d'une critique profonde de l'organisation et du fonctionnement du langage.

Les travaux de Trendelenburg sont décisifs à cet égard, au point que la plupart des justifications et des critiques d'ordre philosophique mises en avant par Frege à l'époque de la *Begriffsschrift* se laissent facilement retrouver dans l'œuvre de Trendelenburg. À commencer par l'idée d'une idéographie, voire son nom[73]. C'est sur la voie de Trendelenburg (mais aussi d'autres philosophes de la « question logique », tels Gruppe ou Prantl[74]) que Frege s'engage ainsi dans sa réflexion critique sur le langage et les signes comme élément fondamental de la recherche logique. Les différents arguments de Trendelenburg sur cette question peuvent être reconnus dans l'article « Que la science justifie le recours à une idéographie » (1882b), où Frege se livre à une réflexion sur la place des signes et du langage pour la pensée. Ce texte s'ouvre sur le besoin, pour les sciences abstraites, « d'un moyen d'expression[75] qui permette à la fois de prévenir les erreurs d'interprétation et d'empêcher les fautes de raisonnement » (p. 63). On reconnaitra dans cette double condition la double tâche donnée respectivement par une *lingua* et un *calculus*, articulés ensemble comme aspects d'un même problème, que Frege pose immédiatement en termes de langage et de signes, puisque ces erreurs et ces fautes « ont leur cause dans l'imperfection du langage. Car il est bien certain que nous avons besoin de signes sensibles pour penser. » (p. 63). Le signe est alors présenté comme un moyen à travers lequel l'homme, à la différence des animaux, se rend présent ce qui est absent ou inaccessible, et crée un « foyer stable » pour d'autres représentations, « usant du sensible lui-même pour nous libérer de sa contrainte » (p. 64). De ce mécanisme de représentation sémiotique, la pensée conceptuelle dépend entièrement :

> En donnant le même signe à des choses différentes quoique semblables, on ne désigne plus à proprement parler la chose singulière mais ce qui est commun : le concept. Et c'est en le désignant qu'on prend possession du concept ; puisqu'il ne peut être objet d'intuition, il a

[73] En effet, l'idée d'une idéographie (*Begriffsschrift*) était énoncée par Trendelenburg dans les premières pages de son article sur Leibniz (1867, pp. 3-4). Comme le signale Benmakhlouf (2002, p. 24), Frege aurait également pu prendre le nom de « *Begriffsschrift* » à Erdmann.

[74] Voir Peckaus (2009a)

[75] L'original allemand ne parle pas d'un « moyen d'expression », mais seulement d'un « moyen ». Nous verrons que cette interprétation de la traductrice française n'est pas injuste pour autant.

> besoin d'un représentant intuitif qui nous le manifeste. Ainsi le sensible ouvre-t-il le monde de ce qui échappe aux sens. (Frege, 1882b, p. 64)

Quant aux différents supports sensibles du signe, le signe visible l'emporte sur le signe audible à l'égard de l'expression des contenus conceptuels, puisque celui-ci demeure trop près des conditions corporelles et psychiques, au point de perdre son indépendance. Le signe visible est doué, en revanche, d'une précision, d'une durabilité et d'une immutabilité qui le rapproche de la nature du concept et de la rigueur cherchée par la science. Qui plus est, les figures s'inscrivent dans un espace qui peut lui-même assumer des fonctions signifiantes, voire les élargir à cause de sa multidimensionnalité, puisque « la simple disposition en une série linéaire ne correspond nullement à la multiplicité des rapports logiques suivant lesquels les pensées sont liées les unes aux autres » (p. 67).

Ce sont ces considérations concernant les signes celles qui habilitent une critique du langage naturel, dans la mesure où, en tant que système de signes, celui-ci peut être interrogé dans sa capacité d'expression de contenus de nature conceptuelle. C'est ainsi que, suivant toujours l'inspiration de Trendelenburg, dans les textes de l'époque de la *Begriffsschrift*, l'imperfection du « langage des mots » est dénoncée au nom de l'incapacité de donner une solution satisfaisante au problème de l'expression de contenus. Cette incapacité tient, de manière générale, à l'ambiguïté profonde et généralisée que le langage naturel induit dans chaque domaine auquel il donne accès, de sorte qu'il « laisse beaucoup à deviner, si facilement que ce soit » (1880-81, p. 21). Les objections de Frege touchent plusieurs aspects. D'abord, le langage, surtout sous sa forme orale, est doué d'une sorte de fluidité. Il est par là fortement instable et mutable, ce qui lui permet d'évoluer et de multiplier ses ressources, mais qui l'éloigne de l'idéal scientifique de rigidité et indéformabilité. Ensuite, le langage s'avère inefficace pour assurer la « condition primordiale » de correction pour la pensée, à savoir l'univocité, c'est-à-dire, le fait qu'une expression renvoie à un et seulement un contenu. Cette faute entraîne des confusions dangereuses pour la logique, comme celle qui se produit entre le concept et les objets tombant sous lui (selon l'exemple de Frege, l'expression « le cheval » peut désigner à la fois un individu ou l'espèce entière). Elle concerne aussi le processus de déduction à partir du moment où « les formes où s'exprime la déduction sont si diverses, si lâches, si mal définies, que des hypothèses peuvent être introduites sans qu'on y prenne garde » (1882b, p. 65). Qui plus est, le « langage des mots » subit constamment des détournements du renvoi des expressions aux contenus, de telle sorte que le rapport entre expressions et contenus cesse d'être immédiat. Ce détournement tient aux faiblesses précédentes, qui ont lieu principalement dans le langage oral, le rapprochant ainsi des représentations subjectives. Mais on aurait tort de croire que tout langage écrit surmonte le problème. Dans le cas de l'écriture des mots, le détournement ne fait que s'approfondir, puisqu'elle « est constituée de signes de signes et non de signes de choses. » (1880-81, p. 21).

Mais, de façon diagonale à ces objections d'ordre plus ou moins général, Frege tisse comme en filigrane une critique du langage plus profonde, au nom toujours de la logique comme expression d'un contenu, qui va orienter de manière effective sa recherche. Lorsque l'on rassemble certains éléments dispersés que Frege dispose ici et là, et on les recompose suivant le problème auquel ils répondent, on peut voir que cette autre critique porte sur *l'inadéquation entre l'articulation des langues naturelles et la structure de la conceptualité en jeu dans le déploiement des processus déductifs*.

Cette inadéquation semble être double, elle comporte une dimension *articulatoire* et une dimension *déductive*. Quant à la première, la disparité a lieu à toutes les strates de la langue. *Phonétique*, d'abord, puisque l'articulation des mots, déterminée principalement par ses composants phoniques, diffère de l'articulation des concepts au moyen de ses constituants[76]. C'est pourquoi on a beau se confier à l'écriture du langage naturel pour gagner en stabilité et précision sur le langage parlé, en accord avec la prééminence du signe visible sur le signe audible, on n'aura pas moins raté l'essentiel, puisque cette écriture ne fait que calquer le mode d'articulation propre à l'oralité, et avec lui, « les limites et déterminations que le langage parlé reçoit du sens de l'ouïe auquel il est directement asservi » (1882b, p. 67). Une écriture conceptuelle doit ainsi, suivant l'idée de Leibniz, « *peindre non pas les paroles mais les pensées* » (1880-81, p. 21). Au niveau *morphologique*, ensuite, comme le montre l'exemple choisi par Frege :

> La composition des mots ne correspond qu'imparfaitement à la structure des concepts. La formation des mots « *Berggipfel* » et « *Baumriese* »[77] est similaire, bien que la relation logique des constituants diffère de l'un à l'autre. Ainsi cette dernière ne sera pas exprimée du tout, mais devra être devinée. Le langage ne fait souvent que suggérer par des caractères inessentiels ou par des images ce qu'une idéographie doit exprimer intégralement. (Frege, 1880-81, p. 21)

Au niveau *syntaxique*, enfin, comme il ressort de la célèbre critique frégéenne de la distinction linguistique fondamentale entre sujet et prédicat. En effet, d'une part cette distinction introduit des différences logiquement superflues, soit entre des phrases, comme dans le cas de « les Grecs ont vaincu les Perses à Platée » et « les Perses ont été vaincus par

[76] Frege parle du projet de Leibniz « d'une écriture qui compose le concept à partir de ses constituants, et non le mot à partir de ses composants phoniques » (1880-81, p. 17). Le caractère non phonétique et non syllabique de l'idéographie sera rappelé plus tard dans l'article sur l'écriture de Peano (1897, p. 236). Comme nous le verrons, cet aspect s'avérera capital pour le destin de l'entreprise frégéenne.

[77] En allemand, « sommet de la montagne » et « arbre géant », respectivement.

les Grecs à Platée » (1879/1999, pp. 16-17), soit entre les constituants de la phrase, en attribuant, sous la forme du sujet, une « place spéciale » à l'un des composants logiques de la proposition suivant des exigences extralogiques, telle la prise en compte de la compréhension de l'auditeur dans un contexte. D'où résulte d'après Frege une complexité inutile, donnée par l'indifférence du contenu à l'égard de cette distinction syntaxique, et témoignée par le fait que l'on peut concevoir une langue où les propositions du type « Archimède périt lors de la prise de Syracuse » s'exprimeraient comme « la mort violente d'Archimède lors de la prise de Syracuse est un fait ». Dans une telle langue,

> …il est aussi possible de distinguer […] le sujet du prédicat, mais alors le sujet contient tout le contenu, et le prédicat a pour seul but de le présenter comme jugement. *Une telle langue n'aurait qu'un seul prédicat pour tous les jugements, à savoir : 'est un fait'.* On voit qu'il n'y est pas question de sujet et prédicat dans le sens ordinaire. (Frege, 1879/1999, p. 17)

Mais d'autre part, ces différences logiquement superflues trouvent leur contrepartie dans une indifférence qui laisse échapper des propriétés logiques essentielles. Ainsi, les deux propositions « le nombre 20 est représentable comme la somme de quatre nombres au carré » et « chaque nombre entier positif est représentable comme la somme de quatre nombres au carré » attribuent la même place de sujet à des concepts qui ne sont pas « du même rang » (1879/1999, p. 31).

Quant à la dimension déductive, la divergence entre le langage naturel et la structure conceptuelle tient à l'inexistence dans le langage de moyens déductifs clairs et bien définis. Le raisonnement, l'inférence, la déduction, ont bien lieu dans le langage courant, mais leurs formes d'expression y sont « si diverses, si lâches, si mal définies » (p. 65), qu'aucun processus déductif ne peut être identifié avec rigueur. La grammaire reste à cet égard largement insuffisante. Les suites inférentielles se trouvent dès lors hantées par des lacunes, par où des hypothèses s'infiltrent de façon inaperçue et compromettent la portée des conclusions. Ainsi que l'affirme Frege :

> Le langage n'offre pas un lot bien délimité de formes de déduction et, à s'en tenir à la forme linguistique, il n'est pas possible de distinguer une séquence sans lacune de celle qui omet des propositions intermédiaires. On peut même dire que le premier cas ne se produit à peu près jamais dans le langage usuel ; le sentiment de la langue y répugne : à vouloir ne rien omettre il faudrait imposer une insupportable prolixité. Presque toujours le langage ne donne pas, sinon allusivement, les rapports logiques ; il les laisse deviner sans les exprimer proprement. (Frege, 1882b, p. 65)

La disparité entre le langage naturel et la structure des concepts relève donc de deux types de problèmes, à savoir la divergence dans l'articulation des expressions (et cela aux différentes strates de la langue) et l'absence d'expressions précisément déterminées prenant en charge certaines fonctions spécifiques (notamment la fonction déductive ou inférentielle). On reconnaitra à nouveau ici les tâches respectives d'une *lingua* et d'un *calculus*. Mais on voit alors l'importance, non seulement d'envisager la question du contenu en logique, mais de le faire, comme Frege y insiste infatigablement, à partir de leur *expression*. Car grâce à une approche en termes d' « expression des contenus », *les deux problèmes peuvent être placés et traités ensemble sur un même plan, celui de l'expression*. Si Frege bouleverse la configuration conceptuelle dans laquelle la logique de son temps se reconnaissait, c'est avant tout dans la mesure où *l'axe expression-contenu qui se dessine sous ses formulations brise la dualité classique que le contenu maintenait avec la forme*, et que la distinction entre langue et calcul venait typiquement recouvrir, puisque les problèmes d'une langue et d'un calcul se jouent tous les deux sur un même plan d'expression qui se rapporte tout entier à des contenus. Qui plus est, cette approche permettra à Frege d'établir des déterminations précises et concrètes concernant les problèmes généraux posés par une logique aspirant à être à la fois une *lingua* et un *calculus*. Autrement dit, cette approche est douée d'une *efficacité* certaine. Elle lui permet, par exemple, de localiser les expressions manquantes dans un langage pour que celui-ci puisse assumer des fonctions logiques ; ou d'éliminer des expressions superflues dont la fonction logique serait déjà exercée par d'autres. Les effets d'une telle analyse sur la construction d'une idéographie sont immédiats, car chaque localisation peut devenir la source d'un outil logique nouveau (la détermination rigoureuse de l'implication logique, ou l'élimination de la distinction ente sujet et prédicat, par exemple).

On pourrait dès lors se demander pourquoi il y aurait besoin d'un nouveau langage, d'une nouvelle écriture. Ne suffirait-il pas d'ajouter des expressions nouvelles, ou de remanier les existantes, pour combler les défauts logiques des langues naturelles ? C'est, de fait, la solution que la philosophie semble avoir offerte et acceptée au long de son histoire, et même les efforts de Boole pourraient être considérés de cette manière. Mais la question pour Frege est plus complexe, car si langue et calcul sont à envisager comme deux dimensions indissociables du même problème, *il faut que les règles d'inférence et l'articulation entre les éléments constitutifs maintiennent un rapport interne*, dans une interdépendance telle que l'inférence soit l'effet même des articulations à travers lesquelles un contenu est exprimé. Tant que cela ne sera pas le cas, les règles logiques devront être imposées de l'extérieur. C'est, de fait, ce qui se passe si la logique s'appuie sur la simple écriture du langage oral, dont l'articulation diffère, comme on a vu, de l'articulation des contenus conceptuels :

> Les règles logiques sont alors appliquées de l'extérieur, comme un canon, puisque la simple écriture des mots [*Wortschrift*] de la langue parlée n'offre, de par sa nature, aucune garantie logique. […] L'expérience, l'intuition spatiale nous gardent de nombreuses fautes. À l'inverse, les règles logiques offrent une faible protection, comme l'attestent les exemples

> que l'on peut emprunter à des domaines où les moyens de vérification commencent à se dérober. Ces règles n'ont pas pu préserver de l'erreur quelques grands philosophes ; et elles ont été également impuissantes à prévenir les fautes dans le domaine des mathématiques supérieures, du fait qu'elles sont toujours extérieures au contenu. (Frege, 1882b, pp. 65-66)

Si à la différence de Boole, le changement d'univers ou la variation de sens des expressions est impossible chez Frege, c'est moins à cause de la position ontologique ou métaphysique (dogmatique en tout cas) d'un univers unique, total et fixe, comme le croit van Heijenoort[78], que de cette inhérence entre l'expression et le contenu qu'elle exprime, ainsi que de l'intimité que cette inhérence entraîne entre les différentes dimensions de l'expression. La multiplicité d'interprétations que la logique de Boole habilite n'est que la marque de l'extériorité dans laquelle elle se tient par rapport au contenu. Une telle logique ne peut que se voir réduite, d'ailleurs, à un simple canon, à un instrument normatif dont l'effectivité ne peut jamais être garantie. Mais une fois assumé à l'intérieur de la logique le problème du contenu, ou plus précisément le problème du rapport entre les expressions et les contenus, celui-ci ne saurait plus se résoudre au moyen de l'interprétation comme pour les Booléens. Ce qui fait que, loin de toute idée de canon et de tout exercice d'interprétation, *la logique se confonde, sous la plume de Frege, avec la structure même de l'expression des contenus*.

Ce dernier point est décisif dans l'histoire du rapport entre logique et philosophie, puisque, par la première fois peut-être, la logique est envisagée de l'intérieur comme quelque chose de plus qu'un instrument (organon, canon ou méthode). Certes, la dimension philosophique (ontologique ou métaphysique) et non instrumentale de la logique avait déjà été expressément postulée par les grands représentants de l'Idéalisme allemand, si bien que par l'exigence de la prise en compte des contenus, ainsi que de l'intériorité entre ces contenus et les formes de leur expression, le projet logique de Frege renoue avec deux des enjeux principaux de ce projet philosophique. Mais tandis Kant et Hegel ne pouvaient lester la logique du poids de la philosophie qu'à condition de refuser la logique ordinaire au nom d'une logique supérieure, transcendantale ou spéculative selon le cas, Frege semble vouloir accepter le défi *au niveau même de la logique formelle*. Cependant, son projet ne se distingue pas moins à cet égard des autres systèmes logiques particuliers, comme celui de Boole ou de Schröder, pour qui la logique ne se rapportait à des énoncés philosophiques que par la recherche d'une justification ou d'une légitimation externe. De tels usages ne sont pas, bien entendu, absents des écrits frégéens, comme le prouvent les références à Leibniz ou la reprise

---

[78] Van Heijenoort (1997, p. 234) : « For Frege it cannot be a question of changing universes. One could not even say that he restricts himself to *one* universe. His universe is *the* universe. Not necessarily the physical universe, of course, because for Frege some objects are not physical. Frege's universe consists of all that there is, and it is fixed. ».

constante des idées de Trendelenburg déjà mentionnées. Mais si les formulations de Frege comportent une dimension essentiellement philosophique, ce n'est pas tant à cause des réflexions philosophiques dont elles pourraient être entourées, que parce que, plus profondément, des problèmes fondamentaux dans lesquels la philosophie s'était reconnue, telles la prise en compte des contenus ou l'intériorité entre contenu et forme, ou en général la construction d'un système de conceptualité capable de résister aux contingences de l'empirique, trouvent dans les limites du domaine spécifique et restreint de la logique ordinaire et formelle une façon nouvelle de se penser[79].

La question du contenu, que Frege n'a cessé de mettre en avant en tant que pierre angulaire de sa logique naissante, constitue ainsi en même temps l'élément décisif à partir duquel s'articule cette portée philosophique souvent remarquée dans son œuvre[80]. C'est par son moyen que celle-ci renoue avec la tradition philosophique de l'Idéalisme allemand, sans oublier la place dans cette filiation des philosophes et logiciens de « la question logique », et notamment de Trendelenburg. C'est aussi par la question du contenu que l'œuvre de Frege communique, avec les premiers pas du jeune Husserl, et avec lui, de ce qui sera l'une des grandes traditions philosophiques de notre contemporanéité[81]. C'est aussi par elle, comme on arrivera à le suggérer après une longue recherche, que les formulations frégéennes pourront se rapporter aux réflexions d'ordre linguistiques qui se trouvent à la base d'aventures philosophiques contemporaines d'un signe différent.

Mais le mérite de Frege ne se limite pas à avoir forcé de manière efficace l'introduction de la question du contenu dans une logique qui ne semblait pas avoir de place pour elle. L'essentiel de sa portée philosophique tient au fait d'avoir su transformer la question du contenu de telle sorte que cette introduction et cette efficacité puissent avoir lieu. La position de la question des contenus en termes de leur expression constitue la clef de voute de cette transformation. Par là, un lien intrinsèque se tisse entre la logique et le langage, plus précis que celui qui se dessinait déjà chez les logiciens et philosophes allemands de la réforme logique, parce que capable de fournir des méthodes et instruments d'analyse nouveaux. Grâce

[79] Frege n'a pas manqué de souligner, non sans modestie, cette dimension philosophique de son œuvre depuis le début de ses recherches logiques : « Si c'est une tâche de la philosophie de rompre la domination du mot sur l'esprit humain en dévoilant les illusions qui souvent naissent presqu'inévitablement de l'utilisation de la langue pour l'expression de relations entre des concepts, et en libérant la pensée de ce dont elle est atteinte uniquement par la nature du moyen d'expression linguistique, alors mon idéographie, développée plus avant pour ces buts, pourra devenir un outil utile aux philosophes. » (Frege, 1879/1999, p. 8)

[80] Pour un traitement de cette question voir notamment Sluga (1987, p. 90), qui rapporte cette dimension philosophique à l'expression des contenus. De façon plus générale, on pourra aussi se référer à Sluga (1980) ainsi qu'à Benmakhlouf (1997).

[81] Sur les rapports entre Frege et Husserl, on pourra consulter Mohanty (1984), Dummett (1991), Føllesdal (1994), et surtout l'ouvrage collectif édité par Brisart (2002), dont les différents articles explorent en détail et de manière critique les multiples questions soulevées par les études précédentes.

au rapprochement entre logique et langage sous les exigences du rapport expression-contenu, Frege non seulement établit des orientations nouvelles pour la logique, mais offre du même coup un critère nouveau pour l'analyse du langage. Lorsque Frege en appelle à la question de la langue sous la forme d'une *lingua characterica*, pour la rapporter au problème de l'expression des contenus, c'est moins pour déterminer celui-ci à partir de celle-là, que pour établir que la question centrale de la langue, et plus généralement des systèmes de signes, du point de vue de leur constitution formelle (articulatoire et déductive), se joue dans la question de l'*expression des contenus*, autrement dit, dans la capacité pour une langue de se donner les moyens intrinsèques de rendre compte des contenus qu'elle est censée véhiculer, sans les présupposer comme une donnée extérieure à elle-même. Des perspectives nouvelles s'ouvrent ainsi pour l'étude du langage et des signes. Et même si Frege n'a pas développé cette voie au-delà de ce qui était exigé par les buts logiques qui étaient les siens, cela a pourtant suffi pour proposer des principes théoriques touchant au langage et aux signes dans leur généralité, comme en témoigne, entre autres mais de façon privilégiée, sa célèbre distinction entre sens et référence. Qui plus est, le problème de l'expression des contenus a ouvert et délimité un terrain où logique et langage peuvent reconnaitre de manière divergente mais simultanée quelque chose comme leurs propres essences, d'une manière telle que dans cette simultanéité divergente la réflexion philosophique trouve les moyens de déployer l'essentiel de sa tâche.

I.2. L’architecture de l’idéographie

I.2.1. Les formes du contenu

Nous avons vu comment l’approche des problèmes logiques dans la perspective déterminée par l’axe expression-contenu permettait de placer les problèmes d’une *lingua* et d’un *calculus* sur le seul plan des expressions (*Ausdrücke, Darstellungen*). Il n’en reste pas moins que ce plan demeure entièrement déterminé par les contenus dont il est censé fournir les expressions, et c’est en fonction de ces contenus qu’il doit être jugé. En effet, l’articulation des langues naturelles n’est critiquable à tous les niveaux qu’au nom de l’organisation des contenus : c’est le contenu qui « doit être rendu de façon plus précise qu’à l’aide du langage des mots » (Frege, 1880-81, p. 21). Et si « la composition des mots ne correspond qu’imparfaitement à la structure des concepts » (p. 21), cette structure est le résultat d’une décomposition du contenu jugeable au service de laquelle doit être mise l’articulation des expressions ; comme le dit Frege : « nous décomposons […] le contenu jugeable pour obtenir le concept. Sans doute faut-il que l’expression d’un contenu jugeable, pour pouvoir être ainsi décomposée, soit en elle-même articulée » (p. 26). De même, les formes déductives de la langue capturées par des règles logiques « offrent une faible protection » si elles sont « extérieures au contenu » (1882b, p. 66). Si bien que la position du contenu, dans sa place à la fois souveraine et énigmatique, organise et mesure les différentes dimensions de la structure expressive. C’est pourquoi, lors d’établir les exigences qui doivent commander la mise en place d’une écriture conceptuelle, Frege affirme qu’une véritable idéographie

> …doit avoir des expressions simples pour les liaisons logiques, et ces expressions réduites en nombre au nécessaire doivent être faciles et sûres à manier. Ces formes doivent pouvoir être associées à un contenu de la manière la plus intime. (Frege, 1882b, p. 68)

Mais qu’est-ce qu’au fond que ce contenu autour duquel s’organise la pensée de Frege au moment de son émergence ? En quoi consiste ce contenu, formel sans être abstrait, extensionnel sans cesser d’être intensionnel, habilitant une langue autant qu’un calcul, logique autant que linguistique, exprimable quoique rétif à l'emprise des mots ? Comment définir ce contenu qui doit être rendu responsable de l'essentiel de la nouveauté du projet frégéen, de la source de son efficacité, de sa singularité, ainsi que de la raison de sa portée philosophique ? La réponse à ces questions implique l'exploration des multiples dimensions de la construction frégéenne qui résultent de l'efficacité par laquelle cette notion de contenu se définit.

Voici la définition que Frege donne du contenu conceptuel dans la *Begriffsschrift* :

> …les contenus de deux jugements peuvent différer de deux manières : selon la première, les conclusions qui peuvent être tirées à partir de l'un d'eux en relation avec d'autres déterminés découlent toujours du second en relation avec ces mêmes autres jugements ; selon la deuxième, ceci n'est pas le cas. Les deux propositions : « les Grecs ont vaincu les Perses à Platée » et « les Perses ont été vaincus par les Grecs à Platée » diffèrent suivant la première manière. Or, bien que l'on puisse reconnaître une petite différence de sens, la similarité l'emporte. J'appelle alors *contenu conceptuel,* cette partie du contenu qui est *la même* dans les deux. Comme *seul celui-ci* a une signification pour l'idéographie, elle n'a pas besoin de faire de distinction entre des propositions qui ont le même contenu conceptuel. (Frege, 1879/1999, pp. 16-17)

Ce qu'il faut remarquer d'abord dans cette définition, c'est le fait que ce n'est pas la notion de contenu qui se voit ici déterminée, mais seulement celle de contenu *conceptuel*. Cette dernière n'est alors envisagée que comme une « partie » d'un contenu posé au préalable et dont Frege dit seulement qu'il est susceptible de différenciation. Que Frege ne sente pas le besoin de donner d'autres précisions quant à cette notion générique de contenu est sans doute un signe du fait qu'il se sert, comme il a été dit, du sens que cette notion hérite de la tradition philosophique allemande récente dont Frege l'extrait. C'est alors, en en détachant la notion plus spécifique de contenu conceptuel, que Frege entreprendra l'élaboration d'une conception logique du contenu qui transformera profondément son sens.

Or, ce que montre ensuite cette définition (la seule définition explicite du contenu conceptuel que Frege donne, d'ailleurs), c'est que si le contenu peut, comme nous l'avons vu, être lui aussi formel (parce qu'extensionnel, parce que calculatoire), sa définition en termes de contenu conceptuel est « formelle » aussi, dans un autre sens. En effet, ce contenu n'est pas défini par quelque chose qui serait sa substance ou sa matière ou une quelconque propriété intrinsèque, non moins que par des facultés selon lesquelles il serait saisi, telles la sensibilité ou l'intuition. Le contenu conceptuel n'est défini que par une certaine indifférence ou invariabilité : il est ce qui ne diffère pas dans des jugements ou propositions différents. Son essence même est déterminée par un principe purement formel, si par formel on entend qu'il n'est commandé que par la pure forme du même dans ce qui varie, quels que soient ce

« même » et ce « ce qui varie ». Le contenu conceptuel n'est donc en principe, et par principe, que le nom de l'insistance d'une répétition au sein même de ce qui diffère.

Ce qui diffère, Frege l'a dit déjà, c'est le contenu générique dont le contenu conceptuel n'est qu'une partie. Mais tout le problème est que cet espace de différences qu'est le contenu ne peut être déterminé directement. Il n'est que le présupposé à la fois spéculatif et méthodologique de la démarche logique telle que Frege est en train de l'instituer. Cet espace de différences sur fond duquel le contenu conceptuel est à dégager est uniquement capturable au niveau des expressions (jugements, propositions, phrases, énoncés…) qui l'expriment, et hors desquelles aucun contenu ne peut exister positivement. Si bien que, au moins en principe, c'est sur l'ensemble des expressions d'un langage que le principe formel d'invariabilité opérera le découpage qui informera l'organisation des contenus conceptuels.

La partition du domaine expressif établissant les unités de contenu conceptuel pourrait, théoriquement, être opérée selon des critères multiples (quantitatifs, fonctionnels, figuratifs…) et à plusieurs niveaux (phonologique ou graphologique, morphologique, syntaxique…). Or, comme il est dit dans la définition que nous venons d'évoquer, la clé de l'opération frégéenne consiste à définir ce partage en fonction uniquement des effets sur les conclusions possibles des expressions, lorsqu'elles sont mises en relation avec d'autres expressions. Autrement dit, *en fonction de l'inférence ou de la déduction*. Si « les Grecs ont vaincu les Perses à Platée » et « les Perses ont été vaincus par les Grecs à Platée » peuvent être considérés comme deux expressions différentes d'un seul contenu conceptuel, ou plus précisément, si à partir de ces deux expressions positivement données on peut envisager l'existence de quelque chose comme un contenu conceptuel unique, c'est dans la mesure où, à l'intérieur d'un contexte expressif donné, tout ce qui peut être déduit de l'une de ces expressions peut également l'être de l'autre. Le principe de la déduction ou de l'inférence guide ainsi la détermination du contenu conceptuel dont l'idéographie a pour tâche de fournir le système d'expression. Ce qui, comme on l'a vu, était dit dès la préface de la *Begriffsschrift* : « …j'ai renoncé à exprimer tout ce qui est sans signification pour la *déduction*. […] j'ai désigné comme *contenu conceptuel* ce qui seul m'importait » (Frege, 1879/1999, p. 6).

Or ce principe de distribution ou partage définit en même temps un niveau expressif privilégié où la partition aura lieu. Et cela parce que la déduction est un principe qui opère typiquement entre des expressions articulées sous la forme de jugements ou propositions. Ce qui explique que le contenu conceptuel ne soit défini qu'une fois établie la distinction, dans le plan des contenus, entre des contenus jugeables et non-jugeables : « Tout contenu ne peut pas devenir un jugement […], par exemple l'idée 'maison' ne le peut pas. C'est pourquoi nous distinguons les contenus *jugeables* des contenus *non-jugeables* » (1879/1999, p. 16). Sans doute les contenus des expressions du type « maison », d'un niveau d'articulation inférieur à celui des jugements, peuvent eux aussi être déterminés en fonction de leurs effets sur la déduction. Ainsi « baraque » ou « demeure » pourraient bien, selon les cas, être considérées comme des expressions d'un même contenu conceptuel. Mais pour que cette détermination soit opérée par la déduction comme principe de partage, il est strictement nécessaire que ces expressions se trouvent inscrites dans le contexte d'une articulation propositionnelle ou judicative, sur laquelle une déduction pourra s'effectuer. D'où le fameux « principe contextuel » frégéen, qui établit, à l'encontre de la tradition logique qui le précédait, la priorité des jugements sur les concepts. Comme Frege l'énonce dans sa réponse à Schröder :

> Contrairement à Boole, je pars des jugements et de leur contenu au lieu des concepts. […] Je fais remonter la formation initiale des concepts aux jugements. […] Ainsi, au lieu d'obtenir le jugement en assemblant un individu comme sujet avec un concept déjà tout formé comme prédicat, nous décomposons à l'inverse le contenu jugeable pour obtenir le concept. Sans doute faut-il que l'expression d'un contenu jugeable, pour pouvoir être ainsi décomposée, soit en elle-même articulée. (Frege, 1880-81, pp. 25-26)[82]

Pourtant, si l'articulation judicative est strictement nécessaire pour que les contenus puissent être pris dans les filets des chaînes inférentielles, elle n'est pas suffisante. Les contenus jugeables doivent en plus être susceptibles de vérité ou de fausseté. Cette condition, classique dans l'histoire de la logique, ne mériterait pas de précision supplémentaire si Frege n'établissait pas une distinction inédite entre le contenu jugeable et le jugement : « Je fais une différence entre jugement et contenu jugeable, en réservant le premier nom au cas où un tel contenu est posé comme vrai. » (1882a, p. 61)[83]. Autrement dit, les contenus jugeables ne sont pas vrais ou faux, mais uniquement susceptibles de l'être. Le sens d'une telle distinction est loin d'être clair, d'autant plus que Frege l'abandonnera par la suite. Ce qui importe pour le moment dans la construction frégéenne du contenu, c'est qu'une telle distinction a pour effet d'établir un niveau d'articulation supérieur à celui des contenus jugeables, ce qui se traduit immédiatement du côté des expressions par l'existence d'un signe particulier (« trait de jugement ») qui peut s'ajouter ou non au trait du contenu qui préside toute expression d'un contenu jugeable. Que le jugement représente pour Frege un niveau d'articulation supérieur à l'articulation du contenu jugeable, cela se voit confirmé par le fait que l'expression ou trait de

---

[82] Sur cette priorité des jugements par rapport aux concepts, voir Sluga (1980, pp. 90-95), qui ne le rapporte pourtant pas directement à l'inférence.

[83] Voir aussi la note dans Frege (1880-81, p. 19), où l'on voit que cette distinction a pour effet d'isoler le niveau propre du contenu jugeable sur lequel porteront les différents rapports logiques (ici la conditionnalité) : « J'établis en m'écartant de l'usage une différence entre jugement et contenu jugeable. Le rapport hypothétique n'est pas selon moi un rapport entre jugements mais entre contenus jugeables. En revanche, lorsque j'affirme l'existence de ce rapport, alors, j'exprime par là un jugement. »

jugement se rapporte à l'expression d'un contenu jugeable, non pas en tant qu'expression articulée, mais en tant que « totalité »[84]. Cela ressort également du fait que, tout comme dans les cas des articulations des niveaux inférieurs, l'articulation judicative est censée refléter une « distinction objective » :

> Toutefois, nous voulons bien quelques fois affirmer quelque chose, et pour cette raison j'ai introduit un signe spécial avec force assertive, le trait de jugement. Ceci est une manifestation de mon effort d'avoir chaque distinction objective reflétée dans le symbolisme. (Frege, 1897, p. 247)[85]

Ainsi, le contenu jugeable se trouve comme compris entre deux niveaux d'articulation, à savoir celui, en amont, des concepts qu'il articule, et celui plus sobre, en aval, de sa vérité ou de sa fausseté, dans l'articulation duquel il entre.

Malgré toutes ces précisions, la *Begriffsschrift* ne donne pas une véritable définition du contenu jugeable. Frege se contente d'y donner deux exemples de ce qu'un contenu jugeable ne serait pas ; autrement dit, des exemples des contenus non-jugeables. Or ces deux exemples correspondent très précisément aux deux niveaux d'articulation entre lesquels les contenus jugeables se trouvent déterminés, suggérant ainsi que *cette détermination articulatoire est sa définition même*. Le premier correspond à l'idée de « maison » que nous avons déjà évoquée. La nature non-jugeable de ce contenu conceptuel est expliquée par Frege dans une note au passage cité :

> …la circonstance qu'il y a des maisons (ou une maison) serait un contenu jugeable […]. Mais l'idée 'maison' n'en est qu'une partie. Dans la phrase: « la maison de Priam était en bois », on ne peut pas remplacer 'maison' par 'la circonstance qu'il y a une maison'. (Frege, 1879/1999, p. 16 note 2)

Le critère de remplacement ou substitution utilisé ici par Frege montre bien à quel point la distinction entre contenu jugeable et non-jugeable tient à la différence de niveau d'articulation : la différence entre « maison » et « la circonstance qu'il y a une maison » se mesure par l'incapacité à entrer dans une articulation de même niveau. Dans la même note, Frege renvoie au second exemple qui se trouve dans la troisième partie de l'ouvrage. L'exemple considère un tas de haricots qui diminue successivement d'un haricot. Si la

[84] Frege (1880-81, p. 16) : « Le trait horizontal avec lequel le signe $\vdash\!\!\!-\!\!\!-$ est formé *combine les signes qui le suivent en une totalité, et l'affirmation exprimée par le trait vertical situé à gauche de l'horizontal se rapporte à cette totalité*. Le trait horizontal peut être appelé *trait de contenu* et le vertical, trait de jugement. Le trait de contenu sert de plus à mettre en rapport n'importe quel signe à la totalité des signes qui le suivent. Ce qui suit le trait de contenu doit toujours avoir un contenu jugeable. ».

[85] Nous traduisons de l'anglais.

propriété « être un tas de haricots » était héréditaire[86], il faudrait alors conclure qu'un seul haricot est bien un tas de haricots, tout comme l'absence de haricots le serait également. Mais l'inférence est invalide puisque le contenu « être un tas de haricots » n'est pas jugeable dans tous les cas « à cause de l'indétermination du concept 'tas'. » (1879/1999, p. 85). Autrement dit, la vérité ou la fausseté d'un jugement portant sur ce contenu conceptuel ne peut pas être déterminée dans tous les cas[87].

Aucune explication n'est ici donnée sur les conditions qui feraient qu'un contenu soit susceptible de vérité ou fausseté. Mais cette question est reprise lorsque, dans les écrits de Frege de cette époque, deux définitions positives du contenu jugeable sont données. Comme les deux exemples négatifs de la *Begriffsschrift*, ces définitions reprennent respectivement les deux traits que l'opération de déduction exige d'un contenu, tout en suggérant leur rapport intime. D'une part, le contenu jugeable est défini selon sa capacité pure d'être vrai ou faux, bien que restant neutre par rapport à cette vérité ou à cette fausseté :

> Nous saisissons le contenu de la vérité, avant de le reconnaître comme vrai ; mais nous ne saisissons pas seulement ce contenu, nous saisissons aussi son opposé ; car, dans une question, nous hésitons entre deux opposés. […] Ce qui peut être mis sous forme de question, appelons-le contenu jugeable. « Contenu jugeable » est donc le contenu de chaque vérité, mais aussi celui de son opposé. (Frege, 1879-91, p. 16)

D'autre part, dans une lettre à Stumpf datant d'août 1882[88], Frege revient sur la question de l'indétermination des concepts. Un concept comme « chauve », dit Frege, n'est précisément défini que s' « il ne subsiste pour aucun individu le doute s'il tombe sous [ce concept] » (Frege, 1976, p. 163)[89]. Et il ajoute :

> Je conçois comme étant essentielle pour un concept, la question de savoir si cela a un sens que quelque chose tombe sous ce concept. Par exemple « la chrétienté » désignerait pour moi un concept, seulement dans le sens donné par une phrase comme « cette façon d'agir est chrétienne » mais pas dans une phrase comme « la chrétienté progresse ». Le concept n'est pas satisfait car il demande que quelque chose tombe sous lui ; ainsi, il ne peut exister par

[86] C'est-à-dire, si elle se transmettait du cas n au cas $n+1$.

[87] Ce niveau supérieur d'articulation des contenus non-jugeables rend inacceptable l'interprétation de Baker et Hacker (1984, p. 164 sqq) du contenu non-jugeable uniquement en termes de « partie d'un contenu jugeable ».

[88] Sur l'attribution de cette lettre à Marty au lieu de Stumpf dans l'édition de la correspondance de Frege, voir l'introduction des éditeurs de l'édition anglaise à la correspondance de Frege dans Frege (1980, p. 99).

[89] *Die Kahlkopfigen sind z.B. solange nicht zahlbar, als nicht der Begriff der Kahlkopfigkeit so genau bestimmt ist, dass bei keinem Einzelnen ein Zweifel sein kann, ob er darunter falle.*

lui-même. Maintenant, qu'une seule chose tombe sous lui, est un contenu jugeable… (Frege, 1976, p. 164)[90]

Deux critères pour la définition du contenu jugeable donc : capacité de vérité et articulation conceptuelle. Exactement les conditions exigées traditionnellement par la déduction. Mais définies de telle sorte qu'une dépendance formelle est établie entre elles. En effet, c'est par le type particulier d'articulation conceptuelle qui le constitue qu'un contenu jugeable est capable d'être vrai ou faux. Ou dans les termes proposés il y a un instant, le type d'articulation d'un contenu jugeable est déterminé par sa capacité d'entrer à son tour dans une articulation de nature binaire (vrai-faux) d'ordre supérieur.

L'articulation conceptuelle adoptée par Frege est celle qui correspond typiquement aux déterminations extensionnelles, à savoir celle qui établit que quelque chose « tombe sous » un concept (Frege ne parle ni d'appartenance ni de subsomption). Mais par la façon particulière dont il a défini les différentes strates du contenu, Frege trouve à nouveau un moyen de se démarquer de la manière dont l'extensionalité était déterminée dans la tradition logique. Ainsi, si d'Aristote à Boole, dans un jugement, l'attribution a lieu entre deux concepts (« homme » et « mortel » ou « corps céleste » et « planète », par exemple), et donc, entre deux éléments ou unités d'un même niveau d'articulation, Frege introduit un rapport de type nouveau, entre des éléments de niveau différent. Certes, les concepts peuvent avoir des niveaux de généralité différents. Ainsi le concept de mortel est plus général que celui d'homme et celui de corps céleste plus général que celui de planète, ce qui détermine l'architecture logique classique en termes de genre et espèce. Mais *du point de vue de leur articulation*, genre et espèce sont au même niveau, puisqu'ils peuvent occuper exactement la même place dans un contenu d'articulation supérieure (tel un contenu jugeable). En revanche, *les individus, en tant que formes élémentaires du contenu, ne le peuvent pas*. S'ils entrent bien dans l'articulation des contenus jugeables, ils ne le font pas à la même place que les concepts, puisque, comme le dit Frege, « dans le cas d'un concept, les questions peuvent toujours être posées de savoir si quelque chose et quelle chose tombe sous lui, questions qui dans le cas d'un individu sont dépourvues de sens. » (1880-81, p. 27). C'est dire qu'un concept a lui-même une articulation que l'individu n'a pas, bien que les expressions linguistiques ne rendent pas compte de cette différence. La distinction devient l'occasion de déjouer en passant l'argument schröderien concernant la détermination des concepts du type « non-

[90] *Als das Wesentliche für den Begriff sehe ich an, dass die Frage, ob etwas unter ihn falle, einen Sinn hat. „Christentum“ z.B. würde ich nur in dem Sinne einen Begriff nennen, wie es in dem Satze „diese Handlungsweise ist Christentum“ gebraucht wird, nicht aber in dem Satze „das Christentum verbreitet sich weiter“. Der Begriff ist ungesättigt indem er etwas fordert, was unter ihn falle; daher kann er nicht für sich allein bestehen. Dass nun ein Einzelnes unter ihn falle, ist ein beurteilbarer Inhalt…*

homme », car si les jugements et les individus sont des contenus « complets » (le premier étant articulé, le second inarticulé), le concept, dans la mesure où il incarne la fonction articulatoire, demeure « incomplet » tant qu'il n'est pas effectivement articulé avec quelque chose de complet. Dès lors, dans le cas des concepts comme « non-homme », Frege affirme : « on n'a simplement rien de complet, mais seulement le prédicat d'un jugement, auquel manque encore le sujet. Les difficultés naissent du fait que l'on traite un fragment de ce genre comme quelque chose de complet. » (1880-81, p. 26, note).

D'autre part, que la question sur ce qui tombe sous un individu n'ait pas de sens veut dire que *les individus logent dans un niveau irréductible du contenu*. Indécomposables, les individus peuvent seulement entrer dans des articulations, sans être eux-mêmes articulés à leur tour. Cependant, malgré leur caractère élémentaire, les individus ne sont pas « donnés », ni matériellement, ni idéalement, ni métaphysiquement. Sorte d'atomes du contenu, leur position, depuis un point de vue strictement articulatoire, est inférée au bout d'une chaîne continue de décompositions qui parcourt les différentes strates d'articulation. Que la différence entre concepts et individus est elle aussi le résultat de l'opération par laquelle sont définis les contenus conceptuels et les contenus jugeables, Frege le dit dans un passage essentiel de sa réponse à Schröder qui semble condenser l'ensemble des éléments qui ordonnent l'espace ouvert du contenu :

> Ainsi, au lieu d'obtenir le jugement en assemblant un individu comme sujet avec un concept déjà tout formé comme prédicat, nous décomposons à l'inverse le contenu jugeable pour obtenir le concept. Sans doute faut-il que l'expression d'un contenu jugeable, pour pouvoir être ainsi décomposée, soit en elle-même articulée. On peut alors en inférer qu'au moins les propriétés et relations dont on ne peut poursuivre plus loin la décomposition doivent avoir une désignation élémentaire propre. Mais il ne s'ensuit pas que les représentations de ces propriétés et relations soient formées indépendamment des choses ; au contraire elles prennent naissance en même temps que le premier jugement par lequel elles sont attribuées aux choses. Par conséquent leurs désignations ne se présentent pas dans l'idéographie à titre séparé, mais toujours dans des combinaisons qui expriment des contenus jugeables. Je pourrais comparer cela avec le comportement des atomes, dont on suppose qu'on n'en trouve jamais un isolé, mais seulement dans une combinaison avec d'autres, qu'il ne quitte que pour entrer aussitôt dans une autre. Un signe de propriété n'apparaît jamais sans que soit au moins indiquée une chose à laquelle revienne cette propriété, la désignation d'une relation jamais sans indication des choses qui puissent l'entretenir. (Frege, 1880-81, pp. 25-26)

C'est de cette manière que Frege détermine sa notion renouvelée de contenu. Comme il a été dit, cette notion avait pour but de résoudre le problème d'une logique qui soit à la fois une *lingua* et un *calculus*, de façon à ce que les règles ne soient pas imposées de l'extérieur, mais maintiennent avec l'ensemble des composants logiques un rapport interne et organique.

Frege le rappelle juste après le passage qui vient d'être évoqué, lorsqu'il affirme établir par là une « liaison organique » entre les deux parties distinctes de la logique booléenne (« *primary propositions* » et « *secondary propositions* », correspondant respectivement aux rapports entre des concepts et entre des jugements). On comprend alors la façon dont cette détermination de la notion de contenu offre une solution à ce problème : *elle organise le contenu à plusieurs niveaux selon un même et unique principe formel de variation-invariance, gouverné par la déduction ou l'inférence*, de telle sorte que les unités et les relations logiques élémentaires se trouvent formées ou construites par décomposition à partir du niveau d'articulation sur lequel opère la déduction (c'est-à-dire, le niveau judicatif, ou du contenu jugeable). Au lieu de se donner les unités, les relations et les principes déductifs comme des éléments déjà constitués, Frege prétend les constituer en les définissant par une dépendance réciproque capable d'assurer l'organicité de tout véritable système. Si Frege peut être considéré comme le premier à avoir proposé un véritable système formel pour la logique, c'est surtout grâce à cette interdépendance générale des éléments d'après laquelle il la conçoit et l'édifie. Un tel système ne contient que les éléments nécessaires à la déduction, puisque leur être même est censé être défini en fonction d'elle. Inversement, si un calcul de la déduction est possible, c'est en vertu de la forme constitutive des éléments et des dépendances internes qu'elle institue. On comprend dès lors l'originalité de la position frégéenne par rapport à la double tâche de la logique : devant l'exigence d'un traitement simultané de sa nature tant linguistique que calculatoire, Frege ne cherche pas à faire de la logique une langue *et* un calcul ; il prétend, plus profondément, fournir les moyens pour que la logique soit la langue *d'*un calcul, en même temps que le calcul *d'*une langue.

La thématisation du contenu à l'intérieur de ce qui était envisagé comme logique formelle est fondamentale pour la réalisation effective de ce but. Elle est comme la condition philosophique des solutions techniques qui seront le résultat de cette entreprise. Par la position d'une telle notion de contenu, la constitution de la logique dans sa dimension symbolique ou sémiotique trouve un ordre par rapport auquel se mesurer sans emprunter les déterminations à un domaine étranger (métaphysique ou autre). Mais pour cela il a fallu que Frege dépouille cette notion de tout son poids substantiel et ne retienne sous le nom de *contenu* que des déterminations purement formelles de variation et d'invariance constituant un réseau d'articulations à plusieurs niveaux conforme à la possibilité et aux exigences de la déduction. C'est ainsi que l'espace indéfini et virtuel du contenu se voit peuplé des figures précises et effectives : *individu, concept, contenu jugeable, vérité/fausseté*. Ces figures ne sont que des formes articulées sur cet espace, dont les parcelles respectives sont définies de façon réciproque. La vieille opposition entre *forme* et *contenu* s'efface de cette manière devant la constitution d'un *contenu purement formel*, de *pures formes du contenu*.

I.2.2. L'expression des contenus

Une fois le contenu formel ainsi déterminé, un système logique pourra être jugé en fonction de sa capacité à exprimer l'ensemble des formes du contenu. Dès lors, la tâche de construire un système de signes déductif prend un sens très concret. La notion formelle de « contenu » est le principe qui guide la construction sémiotique d'un système logique, car comme le dit Frege de son idéographie, rien n'y est exprimé en dehors du contenu conceptuel. Si comme nous l'avons vu, le problème de la *lingua* et du *calculus* pouvait être *posé* sur un même plan, à savoir celui de l'expression, le plan du contenu, en tant que constitué d'unités et de relations déterminées formellement par un principe de déduction, permet de *résoudre* ce problème car il fournit la structure qu'un système d'expression n'aurait dès lors qu'à décalquer. Voilà le but le plus franc de la *Begriffsschrift* : trouver une écriture qui se tienne au plus près de la structure des contenus conceptuels.

Mais la question n'est pas si simple, puisque le rôle du système d'expression n'est pas, et ne saurait pas être, celui purement passif de répéter l'organisation du contenu. Comme nous l'avons vu, le contenu n'est, par définition, qu'une certaine invariabilité. Or cette invariabilité ne peut être établie qu'à partir d'un faisceau de variations dont la nature est forcément expressive. Certes, les contenus, les différentes figures du contenu, sont déterminés en fonction des exigences de la déduction. Mais la déduction n'est que le critère selon lequel évaluer les variations des expressions. S'il s'agit d'identifier des invariances entre ces trois expressions : « les Grecs ont vaincu les Perses à Platée », « les Perses ont été vaincus par les Grecs à Platée » et « les Grecs ont été vaincus par les Perses à Platée », l'effet sur la déduction pourra être utilisé comme critère pour établir une invariance entre les deux premières, et donc une différence entre elles d'une part et la dernière de l'autre. On aura ainsi établi l'existence de deux contenus conceptuels différents[91]. Si bien que, si le contenu est censé déterminer l'expression*, l'expression ne détermine pas moins le contenu*. Cette détermination de la part de l'expression ne s'épuise d'ailleurs pas dans la distribution des identités et des différences à un certain niveau, mais s'étend jusqu'à la distinction des divers niveaux d'articulation, puisque comme nous l'avons vu, une telle distinction ne peut être réalisée à chaque fois que comme le corrélat d'un rapport de variation/invariance des expressions mêmes. Aussi, jamais Frege ne propose-t-il de telles déterminations (de niveau) de contenu sans présenter comme argument décisif un exemple de substitution possible dans une ou plusieurs expressions

[91] On aurait pu utiliser un autre critère, telle la structure du verbe, ce qui aurait établi une différence entre la première expression et les deux dernières ; ou tel le sujet du verbe, marquant une différence entre l'expression du milieu et celles des extrêmes. Dans le premier cas, deux voix grammaticales auraient été établies (active, passive), dans le second, deux sujets (les Grecs, les Perses).

données. Expression et contenu sont donc comme les deux faces inséparables d'une logique dans laquelle forme et contenu ne sont pas dissociés. Qui plus est, dans une telle logique, comme on peut le voir dans l'œuvre de Frege, la critique du langage, naturel ou autre, n'est pas un avatar ni une simple préface. Elle fait partie à la fois de ses conditions et de sa méthode.

Que la logique se joue dans l'invariance d'une structure formelle par rapport à la multiplicité expressive habilitée par un langage, cela n'est certainement pas nouveau. Cette manière de procéder est après tout celle de la logique depuis sa naissance, comme on peut le voir lorsqu'Aristote s'applique à ordonner les « lieux » de sens ou à désamorcer les subtilités de la sophistique au moyen de la structure propositionnelle τι κατὰ τινός[92] – dont l'établissement et la règlementation font l'objet fondamental de l'*Organon* – quitte à introduire des distinctions nouvelles devant des expressions indifférentes[93]. Et la célèbre définition leibnizienne de l'identité comme substitution *salva veritate* compte sans doute parmi les moments les plus emblématiques de cette histoire. Mais le mérite de Frege est d'avoir envisagé cette relation de variation-invariance de façon directe, d'en avoir fait le principe fondamental et articulateur de la logique, et de l'avoir ainsi mise au service du développement de ses instruments. Baker et Hacker (1984, p. 127) ont certainement raison lorsqu'ils signalent qu'aucune procédure effective n'est proposée par Frege pour décider si deux expressions renvoient au même contenu. Mais ce n'est pas pour autant qu'aucun critère d'identité n'est fourni pour la notion de contenu. Ce critère, nous l'avons dit, n'est autre que l'effet produit par des expressions différentes sur le processus déductif. Et l'introduction dans le discours logique d'une « entité » comme le contenu conceptuel (ou plus précisément, jugeable), loin d'être un « péché intellectuel », est ce qui permet de réorganiser toute la pensée logique, de telle sorte qu'un procédé effectif de groupement des expressions en fonction de principes déductifs, comme le voudra la logique moderne, devienne pensable, voire nécessaire.

La thématisation du contenu conceptuel est la marque visible, dans les débuts de l'œuvre logique de Frege, de cette transformation radicale qu'il opère dans la conception et la conceptualité générale de la logique. Nous l'avons vu, Frege ne cesse de le signaler, et on ne peut que s'étonner du peu d'intérêt que la question du contenu a suscité chez ses

---

[92] C'est-à-dire, qui prédiquent « quelque chose de quelque chose ».

[93] Voir, par exemple, les passages sur les paralogismes tenant aux différences et identités du contenu (sens) ou des expressions dans les *Réfutations sophistiques* d'Aristote (2007, 168a 20-30).

commentateurs et interprètes contemporains[94]. Même Michael Dummett, malgré toute sa lucidité et son érudition à l'égard de l'œuvre frégéenne, ainsi que son intérêt pour une théorie du langage, ne dédie pas plus d'une demie page à la notion de contenu conceptuel, qu'il considère simplement comme une version vague et non développée des futures notions de « sens » et « référence »[95]. Cette considération de la notion de contenu comme purement intuitive et pré-théorétique est massivement partagée par les commentateurs de Frege. Deux exceptions méritent pourtant d'être ici mentionnées : celle du livre de Baker et Hacker que nous venons d'évoquer, et celle, postérieure, de Michael Beaney (1996)[96].

En effet, la place structurante du contenu pour la thèse de Baker et Hacker est affirmée dès l'introduction de leur ouvrage :

> To give an historically accurate account of his [Frege's] thought we must pore over *Begriffsschrift*, try to tease out from its brief introductory matter the fundamental inspiration informing his theories. Here in the theory of judgeable-content, and not in the papers of the 1890s, lies the key to his thought. (Baker & Hacker, 1984, p. 29)

Beaney, pour sa part, soutient que « sans une compréhension de cette notion [de contenu conceptuel], les réflexions postérieures de Frege lui-même sur l'analyse, et la distinction entre *Sinn* et *Bedeutung* qui en est née comme résultat, ne peuvent pas être appréciées » (1996, p. 56), et dédie ensuite plusieurs pages à l'analyse de cette notion. Mais en dépit de la perspective que leurs analyses respectives de la notion de contenu leur permettent de gagner sur le sens de l'entreprise frégéenne, ces deux lectures semblent manquer un point décisif pour comprendre l'importance et la nouveauté de cette notion, à savoir *le rapport intrinsèque qu'elle maintient avec l'espace des expressions*[97].

Ainsi, séparé de son intimité essentielle avec les expressions qui l'expriment, le contenu jugeable n'est vu par Baker et Hacker que comme le résultat d'une postulation théorique purement abstraite et stérile, dont le sens, obscur, reste à élucider. Pour eux, une réponse pourrait être trouvée du côté de l'antipsychologisme frégéen. En effet, puisque le contenu est posé par Frege comme indifférent aux représentations subjectives (*Vorstellungen*), il devient

---

[94] Comme le souligne Rosado Haddock (2006, p. 4) : « Interestingly, almost no Fregean scholar has given these two notions their due importance. In particular, they have not seen the almost omnipresent philosophical ghost of the defunct notion of conceptual content. »

[95] Dummett (1973, p. 315) : dans la *Begriffsschrift*, « le mot « contenu » [est] pris dans un sens vague comme couvrant à peu près à la fois ce que Frege appela plus tard « sens » et ce qu'il appela plus tard « référence » ».

[96] On devrait sans doute en mentionner ici une troisième : celle de Peter Sullivan (2004), dont la compréhension de la place de la notion de contenu dans le projet frégéen compte parmi les plus lucides à notre connaissance. Nos analyses s'accordent sur certains points élémentaires avec les siennes, bien qu'elles en soient indépendantes et orientées par d'autres buts.

[97] À la différence de Baker et Hacker, et Beaney, Sullivan (2004, § 4.3.1) reconnait l'importance de cette question.

l'élément au nom duquel est menée sa célèbre bataille contre l'idéalisme et le psychologisme : tout comme les expressions, les déterminations subjectives ne recoupent pas les articulations d'un contenu logique qui reste parfaitement impassible à leur égard, et se constitue en source d'objectivité scientifique. Aussi, Baker et Hacker affirment-ils que l'attaque que Frege adresse à l'idéalisme : « repose simplement sur la *supposition* qu'il y a, accessible à nous, un domaine objectif d'entités indépendantes de l'esprit [*mind*] » (1984, p. 51). Et ils ajoutent que, face à l'idéalisme, Frege

> …was content to sketch in a form of Platonism about senses that is its diametrical opposite. On his view, the sense of every expression is an objective abstract entity, while on the idealists' view, the analogue of the sense of an expression is invariably a subjective mental entity. (Baker & Hacker, 1984, p. 54)

Si l'on part du psychologisme ou de l'idéalisme comme problème fondamental des préoccupations frégéennes, l'affirmation dogmatique de l'existence des contenus en tant qu'entités objectives peut être légitimement vue comme solution, dans la mesure où l'indifférence devant les représentations psychologiques individuelles est une propriété essentielle de ses entités. La conception, relevant d'une interprétation classique, de l'invariabilité comme une propriété des contenus est présente tout au long des analyses de cet ouvrage. Elle se trahit clairement, par exemple, lorsqu'ils envisagent l'invariabilité des contenus par rapport à la preuve :

> …if two formulae or sentences have the same content, then replacement of one by the other in any proof must leave the cogency of the proof unaltered. Conversely, if a proof is rendered invalid by such a substitution, this must reflect a difference in the contents of the formulae. These principles are mere truisms. (Baker & Hacker, 1984, p. 126).

Or il est évident que pour Frege, tel que nous l'avons montré, la première implication va dans le sens inverse : si le remplacement de deux phrases dans une preuve n'a pas d'effet sur la déduction, alors on dira que ces deux phrases ont le même contenu. La contraposée devient donc : si l'on dit que deux phrases ont des contenus conceptuels différents, alors cela doit se refléter dans une différence dans les effets que ces phrases ont à l'intérieur d'une preuve. Ce qui montre d'ailleurs que la considération du contenu conceptuel par ces auteurs comme une « entité objective » dogmatiquement postulée, et leur dénonciation de l'absence d'un critère pour l'identifier sont les deux faces d'une même lecture. Ce qui montre, plus profondément, que pour Frege l'invariabilité, dans certains cas, n'est pas une *propriété* du contenu, mais ce qui permet de l'identifier, donc de le *définir* formellement. Certes, le contenu, lorsqu'il est conceptuel, ne se définit jamais en fonction des variations des représentations subjectives, de sorte que l'invariabilité du contenu devant les *Vorstellungen* peut légitimement être considérée comme une propriété des contenus. Mais alors une distinction est à faire entre cette invariabilité et celle du contenu conceptuel devant les expressions (*Ausdrücke, Darstellungen*). Considérée comme un simple aspect de l'objectivité essentielle du contenu devant les représentations subjectives, la spécificité de l'*invariabilité expressive*, ou *invariance* comme nous avons déjà commencé à l'appeler, semble être passée inaperçue sous les yeux des lecteurs de l'œuvre frégéenne. Frege ne les confond pourtant jamais. Qui plus est, bien que l'antipsychologisme soit présent chez Frege dès le début de son œuvre, la postulation de l'invariabilité du contenu à l'égard des *Vorstellungen* est postérieure à celle de l'invariance expressive : elle n'apparaît de manière explicite qu'à l'époque des *Grundlagen* [98]. Dans la *Begriffsschrift*, la notion de *Vorstellung* n'a pas nécessairement le caractère subjectif et individuel qu'elle prendra par la suite[99]. En revanche, l'indifférence à l'égard des expressions, non seulement est inscrite au début de l'entreprise logique frégéenne, mais *elle constitue la définition même du contenu conceptuel*, tel qu'il ressort de la définition de ce contenu dans la *Begriffsschrift* évoquée plus haut. Cette définition est bien une *définition*, et non pas une description ou une caractérisation ou une propriété (« J'appelle alors *contenu conceptuel…* ») ; ce qui montre que l'indifférence devant les *Ausdrücke* et les *Darstellungen* n'est absolument pas de même nature que celle devant les *Vorstellungen*. Sans une telle distinction, qui capture la spécificité de la notion d'expression, il paraît impossible de comprendre la portée du concept frégéen de contenu, et la raison par laquelle il constitue une solution au problème que Frege lui-même désigne comme fondamental pour la logique et comme articulateur de son propre travail.

Ce problème n'est aucunement celui du psychologisme, comme le suggèrent par moments Baker et Hacker. La question du psychologisme n'est posée directement par Frege qu'une fois disposés les ressorts fondamentaux de son dispositif logique, et ce problème n'oriente aucune décision d'importance concernant ce dispositif. Et même par rapport à ce problème du psychologisme, la compréhension du rôle spécifique et immanent des expressions offre une intelligibilité nouvelle. En effet, grâce à la définition purement formelle du contenu en fonction des expressions, *l'indépendance à l'égard des représentations psychiques ne conduit pas nécessairement Frege à l'attribution d'une réalité substantielle aux contenus conceptuels*. Baker et Hacker ont certainement raison de contester la nature tant physique que mentale du contenu jugeable[100]. Mais ils se trompent lorsqu'ils dénoncent chez

---

[98] Par exemple, dans l'introduction des *Grundlagen* (Frege, 1884/1969), ou dans le dialogue avec Pünjer (Frege, 1884).

[99] Ce qui explique d'ailleurs la décision de la traductrice française de rendre ce mot de manière générale par « idée ».

[100] Baker et Hacker (1984, p. 53): « Recognizing the mental nature of what a judgment is about no more entails that the judgeable-content is a mental object than does recognizing the concrete nature of what a judgment is about entail that the judgeable-content is a physical object! »

Frege une vision substantialiste sous la forme d'un « objectivisme platonicien ». Formelle, cette objectivité n'est pas plus substantialiste ou métaphysique qu'elle n'est épistémologique. L'objectivité invoquée par Frege lors de sa contestation tenace du psychologisme est, comme il a été dit, purement « formelle ». Et même lorsque Frege compare l'objectivité des contenus à celle du soleil, qui peut « *apparaître* » de différentes manières à différentes personnes, mais qui « *est* ce qu'il est » (Frege, 1879-91, p. 16), la place décisive du principe formel d'invariance dans cette illustration oblige à y voir moins une définition du contenu que de ce que c'est « être » et « apparaître ». L'objectivisme formel n'éprouve aucune nécessité de tourner en substantialisme, voire en réalisme naïf, si le contenu qui le constitue et le supporte trouve, après s'être détaché des déterminations des représentations subjectives, une manière de se déterminer sans faire appel à des réalités substantielles. C'est précisément cela que la mise en rapport du contenu avec les expressions réussit. Indifférent et invariant par rapport tant aux représentations (*Vorstelungen*) qu'aux expressions (*Ausdrücke*, *Darstellungen*), le contenu conceptuel n'est pourtant pas *indépendant* de ces dernières comme il l'est des premières, puisqu'il est défini par elles. Sans doute un contenu conceptuel peut-il être lié à une substance ou à une « réalité extérieure » comme à sa source, tout comme il peut avoir des effets sur la sensibilité ou l'intuition en tant que facultés « intérieures » ou subjectives. Il n'en reste pas moins qu'il n'est pas *défini* par eux. Ainsi, si par sa propriété d'invariabilité à l'égard des représentations subjectives le contenu se libère du subjectivisme, par sa définition en termes du principe formel d'invariance devant une certaine multiplicité d'expressions, le contenu se libère en même temps de tout réalisme substantialiste. Par ce moyen, le contenu se trouve entièrement « intériorisé » dans le seul plan logique, selon les buts que Frege a lui-même assumés. Ce qui veut dire que son objectivité n'est pas reçue de l'extérieur, mais agencée et construite dans un rapport interne avec les expressions[101].

La lecture de Beaney semble sur ce point plus juste que celle de Baker et Hacker. En effet, Beaney commence par établir, suivant les définitions de Frege, que le contenu conceptuel se définit par une certaine communauté dans les expressions à l'égard des conséquences logiques, ce qui fournit bien un critère pour l'identité, ou plutôt pour l'égalité (*sameness*) des contenus conceptuels[102]. Beaney explicite ce critère de la manière suivante : « Deux propositions ont le même *contenu conceptuel* ssi (si et seulement si) elles sont

[101] Au demeurant, si la considération de la logique en termes de détermination réciproque des contenus et expressions entraîne l'expulsion hors de son domaine de toute psychologie, cette même considération offre une possibilité à la psychologie (au moins à une certaine psychologie) de se constituer comme savoir scientifique, car elle donne un principe de délimitation de son domaine : celui déterminé par des variations ou différences non logiques (différence des *Vorstellungen*, identifiables en fonction de l'invariabilité d'un contenu).

[102] Quelques pages plus bas Beaney explicitera dans une note son désaccord avec Baker et Hacker sur ce point (cf. Beaney, 1996, p. 62, note 31).

logiquement équivalentes (elles ont les mêmes conséquences possibles) » (1996, p. 57). Toutefois, Beaney ne manque pas de noter ce qu'il y a de problématique dans ce critère : l'équivalence logique, qui doit déterminer les contenus conceptuels dans leur égalité, peut seulement être établie par une reformulation des expressions qui suppose déjà donnée l'égalité des contenus entre ces expressions. Ce qui l'amène à affirmer que le contenu conceptuel doit être compris comme l'ordre relevant des « intuitions sémantiques » nécessaires à toute formalisation logique. Le mérite de Frege serait alors d'avoir introduit un concept pour nommer ces intuitions, ce qui, lorsque ces intuitions sémantiques ne correspondent pas avec les formes grammaticales courantes, comme il arrive dans le cas de Frege, la confrontation avec des questions sémantiques devient inévitable (1996, pp. 59-60).

Beaney reconnaît qu'une telle confrontation aurait pu avoir lieu dans des cadres logiques différents du frégéen, à condition qu'un moyen de représenter l'identité des expressions soit disponible. Ce qui est bien le cas, par exemple, de la logique booléenne. Mais malgré la possibilité de représenter cette identité, rien ne peut être trouvé dans le système de Boole qui puisse être apparenté au contenu conceptuel, puisque la représentation de l'identité d'expressions n'est associée à aucune notion adéquate (sémantique) d'équivalence logique, telle que celle que Beaney identifie chez Frege. Qu'est-ce qui explique donc que la notion fondamentale de contenu conceptuel ne soit pas apparue avant Frege, et notamment chez Boole et les Booléens ? La réponse se trouve, d'après Beaney, dans la différence de nature du système logique frégéen, et notamment dans l'utilisation de l'articulation fonction-argument. Cette notation fait apparaître l'égalité des expressions de manière naturelle et presque immédiate. Mais plus profondément, cette articulation fait ressortir les divergences avec des systèmes logiques précédents :

> …the divergence from syllogistic theory is nevertheless so great that Frege cannot help but reflect upon the differences: the results of his formalizations make the question of justification inevitable. With the introduction of the notion of 'conceptual content' […], Frege has a reply: inferences such as *Disamis* and *Dimatis* can be conflated because they possess the same 'conceptual content', and 'conceptual content' is all that logicians need really concern themselves with. The awareness that his system required justification, then, may well have provided the stimulus for the introduction of the notion. (Beaney, 1996, p. 62)

On voit donc que l'auteur fait porter tout le poids du contenu conceptuel sur la notion d'équivalence logique. Non que l'équivalence logique ait un statut privilégié face à celle de contenu conceptuel, qui lui serait entièrement subordonnée. Beaney rejette explicitement tout privilège de l'une des deux notions mises en rapport par son critère ; la thèse fondamentale de ces pages, ainsi que de tout son ouvrage, est qu'il existe une détermination mutuelle et progressive entre les deux, quitte à ce que les intuitions sémantiques donnent le premier coup de pied pour « *get the ball moving* » (1996, pp. 303-304, notes 27 et 32). Mais la nature du contenu conceptuel relève entièrement de la manière de comprendre l'équivalence logique. Comprise formellement comme bi-implication, l'équivalence peut encore être considérée comme étant de nature soit matérielle, soit logique, soit cognitive, ce qui détermine à chaque fois des critères divergents pour l'égalité des contenus. Dans le premier cas, toutes les propositions vraies auraient le même contenu, dans le second, deux propositions comme « $2^2 = 4$ » et « $2 + 2 = 4$ » auraient aussi le même contenu. Dans le troisième cas en revanche, la détermination des différents contenus conceptuels en fonction d'une « équivalence cognitive » permettrait d'établir une distinction de contenu entre propositions logiquement équivalentes, et c'est donc celle-ci qui aux yeux de Beaney doit être regardée comme essentielle pour la notion de contenu conceptuel. C'est cette équivalence cognitive d'ailleurs qui, avec l'équivalence matérielle, expliquerait la scission postérieure de la notion de contenu en sens et référence respectivement (1996, pp. 63-64).

Si cette lecture de Beaney paraît juste quant à la nature formelle du contenu conceptuel et aux difficultés que celle-ci soulève, elle semble cependant aller trop vite en ce qui concerne tant l'explication que la résolution de ces difficultés. Il est vrai que la définition du contenu conceptuel suivant le critère des effets sur la déduction fait apparaître le risque d'entraîner la détermination du contenu dans une circularité. Mais cela uniquement dans la mesure où les effets sur la déduction sont saisis sous la forme de l'équivalence logique définie comme bi-implication. Pourtant, à bien y regarder, Frege ne parle jamais d' « équivalence », logique ou autre, lorsqu'il parle de la déduction ou de l'inférence comme critère pour l'égalité des contenus[103]. La seule précision, informelle, donnée par Frege à cet égard est :

> …les conclusions qui peuvent être tirées à partir de l'un d'eux [jugements] en relation avec d'autres déterminés découlent toujours du second en relation avec ces mêmes autres jugements (Frege, 1879/1999, p. 17)

Précision que Beaney comprend immédiatement de la manière suivante :

> If *Q* can be *derived* from *P*, and *P* can be *derived* from *Q*, utilizing the same resources, then *P* and *Q* have the same 'conceptual content'. (Beaney, 1996, p. 63)

Or si la condition proposée par Beaney correspond bien à l'équivalence logique comme bi-implication, elle ne correspond pas au critère donné par Frege. Reformulé dans le style de

---

[103] Ce n'est pas le mot « équivalence » (*Äquivalenz*) que Frege emploie à cette époque, mais d'autres, sous forme adjectivale, tels que « *gleichgiltig* », « *gleichwertig* », « *gleichbedeutend* », dont l'usage ne peut pas être tenu pour technique, et qui se rapportent directement à ce qu'il appelle « égalité des contenus » (*Inhaltgleichsam*) en tant qu'instrument spécifique de l'idéographie. On peut voir que le dernier de ces termes commence à adopter le sens plus technique de l'équivalence dans le dialogue avec Pünjer (Frege, 1884). Plus tard, lorsque Frege aura une conception strictement technique de l'équivalence, il utilisera « *Äquivalenz* », par exemple, dans les *Logische Untersuchungen* (Frege, 1918-1923).

Beaney, le critère de Frege dit que, si pour tout jugement *C*, *C* peut être dérivé (déduit, inféré) de *P* et Γ (Γ étant un ensemble donné de jugements) ainsi que de *Q* et Γ, alors *P* et *Q* ont le même contenu conceptuel. On voit bien que ce critère n'établit directement aucun rapport d'implication ni d'inférence entre les jugements *P* et *Q* dont il s'agit d'évaluer l'égalité : *Q* n'est ni *dérivé* de *P*, ni *impliqué* par lui, pas plus qu'inversement. *P* et *Q* peuvent faire la même chose placés dans le même contexte (déductif ou inférentiel), mais ne se trouvent pas ensemble dans le même contexte. Et aucune relation d'implication (ou de bi-implication) ne peut être établie entre les deux à partir de la définition frégéenne *sans passer par un système formel où le rapport entre l'implication et la déduction serait déjà déterminé*. Or c'est précisément ce système formel que la détermination des contenus en fonction de la déduction *a pour but d'instituer*. Il en résulte que le critère formel pour l'égalité des contenus n'est circulaire que si l'indifférence à l'égard des effets inférentiels (qu'on peut appeler équivalence logique, à condition de ne pas comprendre par là ce qui à l'intérieur d'un système formel est ainsi nommé[104]) est définie en termes d'implication. Ce que Frege a la précaution de ne pas faire. La définition du contenu conceptuel est antérieure (tant logiquement que chronologiquement) à la définition de l'implication logique (et donc de la bi-implication), au point où celle-ci a explicitement celle-là comme l'une de ses conditions[105]. Le critère pour la détermination des contenus se place tout entier dans un espace où les éléments d'un système formel ne sont pas encore constitués, et où ils ne se constitueront que comme le résultat de l'action d'un tel critère. Ce qui expose ce critère au danger du vague, de l'indétermination et de l'obscurité, mais pas forcément de la circularité.

Placé à l'extérieur des déterminations d'un système formel, dans un plan qui lui est antérieur et préalable, le critère de détermination des contenus conceptuels se prête sans doute à une association avec des principes de nature intuitive, comme Beaney le propose lorsqu'il parle d' « intuitions sémantiques », et il n'est pas étonnant que Beaney arrive ainsi à une conception cognitive de l'équivalence. Mais un tel propos semble entièrement étranger à Frege. En effet, comme on sait bien, le rejet de l'intuition est l'un des motifs majeurs de l'entreprise logique et philosophique frégéenne, et le subjectivisme associé à une conception cognitive des éléments logiques est explicitement refusé par Frege[106]. Comment alors comprendre que la nature du contenu conceptuel, c'est-à-dire de « ce qui seul importe » à la

---

[104] C'est précisément cette indétermination que l'emploi des mots comme « *gleichgiltig* », « *gleichwertig* », « *gleichbedeutend* » par Frege à cette époque trahit.

[105] Voir par exemple Frege (1880-81, pp. 47-48; 1882a, pp. 62-63), et la détermination de la conditionnalité en fonction du moindre contenu dans le rapport entre des jugements, tel que nous l'analysons ci-dessous, à la page 85 et suivantes.

[106] Voir, par exemple, Frege (1884/1969, p. 120).

logique, soit intuitive, et que ses déterminations essentielles soient cognitives ? D'autant plus que le contenu conceptuel n'est pas seulement, en tant que logique, objectif et indifférent aux variations subjectives, mais, d'après ce qui a été vu, il est ce au nom de quoi cette objectivité et cette indifférence sont possibles. On voit mal alors pourquoi Frege introduirait au centre de son système une telle notion, par où se filtrerait exactement tout ce qu'il voulait écarter.

L'hypothèse de justification que Beaney donne ne peut pas suffire. Elle oblige à supposer que l'introduction de la notion de contenu en logique est fondamentalement inefficace et stérile pour la logique, car elle ne fait que donner un nom pour un phénomène ou une situation déjà établie par la nature de ses formalisations (la divergence par rapport à la Syllogistique). Ce qui, tout comme pour Baker et Hacker, ne donne de l'introduction de cette notion qu'une explication externe aux problèmes strictement formels de la logique. En effet, si pour Baker et Hacker Frege introduisait dogmatiquement les contenus comme des entités platoniciennes pour pouvoir contester les arguments des idéalistes, pour Beaney il les introduirait pour pouvoir convaincre les logiciens classiques de la nécessité de réunir deux modes tels que *Disamis* et *Dimatis*. Mais la notion de contenu n'a alors qu'un rôle rhétorique, puisque le problème de la réunion de ces modes n'est pas pour Beaney l'effet de l'égalité des contenus, mais de la

> …radically different nature of Frege's logic. For given both the use of function-argument notation and Frege's urge to simplify, the conflation of certain pairs of syllogistic inferences emerges naturally… (Beaney, 1996, p. 62)

L'égalité des contenus ne serait dès lors qu'une explication purement spéculative, voire dogmatique de ce fait, qui n'est pas sans rappeler le médecin de Molière :

> …inferences such as *Disamis* and *Dimatis* can be conflated because they possess the same 'conceptual content', and 'conceptual content' is all that logicians need really concern themselves with. (Beaney, 1996, p. 62)

Sans compter le fait que les divergences avec la Syllogistique abondent déjà dans le système des Booléens (ainsi la quantification du prédicat, par exemple), et qu'ils n'ont eu besoin de faire appel à aucune notion de contenu pour la justifier.

La question centrale demeure alors inexpliquée, à savoir : quel est le rôle joué par la notion de contenu dans la nature radicalement différente de sa logique ? Si l'on suit Frege dans son insistance face aux Booléens sur la place centrale des contenus pour la compréhension de sa propre logique, alors les termes de la solution de Beaney doivent être renversés. Ce n'est ni la notion formelle de conséquence logique (bi-implication), ni la notation en termes de fonction-argument, ni la volonté de simplification de Frege qui explique ou peut expliquer le sens de l'introduction de la notion de contenu conceptuel, mais inversement, c'est celle-ci qui doit expliquer celles-là.

I.2.3. Les formes de l'expression : expressions formelles

La raison de l'assujettissement de la notion de contenu conceptuel aux déterminations d'un système formel déjà constitué qui la dessaisit de toute son efficacité, est la même que celle de l'assujettissement aux entités objectives dans le cas de Baker et Hacker, à savoir la négligence de l'*autonomie et de l'efficacité des expressions dans l'intimité desquelles les contenus se déterminent*. Ceci, dans le cas de Beaney, se trahit par l'absence de réflexion sur la possibilité et la légitimité de chacune des reformulations des propositions qu'il explore pour interroger la nature de la notion de contenu conceptuel. Dans cette exploration, le passage de la langue courante à la Syllogistique, à la logique propositionnelle, au calcul des prédicats et à nouveau à la langue courante semble pour Beaney être donné et aller de soi. Mais si l'on s'empêche de présupposer l'existence et la validité de chacun de ces systèmes d'expression, tout comme des entités objectives dont parleraient leurs unités respectives, un tel passage ne peut être établi sans un examen des correspondances articulatoires entre les expressions qui les constituent, dont la notion de contenu conceptuel est la condition, tout comme sa détermination en est le résultat.

L'essentiel du labeur philosophique de Frege dans cette première période de production logique, qui va de la *Begriffsschrift* jusqu'aux textes qui précèdent les *Grundlagen*, consiste précisément dans cette confrontation des aspects articulatoires des différents systèmes expressifs tels que la langue courante, la Syllogistique ou la logique booléenne. La notion de contenu conceptuel, en tant que principe formel d'invariance, est ce qui rend possible cette confrontation, par laquelle le système proposé par Frege sera à la fois construit et justifié dans le même mouvement. Mais dans quelle mesure le système frégéen est-il *effectivement* construit à partir de cette confrontation des expressions guidée par la notion de contenu si, comme Baker et Hacker l'ont très justement remarqué, la proposition d'une procédure précise et effective pour la détermination des différents éléments logiques n'est jamais donnée par Frege ? En fait, l'affirmation de ces deux auteurs doit être nuancée. S'il est vrai que l'on ne peut trouver sous la notion de contenu conceptuel une procédure de détermination strictement opérationnelle, capable de décider algorithmiquement avec cohérence les aspects sémantiques de tout système formel, comme l'exigerait une conception moderne ou contemporaine, la tâche de la notion frégéenne de contenu ne se limite pourtant pas à la thématisation purement conceptuelle du rapport contenu-expression médiatisé par la déduction. À partir de cette thématisation, Frege propose une série d'instruments qui sont le résultat direct d'une réorganisation du plan expressif en fonction de la structuration complexe entre expression, contenu et déduction. Que cette reformulation des instruments formels comporte un degré d'efficacité pour la logique au-delà de la simple justification philosophique, Frege s'occupe de le montrer lui-même en mesurant les effets de leur adoption aux capacités de la logique booléenne. Qui plus est, ce sont précisément ces instruments qui se comptent au nombre des grandes contributions de Frege à la science de la logique.

La première des distinctions établies par Frege, et pour ainsi dire, la plus générale, a néanmoins été systématiquement négligée au moment de considérer l'apport frégéen au développement d'une logique formelle. Il s'agit de la distinction, au niveau des expressions, entre une *partie « formelle »* et une *partie « proprement de contenu »*. Dans ses propres termes :

> …on peut distinguer [dans tout langage perfectionné] la partie formelle, qui, dans le langage des mots, est constituée par les terminaisons, préfixes et suffixes, et les particules, de la partie proprement expressive de contenu. (Frege, 1880-81, p. 22)

Ainsi ressort avec clarté la façon dont la distinction entre forme et contenu est portée au niveau même des expressions. On peut voir aussi dans quelle mesure ce déplacement a un sens opératoire précis : elle permet d'établir, à l'intérieur du plan des expressions, celles qui définissent le domaine pur de la logique. Celles-ci, considérées comme des constantes logiques, resteront fixes tandis que les expressions de contenu pourront varier suivant la nature du contenu traité :

> …l'utilisation de cette symbolique en d'autres domaines [que les mathématiques] n'est pas exclue. Les rapports logiques sont partout, et les signes affectés aux contenus particuliers peuvent être choisis de telle sorte qu'ils s'insèrent dans le cadre de l'idéographie (Frege, 1882b, p. 69)

Bien que Frege ne développe pas toutes les conséquences formelles et opératoires de cette distinction, il est évident que ce partage des expressions en « formelles » et « de contenu » constitue la première incorporation à l'intérieur d'un système formel de *la distinction entre termes logiques et non logiques*, qui deviendra essentielle lorsque l'échec du programme logiciste fera monter au premier plan les problèmes d'une sémantique formelle[107]. On a souvent signalé le caractère intuitif ou arbitraire de la manière dont Frege trace effectivement la frontière entre la partie strictement formelle et la partie expressive du

[107] Sur la distinction entre termes logiques et non logiques, voir Carnap (1958), notamment la section 3.a.

contenu dans son langage formulaire. Cette remarque remonte déjà à Wittgenstein, qui dans son *Tractatus* (1921/1993, § 5.4) conteste tout simplement l'existence de constantes logiques ou de signes primitifs tels que Frege les comprendrait[108]. Mais si la délimitation effective de cette frontière par Frege peut *de fait* comporter des aspects sans autre justification que l'évidence immédiate, cela ne tient pas à la façon dont la distinction entre expressions formelles et expressions de contenu est définie. En effet, tant à l'intérieur des expressions formelles elles-mêmes, que de ce qui distingue celles-ci des expressions de contenu, les frontières sont mobiles. Dans le premier cas, Frege reconnaît bien que le choix de signes primitifs n'est pas déterminé *a priori*, et que des critères supplémentaires, comme la simplicité ou la fréquence d'utilisation, doivent être introduits. Ainsi, en considérant l'alternative entre l'égalité et la conditionnalité, ou entre la disjonction exclusive ou non-exclusive, il affirme :

> On pourrait considérer que le choix de signes primitifs ayant un contenu simple s'impose du seul fait que nous ne pourrions pas exprimer à l'aide de signes plus riches des contenus plus simples. Mais en réalité ce n'est pas impossible ; simplement ce qui est fréquent serait représenté à l'aide d'une formule plus compliquée que ce qui est rare. (Frege, 1880-81, p. 48)

Quant à la frontière entre la partie formelle et la partie de contenu des expressions, la comparaison avec le langage des mots, dans lequel les rapports purement logiques seraient exprimés par les terminaisons, préfixes, suffixes et particules, témoigne contre l'idée d'un partage évident et clairement déterminé entre ce qui, parmi les expressions, relève de la forme et ce qui relève du contenu. La considération du plus simple des verbes irréguliers suffit pour s'en convaincre. Et même si Frege ne pousse pas plus loin l'analyse de cette question, la confrontation avec l'organisation générale du langage naturel n'est pas occasionnelle. Frege y insistera dans un autre texte de cette période :

> Je veux fondre les quelques signes que j'ai introduits avec les signes mathématiques en un seul formulaire. Les signes existants correspondraient à peu près aux racines des mots, tandis que les signes introduits sont à comparer aux terminaisons et aux particules qui établissent des rapports logiques entre les contenus des racines. (Frege, 1882c, p. 73)

Tout comme dans le cas des articulations formelles du contenu, le langage courant sert ici à la fois de modèle et de repoussoir. Et le fait que la construction d'une idéographie doive surmonter la fluidité et le vague sous lesquels se présentent dans le langage les propriétés que

[108] Dans un tout autre contexte, Jean Cavaillès (1938/1994, p. 174) parle d' « évidence immédiate » des lois logiques chez Frege et Russell.

la logique doit retenir, loin de faire disparaître le problème de la frontière entre termes logiques et non logiques, oblige à le poser avec plus de force encore.

Aussi, Frege ne se contente-t-il pas de proposer cette distinction, qui est déjà capitale du point de vue opératoire. Obligé de se justifier devant les Booléens, il suggère aussi à plusieurs reprises un critère selon lequel le choix des termes formels doit être réalisé. Ce critère est, comme il a été dit, celui de la simplicité. Mais on aurait tort de croire que Frege introduit par là un critère externe à la logique, puisque par la manière dont il la définit, la simplicité se détermine de la même façon que le reste des instruments formels qui composent l'idéographie, à savoir par un rapport entre le plan des expressions (comprenant tant les expressions de formes que celles de contenus) et le plan des contenus :

> J'ai suivi une autre voie [que celle de Boole], en donnant à chaque signe primitif une signification [*Bedeutung*] la plus simple possible. Si, de deux désignations, l'une dit tout autant que ce que l'autre signifie, alors que cette dernière ne contient pas la totalité du sens [*Sinn*] de la première, alors je nomme la signification de la seconde plus simple que celle de la première, *puisqu'elle a moins de contenu*. (Frege, 1882a, pp. 62-63, nous soulignons)

Moins une expression exprime de contenu, plus elle est simple. Plus une expression est simple, plus elle est susceptible d'être prise comme terme logique. Ainsi, Frege répond de façon originale aux accusations de ses critiques qui dénonçaient la « complexité excessive des notations » et demandaient « une grande simplification des formules » (Tannery, 1879, p. 233), et qui considéraient une pédanterie futile l'utilisation d'un seul connecteur (Schröder, 1880b, pp. 227-229). *Car la simplicité logique ne saurait être une affaire de simplicité dans les expressions, mais dans les contenus*. Un contenu logique n'est pas simple parce qu'il se laisse exprimer en peu de signes, mais parce que les autres contenus se laissent exprimer à partir de lui. Or, suivant ce raisonnement, ne pourrait-on croire que les termes purement logiques sont ou doivent être, à la limite, totalement vides de contenu ? Ce sera la thèse du Wittgenstein du *Tractactus*, ainsi que du Carnap de la *Syntaxe Logique du Langage* (1937/2001). Et c'est aussi ce que Frege laisse parfois entendre, lorsqu'il affirme que les formules valables indépendamment des contenus « ne contiennent aucune information sur ceux-ci. » (1880-81, p. 54), ou lorsqu'il exprime des doutes quant à la possibilité de parler de contenu pour les propositions purement logiques[109]. Mais ces remarques sont rares et isolées, et la considération des contenus des termes logiques (de leur richesse et de leur pauvreté, de leur généralité ou des inclusions respectives, de leur parenté avec les contenus d'autres

[109] Frege (1880-81, p. 49) : « Le fait pour mes propositions d'avoir un contenu satisfaisant, *si tant est qu'on puisse après tout parler de contenu pour les propositions purement logiques*, suit du fait qu'elles suffisent » (nous soulignons).

notions), est à la fois constante et décisive dans la détermination et la justification des outils élaborés par Frege dans cette période. Si bien que, comportant le moindre contenu possible, les termes logiques ne doivent pas être entièrement vides de contenu pour autant. Sortes de degrés zéro du contenu, ils doivent pourtant posséder un minimum de prise sur les contenus à partir de laquelle la composition de contenus plus complexes devient possible. C'est ainsi qu'au moment de choisir le connecteur logique fondamental, Frege appelle à ce critère, qu'il applique de la manière suivante :

> Si l'on applique ce critère [du moindre contenu], on voit qu'une relation la plus simple possible entre deux contenus jugeables *A* et *B* s'obtient par la négation de l'un des quatre cas : *A* et *B*, *A* et non *B*, non *A* et *B*, non *A* et non *B*, car la négation de deux de ces cas dit plus que celle d'un seul, et la négation de trois plus encore : elle est équivalente à l'affirmation du quatrième. (Frege, 1882a, p. 63)

On comprend alors que la notion de « moindre contenu », au moins quant aux contenus des termes logiques, trouve chez Frege un sens informationnel, sur fond combinatoire : toutes les combinaisons étant données, la configuration ayant le moindre contenu sera celle qui demande le moins d'information pour être établie (la marque de la négation jouant ici le rôle d'élément informatif, et la combinaison sans marques – correspondant typiquement à la tautologie – étant exclue parce que sans information, c'est-à-dire sans contenu). Mais on voit aussi que ce critère n'est pas entièrement déterminant, puisqu'il fournit plusieurs possibilités équivalentes quant à la « quantité » de contenu. D'autres critères peuvent alors entrer en ligne de compte, concernant généralement des aspects pratiques dans la manipulation des signes, tels que la facilité par rapport à l'inférence ou la parenté de contenu avec d'autres notions. Ce qui permet à Frege de choisir, parmi les quatre possibilités, la négation du troisième cas (« non *A* et *B* ») comme connecteur logique fondamental (qu'il appelle « conditionnalité » et qui correspond à ce qu'on appellera plus tard « implication ») (Frege, 1880-81, p. 48)[110].

Se dessine ainsi le sens très précis et positif que prend chez Frege la destitution de la centralité de l'opposition entre forme et contenu en fonction de la dualité contenu-expression. Le nouveau traçage des lignes selon lequel forme et contenu peuvent maintenant être capturés tous les deux sur le plan expressif, se déterminant dans son ensemble dans un rapport avec un plan de contenus, n'est pas purement spéculatif. Sans diminuer son immense portée philosophique, cette nouvelle distribution des lignes de démarcation est douée également

[110] Frege mentionne aussi de la proximité de cette notion de conditionnalité ou implication et de celle de causalité (1882c, p. 75), proximité qui est aussi distance, et qu'il s'était occupé de préciser déjà dans la *Begriffsschrift* (1879/1999, pp. 19-20). Cette proximité peut sans doute être considérée comme un aspect supplémentaire de la prise en charge des contenus pour la détermination des expressions formelles.

d’une efficacité dont les résultats se laissent mesurer aux résultats des systèmes logiques existants.

Aussi, Frege confronte-t-il son propre système à celui de Boole, puisque c’est au nom de l’efficacité de celui-ci que ses critiques avaient méprisé son idéographie. Il remarque alors le manque chez Boole d’une distinction entre expressions formelles et expressions de contenu. Cette absence témoigne suffisamment de la différence de nature entre les deux systèmes (celui de Frege ayant pour but précisément l’expression des contenus). Mais même en restant au seul niveau des expressions, le manque d’une distinction expose les signes du système booléen au risque de l’ambiguïté de sens. Ainsi, la conjonction logique de deux propositions mathématiques telles que « $4 + 1 = 5$ » et « $2 \times 2 = 4 + 0$ », s’exprimerait dans le langage booléen « $4 + 1 = 5 + 2 \times 2 = 4 + 0$ », ou dans les meilleurs des cas « $(4 + 1 = 5) + (2 \times 2 = 4 + 0)$ », ce qui ne se laisse pas lire sans équivocité à cause du double sens (logique et arithmétique, autrement dit, formel et de contenu) des signes $+$, $\times$, $=$, 1 et 0 dans le langage de Boole. Celui-ci se révèle de ce fait impropre pour accueillir un contenu arithmétique :

> …il n’est pas possible que dans la même formule le signe $+$ ait tantôt le sens logique, tantôt le sens arithmétique. L’analogie entre les calculs logique et arithmétique, précieuse pour Boole, ne peut manquer d’avoir un effet fallacieux lorsqu’on entreprend de les réunir. On ne peut envisager la symbolique de Boole que dans un domaine totalement séparé de l’arithmétique. (Frege, 1882c, pp. 73-74)

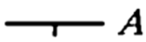
Le besoin de distinguer entre signes de forme et signes de contenu s’est fait sentir à l’intérieur de la tradition booléenne même, comme le montrent les virgules dont Peirce (1867/1933) marque les signes logiques pour les distinguer des signes arithmétiques. Mais même dans le cas où les signes utilisés par Boole seraient remplacés par d’autres tout en gardant leur sens opératoire (ce qui contournerait le problème de l’équivocité), le fait de placer les signes logiques au même niveau que ceux du contenu confronte le langage à un nouveau risque, à savoir celui de la lourdeur et de la confusion. Si cette lourdeur n’apparaît pas à première vue dans l’écriture booléenne, c’est précisément dans la mesure où, insouciant de l’expression des contenus, Boole ne fait qu’indiquer les contenus au moyen de simples lettres. Mais dès que ces lettres sont remplacées par de véritables expressions de contenus, on peut voir la formule, qui s’étend à droite et à gauche de la ligne d’écriture, se lester d’une complexité et d’une lourdeur qui deviennent rapidement ingouvernables. Comme le dit Frege, dans l’expression des rapports logiques par les Booléens,

> …ce qui manque est le contenu. Si l’on tentait de substituer aux lettres l’expression d’un contenu, par exemple une égalité analytique, on montrerait par la confusion, la lourdeur,

l’ambiguïté des formules ainsi obtenues, combien ce mode de représentation convient mal à la constitution d’une idéographie véritable. (Frege, 1882b, p. 68)[111]

La solution proposée par Frege est aussi radicale qu’originale : utiliser les propriétés bidimensionnelles de l’espace comme support expressif des contenus logiques. Ainsi, si les contenus jugeables s’annoncent par un trait horizontal, ce qui peut encore être compris comme un signe ou caractère comme les autres, la conditionnalité (implication) s’exprime par des traits verticaux connectant les traits de contenus disposés de haut en bas selon un rapport conditionné-condition. Ainsi, l’implication notée de nos jours $B \rightarrow A$ s’exprime dans l’écriture frégéenne :

le trait de conditionnalité (vertical) non seulement connectant le trait du contenu conditionné (*A*) à sa condition (*B*), mais établissant en même temps une division sur le trait du contenu conditionné en une zone correspondant uniquement au contenu conditionné (à droite du point de connexion avec le trait vertical) et une zone exprimant la conditionnalité de *A* par *B* dans son ensemble (à gauche du point de connexion). Pour sa part, la négation, exprimée également par un trait vertical placé sous le trait de contenu sous la forme suivante :



établit elle aussi une division entre deux zones de contenu (contenu originel à droite du trait de négation, contenu nié à gauche). Ce partage de l’espace au moyen de traits et de connexions engendre ainsi des places dont la configuration générale exprime de manière sensible l’articulation logique ou formelle des contenus jugeables (Figure 1). *L’espace devient par ce moyen la matière sémiotique sur laquelle les expressions logiques peuvent et doivent être taillées*. Autrement dit, les propriétés de l’espace (bidimensionnalité, divisibilité, connectivité) sont sémiotisées de telle sorte qu’elles deviennent le support expressif des contenus logiques. Ainsi, Frege appuie une partie essentielle de la logique sur des ressorts figuraux qui dépassent la nature purement

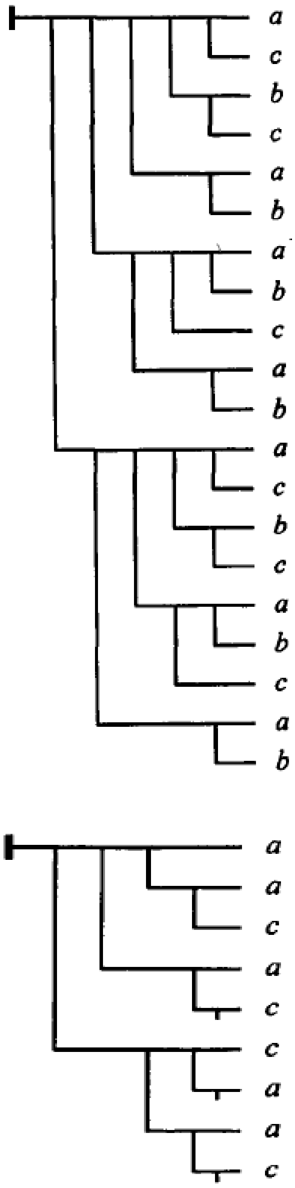


Figure 1

[111] Cf. aussi Frege (1880-81, p. 58).

caractéristique que Leibniz avait imaginée pour elle.

L'utilisation d'une dimension figurale ou diagrammatique pour exprimer les rapports logiques n'est certainement pas nouvelle. Même à l'intérieur de la logique booléenne, il suffit de penser aux diagrammes de Venn, de Lewis Carroll ou de Peirce, qui ne font d'ailleurs que perfectionner le système de diagrammes d'Euler, dont l'utilisation était déjà courante dans les manuels de logique du XIX^e siècle[112]. Mais le statut de ces diagrammes est complètement différent du système de traits conçu par Frege, puisque leur rôle reste purement illustratif : ils ne viennent que redoubler figuralement l'ensemble de rapports logiques exprimés par les symboles algébriques dans lesquels s'écrit la logique booléenne. Ces diagrammes remplissent donc uniquement une fonction d'aide intuitive. Dans le cas de Frege, en revanche, les traits spatiaux ou diagrammatiques n'illustrent aucun rapport exprimé par d'autres signes, mais s'intègrent aux signes *caractéristiques* (c'est-à-dire aux caractères) pour constituer un seul et même système d'écriture. En plus de la clarté intuitive que l'utilisation des propriétés spatiales offre[113], la distinction à l'intérieur d'un même système d'écriture de deux régimes sémiotiques différents qui se combinent sans superposition (diagrammatique, caractéristique) *est elle-même signifiante*. Elle est la marque, sur le plan expressif, de la différence entre deux types d'expressions de nature diverse : les expressions formelles et les expressions proprement de contenu[114]. Frege est bien conscient de cette fonction signifiante de la différence de régimes sémiotiques à l'intérieur de l'idéographie. On le voit lorsqu'il affirme que « la simple disposition en une série linéaire ne correspond nullement à la multiplicité des rapports logiques suivant lesquels les pensées sont liées les unes aux autres. » (1882b, p. 67). Et peu après :

> L'idéographie tire profit de la double dimension du plan d'écriture, elle dispose à la suite, l'un sous l'autre, les contenus de jugement, tandis que chacun d'eux se déploie de gauche à droite. Ainsi, chaque contenu est nettement séparé des autres et on perçoit cependant aisément leurs rapports logiques. Chez Boole, on aurait une seule ligne, bien souvent

---

[112] Voir Venn (1881) et l'intéressant livre de Sun-Joo Shin (1994) sur le statut des diagrammes de Venn dans la logique.

[113] Frege souligne cette fonction de clarté à plusieurs reprises. Voir par exemple Frege (1880-81, p. 58), (1882b, p. 67), (1882c, p. 77) et (1897, p. 236).

[114] La disparition presque immédiate de cette différence de régimes sémiotiques à l'intérieur des écritures logiques issues de la tradition inaugurée par Frege, liée fondamentalement à l'adoption par Russell du système d'écriture de Peano, est un signe de la perte de cette distinction fondamentale que Frege avait su établir avec finesse. Frege le ressent avec une certaine inquiétude dans son commentaire de la notation de Peano en 1897 : « …des efforts apparaissent maintenant, pour comprimer chaque formule en une ligne. Dans l'idéographie de Peano, la présentation en une seule ligne des formules semble être accomplie par principe, ce qui me semble un abandon délibéré de l'un des avantages principaux de l'écriture sur la parole. Accommoder l'éditeur n'est, en effet, pas le plus grand bien. » (1897, p. 236). La dimension diagrammatique réapparaîtra cependant plus tard assumant un rôle décisif dans d'autres contextes, telles la Théorie de catégories ou la Logique linéaire, sans qu'aucun lien avec l'idéographie frégéenne ne soit pourtant reconnu.

> démesurément longue. Boole n'ayant jamais envisagé un tel emploi de ses formules, il serait fort injuste de lui imputer les inconvénients bien visibles qui en résulteraient. Mais il serait aussi injuste de tenir la consommation d'espace comme une faute de l'idéographie, quand *il ne s'agit de rien de moins que d'indiquer un contenu*. (Frege, 1882c, p. 77, nous soulignons)

Frege montre de cette manière que la prise en compte du contenu en tant que problème logique permet de mieux résoudre les aspects formels qui étaient la préoccupation fondamentale, voire exclusive, de Boole et des Booléens. Et cela, grâce à la possibilité d'établir un partage bien déterminé à l'intérieur de l'ensemble des expressions entre celles qui expriment des rapports formels et celles qui expriment des contenus. Partage qui, non seulement est déterminé de façon immanente selon des critères formels concernant la corrélation entre le plan des expressions (formelles et de contenu) et le plan des contenus, mais qui en plus trouve une façon de s'exprimer lui-même dans le système au moyen, non d'un signe, mais d'une différence entre deux régimes de signes.

Cette organisation sémiotique générale que Frege établit pour la logique habilite une série de critiques au système booléen par comparaison avec son idéographie, qui englobent autant de réponses aux critiques adressées par Schröder dans sa recension, sans s'y réduire pour autant. Devant l'idéographie, le système des Booléens apparaît comme étant *plus complexe*, car son signe fondamental (l'égalité) exprime un contenu formel moins simple que la conditionnalité de Frege (la simplicité logique étant une affaire de contenu et non pas d'expression) ; *plus confus*, à cause de l'ambiguïté du sens des signes par rapport à certains contenus ; *moins apte à la déduction*, car les signes logiques s'inscrivant unidimensionnellement sur la même ligne que les signes de contenu, l'organisation logique dont dépend la déduction n'est pas clairement exprimée ; *moins organique*, parce que les différents niveaux du contenu (concepts, jugements) ne sont pas intégrés dans le même système et selon un même principe ; *plus artificiel*, car les rapports logiques sont exprimés par des signes empruntés à une science particulière (« l'arithmétique »), dont le sens ne coïncide pas entièrement avec les rapports qu'ils sont appelés à exprimer[115]…

I.2.4. Les formes de l'expression : expressions de contenu

Mais une fois élaborées toutes ces critiques concernant fondamentalement la partie formelle des expressions, l'articulation sémiotique générale du système, déterminée par la

[115] Voir Frege (1880-81, pp. 20-21).

dualité expressions-contenus, permet à Frege de préciser de façon très concrète ce qui constitue la différence fondamentale de son système par rapport à celui de Boole. Car lorsqu'expressions formelles et de contenus se trouvent si nettement distinguées, l'expression des contenus d'un système comme celui des Booléens montre toute sa faiblesse. Placées verticalement l'une après l'autre au milieu d'une configuration diagrammatique, on voit immédiatement que ces expressions se réduisent à de simples lettres. Ce qui revient à dire que par ce moyen le contenu n'est pas exprimé du tout, mais uniquement suggéré ou indiqué (*andeuten*). Les expressions formelles ne mettent ainsi en rapport que des contenus qui doivent être déjà donnés en dehors de la logique. Comme le dit Frege, « Boole présuppose comme tout prêts des concepts logiquement parfaits, et donc comme accomplie la partie la plus difficile du travail… » (1880-81, p. 45). Pour des concepts ainsi donnés, les rapports conceptuels sur lesquels la déduction peut prendre appui se réduisent à des rapports d'inclusion ou exclusion (totale, partielle ou nulle) entre concepts, rapports qui doivent être fournis préalablement. Ainsi, étant donnée la définition des « animaux purs » comme ceux qui ont la patte fourchue et qui jouissent de la faculté de ruminer, on demandera la description des « animaux impurs », pour trouver l'ensemble des animaux qui ont la patte fourchue sans jouir de la faculté de ruminer, qui jouissent de la faculté de ruminer sans avoir la patte fourchue, ou qui n'ont pas la patte fourchue ni ne jouissent de la faculté de ruminer (Boole, 1854, pp. 93-94). Des rapports semblables se laissent déterminer par ce que Schröder appelait « calcul de l'identité de domaines d'une multiplicité », et peuvent être illustrés entièrement au moyen des diagrammes de Venn. Mais comme l'exemple le montre bien, les éléments constituant le contenu (matériau conceptuel et rapports entre concepts) sont donnés une fois pour toutes, et le calcul logique se voit limité à la simple tâche de les réordonner autrement. Un nouveau concept (tel « animal impur ») n'est que la réorganisation des concepts déjà donnés, selon les opérations habilitées sur les rapports donnés entre ces concepts. Du point de vue du contenu, rien n'est produit par la logique qui ne soit déjà compris dans le matériau conceptuel donné au préalable et extérieurement. Comme Frege le dit, en référence aux diagrammes de Venn, on n'y peut déterminer des concepts qu'à partir des lignes déjà existantes. Mais une logique capable de prendre en charge le contenu doit être une logique qui aurait le pouvoir de tracer des lignes nouvelles, c'est-à-dire de déterminer ses propres concepts à partir de ses instruments d'une manière que ceux-ci ne laisseraient pas voir à l'avance (1880-81, pp. 44-45)[116]. Autrement dit, le contenu ne doit pas être « simplement indiqué, mais construit à partir

[116] Frege reprend cette image des lignes de démarcation en référence aux diagrammes de Venn dans les *Grundlagen* (1884/1969, p. 212), dans le contexte du débat kantien sur la possibilité pour les énoncés purement logiques d'accroitre la connaissance.

de ses constituants à l'aide des mêmes signes logiques que ceux utilisés pour le calcul » (1880-81, pp. 45-46).

C'est alors que deux des grandes inventions frégéennes trouvent leur place et leur sens. La première est celle du célèbre *signe de fonction propositionnelle*. Nouvelle façon de capturer l'organisation intrinsèque de la proposition à l'écart du rapport classique entre sujet et prédicat, la fonction propositionnelle constitue le reflet sur le plan des expressions de l'articulation propre au contenu telle qu'elle ressortait de la critique de l'articulation expressive du langage naturel. En effet, les différentes figures par lesquelles le contenu conceptuel se voyait déterminé étaient le résultat d'un principe de variation-invariance portant sur les jugements. C'est précisément ce principe formel que l'usage du symbole de fonction cherche à capturer :

> Si, dans une expression dont le contenu n'a pas besoin d'être jugeable, un signe simple, ou composé, apparaît à une ou plusieurs places, et si nous pensons que ce signe est remplaçable à toutes ou à quelques-unes de ces places par autre chose, mais partout par la même chose, alors nous appelons la partie de l'expression se présentant invariablement [*unveränderlich*], fonction et la partie remplaçable, son argument. (Frege, 1879/1999, pp. 30-31)

La fonction propositionnelle est composée ainsi d'un signe pour ce qui est considéré comme susceptible de variation (argument) et un autre pour ce qui reste invariant (fonction). Mais, comme le dit Frege peu avant, tant que les deux signes expriment des choses précises ou déterminées, l'expression ainsi articulée « n'a rien à voir avec le contenu conceptuel », le choix entre ce qui est fonction et ce qui est argument dans une expression étant « une simple question de point de vue » (1879/1999, pp. 29-30). La distinction entre fonction et argument devient véritablement expressive du contenu lorsque la variabilité apparaît comme telle, c'est-à-dire lorsque le signe d'argument est laissé indéterminé. On voit alors que ce ne sont pas les signes de fonction et d'argument eux-mêmes qui sont expressifs, mais l'articulation de variation-invariance, d'indétermination-détermination, que leur composition réalise :

> …par moyen de l'opposition entre le *déterminé* et l'*indéterminé*, ou entre *plus* ou *moins* déterminé, la totalité est analysée *en fonction* et *argument* selon son contenu et pas selon notre point de vue. (Frege, 1879/1999, p. 31)

Si ce n'est qu'alors, et alors seulement, que l'expression gagne en « signification *de contenu* [inhaltliche *Bedeutung*] » (p. 31), c'est précisément dans la mesure où le contenu (conceptuel) n'est rien d'autre que ces figures que nous avons vu se dégager de l'analyse du langage en termes du rapport expression-contenu. En effet, lorsque le signe d'argument est laissé indéterminé, une expression fonctionnelle est capable d'exprimer la série presque complète des figures selon lesquelles s'ordonne le contenu : *le contenu jugeable*, en tant que tout articulé (exprimée par la composition des signes de fonction et d'argument) ; *le concept*, en tant que composante de ce tout assumant la fonction articulatoire (indiqué par le signe de fonction) ; *l'individu*, en tant que composante inarticulée (indiqué par le signe indéterminé de l'argument). Et bien que les signes en question indiquent un contenu, cette indication n'est pas de même nature que celle des lettres booléennes que Frege critiquait, puisque contenu jugeable, concept et individu, n'existent pas indépendamment, mais uniquement en tant que complexe articulé, que la proposition, sous sa nouvelle forme de fonction propositionnelle, a cessé de simplement indiquer, pour exprimer dans toute ses dimensions.

Comme corollaire d'une telle situation, un certain décalage au niveau des expressions devient décisif pour la capacité d'un système logique d'exprimer des contenus. Car tant que les deux signes de la proposition restent déterminés, l'expression n'a pas de vraie prise sur le contenu, et ses éléments demeurent interchangeables selon des critères extralogiques. La signification de contenu n'est gagnée par l'expression propositionnelle qu'à condition d'introduire une dissymétrie entre ses termes (déterminé-indéterminé). Cette dissymétrie n'est que le reflet sur le plan des expressions de celle qui sur le plan des contenus définit la différence de niveau articulatoire informant la distinction entre concept et individu[117]. Une telle différence réclame une marque spécifique sur le plan expressif. C'est pourquoi Frege distingue le signe de fonction de celui d'argument en mettant celui-ci entre parenthèses. Par la mise en avant de cette différence, qui résulte entièrement du principe articulatoire selon lequel contenu et expression se rapportent l'un à l'autre suivant une critique du langage courant, Frege se démarque une fois de plus de la logique booléenne, dans laquelle cette distinction reste vague, sinon ouvertement négligée :

> Grâce à cette conception, on rendra également justice à la différence entre concept et individu, qui, chez Boole, est complètement effacée. Ses lettres ne signifient à proprement parler jamais des individus, mais toujours des extensions de concepts. C'est-à-dire que nous devons faire une différence entre concept et chose même dans le cas où il ne tombe qu'une chose unique sous le concept. Le concept « planète dont la distance par rapport au soleil se situe entre celle de Vénus et celle de Mars » est encore quelque chose d'autre que l'individu Terre, quand bien même seul celui-ci tombe sous ce concept. Sinon on ne pourrait former des concepts de contenus différents dont les extensions se limiteraient au seul individu Terre. Dans le cas d'un concept, les questions peuvent toujours être posées de savoir si quelque chose et quelle chose tombe sous lui, questions qui dans le cas d'un individu sont dépourvues de sens. De même, il faut distinguer le cas de la subordination d'un concept sous

[117] Frege considère aussi la possibilité de laisser indéterminé le signe de fonction face à un argument déterminé (1879/1999, pp. 31-33), sans qu'il semble prendre mesure de toutes les conséquences d'une telle opération : l'application ultérieure du signe de généralité au signe de fonction (c'est-à-dire la quantification sur des concepts et non sur des individus) fait de l'idéographie une logique du second ordre.

un autre du cas où une chose tombe sous un concept, bien que le langage exprime les deux sous la même forme. (Frege, 1994, p. 27)[118]

Toutefois, avec la présence nécessaire d'un signe indéterminé dans l'expression propositionnelle, un nouveau problème apparaît. Puisque tant que le signe reste indéterminé, la vérité de la proposition reste en suspens, et le contenu jugeable demeure incapable de s'articuler au niveau de la vérité et la fausseté. Néanmoins, la substitution du signe indéterminé par un signe déterminé qui permettrait d'attribuer la vérité ou la fausseté au jugement rend, comme nous l'avons vu, l'expression propositionnelle indifférente au contenu (le complexe fonction-argument devient dans ce cas équivalent aux simples lettres du système booléen). C'est dire que la fonction propositionnelle ne suffit pas à elle seule pour exprimer la totalité des figures de contenu ; celle de la vérité et de la fausseté exige, dans le cadre de l'articulation fonctionnelle, des mécanismes expressifs supplémentaires. Plus précisément, un outil est nécessaire capable de fixer le décalage expressif propre à la fonction propositionnelle et de le rendre utilisable. L'expression de *généralité* ou *universalité* (*Allgemeinheit*), deuxième grande invention frégéenne concernant les expressions proprement de contenu, vient résoudre ce problème. De fait, c'est cela sa définition même. Appliquée à une fonction propositionnelle, cette expression veut dire que « cette fonction est un fait, quoi que l'on considère comme étant son argument » (1879/1999, p. 33). Autrement dit, le jugement est vrai pour n'importe quel signe déterminé capable de substituer le signe indéterminé. Dès lors, le signe indéterminé peut valoir comme tel et l'expression propositionnelle qui le contient devient susceptible de vérité, tout en gardant la dissymétrie interne qui la rend expressive d'un contenu.[119]

Par ce moyen, Frege renouvelle de façon radicale la conception de la quantification telle qu'elle se trouvait pratiquée par la logique depuis Aristote, même dans la version améliorée de la logique booléenne avec ses coefficients (1, 0 et *v*). Et cela parce que, par la façon dont la généralité frégéenne est définie, l'expression de généralité ne porte pas sur d'autres

---

[118] Voir aussi Frege (1882c, pp. 71, 72), où Frege dénonce l'absence de tout signe pour les individus dans la logique de Boole, et Frege (1976, pp. 163-164), où reprenant les mêmes arguments, il affirme que pour Boole « seul les concepts existent réellement ». Même dans le système amélioré de Peirce, on peut s'étonner de voir comment la distinction entre concept et individu ne trouve pas la marque sémiotique formelle sur laquelle Frege insiste tellement. Dans un texte de 1890, Peirce (1890/2010, p. 55) écrit : « I write l_i to mean that two objects *l* and *i* are connected. These two objects generally pertain to different universes; thus, *l* may be a *character* and *i* a *thing*. But there is no reason why I should not, instead of l_i, write (l, i), except that the first way is more compact. ».

[119] Ce rapport intime entre la théorie de la quantification et la fonction propositionnelle est reconnu par Peckhaus (2012a). Il détermine à notre avis la différence majeure entre la théorie frégéenne de la quantification et celle de Peirce, où les quantificateurs sont envisagés comme des sommes ou des produits, en accord avec le cadre booléen où elle prend racine. Sur la théorie peircienne des quantificateurs logiques, on pourra consulter l'article de Beatty (1969).

expressions, mais sur le contenu de ces expressions. Frege le dit lui-même en opposant les contenus jugeables aux jugements :

> On distingue les jugements *généraux* des jugements *particuliers :* ceci n'est pas, à proprement parler, une distinction de jugements, mais de contenus. *On devrait dire : 'un jugement de contenu universel', 'un jugement de contenu particulier'.* En effet, ces qualités sont aussi attribuées au contenu quand il *n'est pas* présenté comme jugement, mais comme proposition. (Frege, 1879/1999, p. 18)

Frege critique ainsi la théorie classique de la quantification, selon laquelle les jugements affirmatifs et négatifs se divisent à la fois en universels et particuliers (les quatre combinaisons possibles étant représentées typiquement par les lettres A, E, I, O). Il soutient alors que l'universalité ou la particularité sont antérieures à l'affirmation, autrement dit, antérieures au jugement, et donc attribuables au contenu jugeable que celui-ci exprime. Mais sa conception de l'universalité permet de critiquer également la théorie de la quantification booléenne, où les coefficients portent, non pas sur la totalité du jugement, mais sur les différents composants de la proposition selon une double quantification, à la fois du sujet et du prédicat[120]. Et cela, d'une part, parce que le signe quantifié dans l'idéographie étant un signe indéterminé, la quantification ne se réfère pas à lui, mais aux éléments du contenu qui pourraient le déterminer. Si on laisse de côté la quantification des fonctions, que Frege évoque mais ne traite qu'allusivement dans l'idéographie, cela veut dire qu'en s'appliquant au signe indéterminé d'argument, *l'expression de généralité porte sur ces formes élémentaires du contenu qui sont les individus*. L'expression d'un contenu universel se laissera ainsi lire sous la forme « tous les éléments qui… » (« tous les éléments qui sont des hommes » au lieu de « tous les hommes »). Mais d'autre part, parce que portant sur les éléments du contenu, la négation de la généralité, au moyen de laquelle la particularité se laisse exprimer, *acquiert une portée existentielle*. Cette portée faisait défaut dans le système de Boole, car l'opérationnalisation du coefficient indéterminé *v*, exprimant la quantification particulière d'un concept, se laissait interpréter comme « quelques », pouvant aussi signifier « aucun » ou « tout » selon le contexte[121]. En « parlant par figures » : ne comptant que sur les lignes existantes, la sélection d'une région particulière de l'aire délimitée par ces lignes manque de déterminations. Mais parce que la quantification frégéenne ne sélectionne pas des parties

---

[120] Ainsi, le jugement « Tous les hommes sont mortels » devient « Tous les hommes sont quelques mortels », exprimé par l'équation $y = vx$, où y (qu'il faut voir comme multiplié par le coefficient 1, qui exprime la totalité de l'univers) est le signe pour le concept « homme », x pour « mortel », et v est un coefficient exprimant une quantité indéterminée (« quelques »). Pour la théorie de la quantification chez Boole, et les problèmes qu'elle soulève, voir Hailperin (1986, pp. 108-112).

[121] Pour le problème de la portée existentielle du quantificateur particulier chez Boole, voir Hailperin (1986, pp. 108-112).

d’extensions de concepts, mais des éléments du contenu (tombant ou pas sous des concepts), la négation de la généralité d’une fonction propositionnelle se laisse interpréter comme : non pas tous les éléments tombent sous le concept exprimé par la fonction. Ce qui revient à dire qu’il existe au moins un élément qui ne le fait pas, et ainsi l’existence trouve à l’intérieur du système la manière formelle de s’exprimer qui manquait aux systèmes logiques précédents. Par ailleurs, le reste de combinaisons entre le signe de négation et le signe de généralité élargit sensiblement le pouvoir expressif détenu typiquement par la quantification dans les systèmes logiques[122].

Cette capacité à renvoyer directement aux constituants élémentaires du contenu ferme la boucle de la prise en charge du contenu à l’intérieur des filets formels de la logique. Car par le truchement de cette articulation expressive, donnée par la combinaison de la fonction propositionnelle et du signe de généralité, la logique acquiert les moyens sémiotiques qui la pourvoient d’une puissance purement déictique, ostensive ou référentielle, qui ne relève pas de l’interprétation. C’est-à-dire, exactement ce dont la logique, telle qu’elle était conçue par ses prédécesseurs, devait se déprendre pour atteindre l’abstraction du contenu qui lui permettrait de devenir purement formelle. Ainsi que l’exposait Boole :

> Are we bound when conducting the processes of reasoning by means of language to keep constantly in mind the conditions of interpretability and therefore to employ forms which impose such conditions then only when those conditions are actually satisfied? Is Logic necessarily ostensive in its character? Or is the intellectual procedure in Logic governed solely by a reference to abstract *forms* and laws? If the latter view be adopted Logic might be described (to use a term which has already been employed) as a noetic not an ostensive science.
>
> I hold […] the latter view. (Boole, 1856, p. 72)

Cette nouvelle capacité des expressions logiques à renvoyer aux éléments du contenu ne va pas cependant sans engendrer un rapport de type nouveau entre les propositions. Dans la Syllogistique classique, le lien entre les propositions sur lequel la possibilité de la déduction était entièrement appuyée consistait dans une certaine communauté de concepts entre les propositions en question. Ainsi, les prémisses communiquaient par le moyen terme, et la conclusion communiquait avec les prémisses par les termes majeur et mineur. Si la méthode d’élimination de la logique booléenne généralise de façon extraordinaire ce procédé[123], elle ne conteste pas ce principe fondamental selon lequel c’est par des concepts communs que les

[122] Pour une perspective générale sur les voies ouvertes par la théorie moderne de la quantification introduite par Frege, on pourra voir l’article de Gila Sher (2012).

[123] Par la possibilité d’éliminer non pas un, mais un nombre quelconque de moyens termes, et sans importer le type de connexion que les termes pourraient avoir entre eux. Voir Boole (1854, Préface 8, et ch. VII).

propositions communiquent. On pourrait certainement dire que ce n'est pas par les concepts mais par les extensions de concepts que sont fondés chez Boole les liens entre les propositions ; et certainement des opérations nouvelles sur les propositions deviennent possibles grâce à la nature extensionnelle de cette logique. Mais concepts et extensions se trouvant dans un rapport de bijection (quitte à former des concepts du type « non-homme »), le principe fondamental de communication de propositions par des concepts communs reste valable. Chez Frege, par contre, les propositions communiquent précisément par ces individus sur lesquels les concepts portent. Si de la vérité de $F(a)$ on peut conclure la vérité de $G(a)$ par des moyens logiques, c'est dans la mesure où les individus indiqués par le signe indéterminé « a » sont les mêmes dans les deux cas. Or, c'est précisément le signe de généralité qui permet de signifier une telle communauté de contenu entre les signes indéterminés des arguments de propositions différentes. Et cela en profitant du partage de l'espace opéré par les traits et les connexions des expressions formelles, qui expriment les rapports logiques et la distribution résultante des propositions ou contenus jugeables. Cette distribution étant structurée comme une hiérarchie de zones ou domaines (*Gebiete*) incluant les différentes expressions propositionnelles, le signe de généralité s'en sert en s'inscrivant comme un creux sur le trait correspondant, pour délimiter l'ensemble de propositions sur lequel porte son action. Une lettre gothique marque alors les signes indéterminés qui, à l'intérieur de ce domaine, seront l'indice des mêmes individus. La communication de propositions par les individus a lieu même dans le cas où l'on conclut logiquement $F(b)$ à partir de $F(a)$, la liaison entre les individus étant ici réalisée par la dépendance entre des quantificateurs portant respectivement sur a et b[124].

La double nature, ou du moins la double appartenance sémiotique du signe de généralité, à la fois comme expression formelle par un creux sur l'arborescence des traits, et comme expression de contenu par la typographie gothique[125] appliquée aux signes à l'intérieur de l'expression propositionnelle, est un témoin de sa place cruciale pour l'intégration générale et l'organicité du système. Frege en est bien conscient, lorsqu'il tient le symbolisme de la généralité

[124] La question de la dépendance des quantificateurs fut soulevée en tant que telle par la première fois par Jaakko Hintikka, à partir d'une critique de la compréhension proposée par Frege de la généralité comme un prédicat de second ordre. Pour une présentation de ces idées, on pourra consulter entre autres Hintikka (1995), (1996, § 3), (1997a), et Hintikka et Sandu (1994). Il nous semble pourtant que la conception de la généralité comme constituant purement expressif, que nous mettons en avant ici et qui n'est autre que celle de la *Begriffsschrift* elle-même, est parfaitement soucieuse de la dépendance des quantificateurs dans la direction indiquée par Hintikka. Cette dépendance est impliquée dans la hiérarchie des domaines déterminés par les expressions formelles (les « traits »), sous la condition desquels a lieu l'écriture de la généralité. La dépendance des quantificateurs est ouvertement envisagée par Frege à partir de la structure des domaines dans la section dédiée à l'introduction de la généralité dans la *Begriffsschrift*, notamment dans (1879/1999, pp. 34-35).

[125] Et latine dans le cas où la généralité porte sur l'ensemble des propositions.

> …pour un des éléments les plus importants de mon idéographie ; c'est par lui que, en tant que simple représentation des formes logiques, elle marque un progrès définitif sur l'écriture de Boole. On pose ainsi un rapport organique entre les *primary* et les *secondary propositions.* (Frege, 1882c, p. 79)

Mais cette importance ne se limite pas à l'aspect formel évoqué par Frege. Car du côté des expressions de contenus, c'est par la généralité aussi que la fonction propositionnelle acquiert une prise nouvelle sur les contenus. Pour reprendre l'illustration de Frege, commandée par l'action de la généralité, l'expression propositionnelle ne renvoie plus aux aires délimitées par les lignes existantes, mais pour ainsi dire, à ce que ces aires contiennent, éléments ou individus, « choses individuelles » comme dit Frege, d'une façon telle que celles-ci peuvent être « reliées par des caractères communs » (Frege, 1880-81, p. 44). Par ce moyen, l'expression permet d'établir un partage entre les éléments du contenu dont la forme n'est pas donnée toute faite dès le départ. L'expression devient alors capable de *produire* des lignes nouvelles :

> …il n'est pas question ici d'utiliser les lignes de démarcation des concepts déjà donnés pour la délimitation des nouveaux. Mais ce sont bien plutôt des lignes de démarcation toutes nouvelles qui sont produites au moyen de telles déterminations de concepts – et ce sont celles qui sont scientifiquement fécondes. Ici aussi on fait usage de concepts anciens pour la construction des nouveaux ; mais ils se trouvent de ce fait mis de manières multiples en connexion mutuelle au moyen des signes de la généralité[126], de la négation, et de la conditionnalité. (Frege, 1880-81, p. 45)[127]

Fonction propositionnelle et généralité accomplissent de cette façon l'essentiel du but que Frege avait imposé à la logique, à savoir l'expression des contenus. Curieusement, il s'agit des deux éléments de l'idéographie que Schröder avait accueillis favorablement dans son compte rendu, dont les premières pages annonçaient un traitement spécial[128]. On pourrait

[126] Cette traduction rend l'allemand *Allgemeinheit* par « universalité ». Nous nous permettrons de modifier la traduction de ce terme par « généralité » à chaque fois que nous le considérerons nécessaire.

[127] Quelques lignes plus bas, Frege attribue spécifiquement au signe de généralité cette puissance expressive déterminant la différence de son système par rapport à celui des Booléens et de ceux qui l'ont précédé : « …ni le projet originaire de Boole ne comporte cela, ni il n'est possible d'y adapter après coup son langage formulaire. Car, même s'il était en vertu de sa forme plus approprié [sic] qu'il n'est à la reproduction d'un contenu, l'absence d'une représentation de l'universalité correspondant à la mienne rendrait pourtant une véritable formation de concepts – sans utilisation de lignes de démarcation déjà existantes – impossible. Cette absence a sans doute aussi empêché Leibniz de progresser plus avant. » (1880-81, p. 46).

[128] Schröder (1880a, pp. 83-84) : « A l'exception des pages 15-22 sur la « fonction » et la « généralité » et jusqu'à l'appendice commençant page 55, tout ceci est en effet voué à la fondation d'une langue formulaire, qui coïncide essentiellement avec le mode de présentation des jugements de Boole et son calcul des jugements, et qui n'apporte certainement rien de plus d'aucune manière »

[*Mit Ausnahme des auf S. 15 — 22 über „die Function" und „die Allgemeinheit" Gesagten und bis zu dem auf S. 55 beginnenden Anhange ist jene nämlich der Gründung einer Formelsprache gewidmet, welche sich* alors s'étonner que, tout en reconnaissant leur originalité, Schröder ne voit en fonction et généralité que de simples aménagements ou extensions du système booléen qui ne justifient aucunement d' « autres déviations par rapport à la notation de Boole » (1880b, pp. 229-230). Tout se passe comme si le célèbre logicien ne pouvait voir en eux la raison profonde de l'indissociabilité de leur sens, qui rend compte de la nécessité de cette originalité. Ancré dans une vision de la logique selon laquelle sa formalité exclut la considération de tout contenu, Schröder demeure incapable de percevoir ce qui, derrière l'introduction conjointe de ces expressions, force à une reconfiguration générale de la logique qui en transformera de façon péremptoire la nature. Sa remarque concernant le concept de suite est exemplaire à cet égard : si le concept de suite proposé dans la troisième partie de la *Begriffsschrift* est remarquable, ce n'est absolument pas comme le dit Schröder à cause de la généralité atteinte, c'est à cause de la nature strictement logique de sa construction. Les noms d' « ensemble », de « système » ou de « multiplicité » suggérés par Schröder à la place de celui de « suite » pourraient sans doute être utilisés, à condition de comprendre que le concept de suite construit logiquement par Frege diffère en nature des concepts d'ensemble, de système ou de multiplicité dont la pensée logique se servait comme d'un contenu *externe*. Et cela précisément parce que, sans que le concept de suite ne cesse de capturer un certain contenu, *la logique ne le reçoit pas de l'extérieur, mais le construit d'elle-même* à l'aide des nouvelles ressources qui déterminent maintenant sa nature. Le fait que Schröder le place d'une certaine manière au même niveau que les autres concepts servant d'appui à la logique de son époque indique suffisamment à quel point il manque l'essentiel. On comprend dès lors que Frege évoque précisément le concept de succession dans une suite au moment de rendre compte de la puissance de l'idéographie de tracer des lignes nouvelles (Frege, 1880-81, p. 45).

Mais plus généralement, on comprend pourquoi Frege se voit obligé de rendre explicite à chaque fois l'enjeu principal : malgré les ressemblances de surface, sa logique et celle des Booléens sont déterminées par des buts essentiellement différents ; autrement dit, les deux systèmes diffèrent en nature. Informée par le problème de la prise en compte des contenus à l'intérieur de la logique, l'idéographie reconfigure les instruments symboliques existants et en conçoit des nouveaux, selon un axe inédit qui transforme non seulement l'efficacité mais aussi la nature du savoir logique. L'axe expression-contenu agence un système complexe de déterminations réciproques qui ne se contente pas de réorganiser les éléments logiques existants pour leur donner une intelligibilité nouvelle, mais fournit avant tout le principe formel grâce auquel de nouveaux instruments pourront être conçus et articulés avec les

wesentlich deckt mit Boole's Darstellungsweise von und Rechnung mit Urtheilen, und welche sicher nach keiner Richtung mehr leistet] anciens, qui, resignifiés, deviendront capables de servir à d'autres buts. Ainsi, en introduisant le problème de l'expression comme moyen de poser à l'intérieur de la logique le problème du contenu, Frege accomplit la réunion organique des formes et des contenus contre laquelle la logique scientifique de son temps avait construit sa notoriété et sa gloire, et à laquelle les grands projets de l'Idéalisme allemand avaient attaché, de façon ferme mais indéfinie, le sort de la philosophie.

I.2.5. La déduction

Comme nous l'avons vu, d'après la définition même du contenu conceptuel, la déduction ou inférence est censée être au cœur de la construction de l'idéographie. Et pourtant, la *Begriffsschrift* ne réserve pas de chapitre spécial pour la déduction. L'occasion pour le traitement de l'inférence est en revanche donnée au moment de l'introduction du signe de conditionnalité. On a souvent considéré que la règle d'inférence utilisée par Frege était la règle de détachement ou *modus ponens* [129], ce qui ferait penser que Frege se tient à la tradition, en lui empruntant l'un de ses modes de déduction privilégiés, fût-ce pour s'en inspirer. Mais si l'inférence frégéenne peut dans certains cas correspondre effectivement au *modus ponens,* ce qui dans un même mouvement la justifie et la définit l'arrache cependant à toute emprise de la logique classique. Ce fondement de l'inférence est strictement opératoire, agissant sur le fond combinatoire qui définit l'expression de conditionnalité sur laquelle il se règle. Car si la conditionnalité de *A* par *B* (« $B \rightarrow A$ », en notation moderne) est définie comme la négation de l'un des quatre cas donnés par les différentes possibilités d'attribution des valeurs de vérité pour *A* et pour *B*, dans deux des trois cas restants *B* apparaît comme étant nié. Si bien que si à la conditionnalité de *A* par *B* l'on ajoute l'affirmation de *B*, il ne reste qu'un seul cas possible, celui où *A* est affirmé aussi. Ce que Frege exprime de la manière suivante :

> D'après l'explication [du signe de conditionnalité] donnée au § 5, le nouveau jugement
>
> $$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\ A$$
>
> suit des deux jugements $\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!-\ A\\ \ \ \llcorner\!\!-\ B\end{array}$ et $\vdash\!\!\!-\!\!\!-\ B$. Des quatre cas énumérés plus haut, le troisième est exclu par $\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!-\ A\\ \ \ \llcorner\!\!-\ B\end{array}$, mais le deuxième et le quatrième le sont par $\vdash\!\!\!-\!\!\!-\ B$, si bien qu'il ne reste que le premier cas. (Frege, 1879/1999, p. 21)

[129] Par exemple Bynum (1972, p. 61), Potter (2010, p. 5) ou Benmakhlouf (1997, pp. 11, 32; 2001, p. 29).

On voit que dans cette explication du mécanisme d'inférence qui se cache derrière le mot « suivre » (*folgen*), aucune référence n'est faite au sens de la notion de déduction, ou à l'idée de conditionnalité, de conséquence ou de causalité. L'inférence est une pure règle opératoire, définie par la donnée des éléments mis en rapport, définis à leur tour de façon combinatoire en fonction de leurs valeurs de vérité. Si comme dit Frege, les règles d'inférence doivent être définies « à l'aide de mots » (1880-81, p. 48), c'est dans la mesure où ces opérations doivent l'être, et non pas à cause d'un quelconque besoin de justification supplémentaire de leur sens. C'est pourquoi l'on ne peut que sentir l'injustice faite à la *Begriffsschrift* lorsque Wittgenstein accuse Frege d'ajouter une « loi de déduction » pour justifier la déduction, superflue puisque l'inférence ne dépend que de la structure interne des propositions (1921/1993, §§ 5.131, 5.132). Qui plus est, aucun privilège substantiel n'est donné à cette règle particulière, et son unicité tant de fois déclarée n'est pas posée par Frege au-dessus des règles pouvant la remplacer, mais au-dessus des règles pouvant être ajoutées à son côté, tout en y étant réductibles[130].

Dans sa nature strictement opératoire, la règle d'inférence du système frégéen est entièrement dépendante de la définition des expressions formelles. De sorte que, si au lieu de la conditionnalité comme négation du troisième cas des combinaisons possibles des valeurs de vérité de deux contenus jugeables *A* et *B*, Frege avait choisi comme expression formelle fondamentale, disons, la négation du premier (le cas où *A* et *B* sont tous les deux à affirmer), la règle d'inférence serait telle que de l'affirmation de cette expression et de *A*, la négation de *B* s'ensuivrait, ainsi que de cette relation et de *B*, la négation de *A* s'ensuivrait. On peut voir alors dans quel sens le choix de la conditionnalité et de la règle d'inférence qui lui correspond est basé ici aussi sur un critère de minimalité : la négation du premier ou du quatrième cas (ceux où *A* et *B* seraient à affirmer ou à nier ensemble, respectivement) non seulement laisserait plus d'une possibilité pour l'inférence (en se combinant soit avec *A*, soit avec *B*, affirmés ou niés), mais engagerait aussi l'utilisation de l'expression formelle de la négation (soit dans les prémisses dans le dernier cas, soit dans les conclusions dans le premier). Les deuxième et troisième cas, comme des expressions de la conditionnalité (à la différence de direction près : $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$), permettent de définir l'inférence sans avoir besoin d'aucun signe supplémentaire, ce que Frege prétend certainement montrer en s'occupant de l'inférence avant l'introduction du signe de négation.

[130] Frege (1879/1999, p. 23) : « Depuis Aristote, on dénombre en logique toute une suite de types d'inférence ; je ne m'en sers que d'un, *du moins dans tous les cas où un nouveau jugement est dérivé de plus d'un seul jugement*. En effet, on peut exprimer la vérité qui se trouve dans un autre type d'inférence au moyen d'un jugement de la forme : si *M* est valide et si *N* est valide alors *Λ* est aussi valide […]. Ainsi, une inférence faite d'après n'importe quel type d'inférence peut être réduite à notre cas. Du moment qu'il est possible de s'en sortir avec un seul mode d'inférence, la clarté oblige à le faire. » (nous soulignons).

Mais cela à condition, bien évidemment, de disposer d'une certaine attribution de valeurs de vérité pour les expressions de contenu en question (A, B…). Auquel cas, le sens de l'inférence frégéenne *ne se distingue pas de manière essentielle de celui du mode d'inférence employé par les Booléens*. Car, comme Frege le remarque bien, si des quatre possibilités données par les combinaisons des valeurs de vérité de A et B, le signe frégéen de conditionnalité nie la troisième,

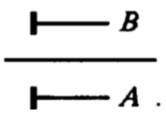
> …le signe d'égalité de Boole [nie] les deux du milieu, le signe d'addition chez Boole lui-même la première et la dernière, chez Leibniz et Stanley Jevons seulement la dernière ; enfin le signe de multiplication affirme la première possibilité et nie donc les trois autres.[131] (Frege, 1880-81, p. 47)

C'est donc pour les mêmes raisons (opératoires) que de $B \to A$ et B « suit » A et de $x = yz$ « suit » $(1 - x) = y(1 - z) + z(1 - y) + (1 - y)(1 - z)$[132]. La notion d'inférence formelle semblerait ainsi rester inchangée dans l'idéographie par rapport à la logique booléenne, qui pour Frege était déjà et fondamentalement une théorie de l'inférence[133].

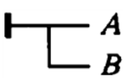
Sur deux points, cependant, l'inférence formelle entraîne, inscrite dans le contexte de l'idéographie, des aspects nouveaux par rapport à l'inférence booléenne. Le premier concerne précisément la *simplicité*. Car de façon surprenante bien que subreptice, le caractère minimal sur lequel se règle la simplicité fait apparaître une dimension inédite de la déduction. En effet, l'écriture de toute la chaîne inférentielle étant trop lourde aux yeux de Frege, il se sent obligé de se servir d'une abréviation, consistant à noter la conclusion, précédée uniquement d'une seule des deux prémisses. Ainsi, la prémisse manquante ayant été déjà référencée d'une certaine manière, par exemple au moyen d'un « X », Frege affirme :

> J'écris ensuite la déduction comme suit :

(X) :



> Il est ainsi laissé au lecteur de composer le jugement



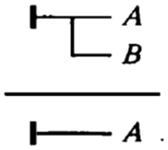
[131] Voir aussi Frege (1880-81, p. 25) : « La relation hypothétique définie avec précision entre les contenus jugeables a pour la fondation de mon idéographie une importance analogue à celle de l'égalité d'extension pour la logique booléenne. Je fais remonter la formation initiale des concepts aux jugements. ».

[132] Pour cet exemple de Boole voir (1854, pp. 93-94). La traduction de cette expression booléenne dans le symbolisme actuel serait : de $A \Leftrightarrow B \wedge C$ suit $\neg A \Leftrightarrow (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C)$, ce qu'un simple calcul à partir des tables de vérité permet facilement d'établir (l'utilisation de la disjonction exclusive par Boole au lieu de l'inclusive n'ayant, dans ce cas particulier, aucun effet sur les calculs).

[133] Frege (1880-81, p. 24) : « Il ne faudrait pas entendre par là que la formation de concept occupe un grand espace dans leurs représentations [celles d'Aristote et des Booléens]. Au contraire, leurs logiques sont essentiellement des théories de l'inférence, et la formation des concepts y sera supposée accomplie. »

> à partir de $\vdash B$ et de $\vdash A$ et de veiller à ce qu'il soit en accord avec le jugement X cité. (Frege, 1879/1999, p. 22)

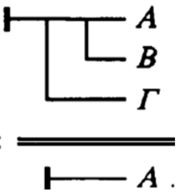
De la même manière, de la conclusion A et de la prémisse $B \to A$, on pourra restituer le jugement B. Frege ne distingue pas moins avec soin cette opération de la première par un double deux points à côté de la référence de la prémisse à reconstituer, de la manière suivante :

(XX) : : 

Suivant l'explication de Frege,

> Le double deux points ci-joint signale que $\vdash B$, qui n'a été cité que par XX, doit être construit à partir des deux jugements écrits ci-dessus *d'une autre manière que précédemment*. (Frege, 1879/1999, p. 22, nous soulignons).

À partir de là, Frege conçoit même la possibilité de contracter plusieurs pas dans la chaîne inférentielle. Voici l'exemple qu'il en donne, dans lequel il s'agit de reconstituer les inférences intermédiaires qui ont mené à la conclusion A à partir de la prémisse $\Gamma \to (B \to A)$:

(XX, XXX) : : 

XX et XXX étant les références de B et de Γ respectivement (Frege, 1879/1999, p. 23).

De cette façon, Frege introduit la possibilité de penser une sorte de *réversibilité* dans la déduction : l'inférence n'est pas seulement la possibilité d'obtenir des conclusions à partir de prémisses, mais aussi *la possibilité de reconstituer des prémisses à partir des jugements considérés comme des conclusions*. Même si le but explicite de Frege n'est que d'éviter la lourdeur par des abréviations, cette réversibilité reflète une possibilité objective du système, et donc de la logique en tant que telle, pour laquelle Frege prévoit d'ailleurs une place dans sa constitution expressive. Or, d'après cette nouvelle possibilité ouverte par la *Begriffsschrift*, la déduction formelle frégéenne montre toute sa singularité. Car à la différence de la configuration booléenne, elle est *entièrement déterministe pour la réversibilité de l'inférence*. En effet, l'inférence n'étant déterminée dans l'idéographie que par les aspects combinatoires de la conditionnalité lorsqu'elle est associée à l'affirmation de la condition, il n'y a qu'une seule façon dont un jugement pourrait être affirmé comme résultat d'une inférence. Autrement dit, si A est la conclusion d'une inférence, ses prémisses ne peuvent être autres que $\Gamma \to A$ et Γ (Γ étant un jugement ou un ensemble de jugements donné quelconque). En donnant explicitement l'une des prémisses (soit, par exemple, B, soit $B \rightarrow A$), la reconstitution de l'autre est donc entièrement déterminée ($B \rightarrow A$ et B respectivement). L'opération ne comporte aucune ambiguïté, tant que de nouvelles expressions formelles n'apparaissent pas, et même dans le cas où la conclusion contiendrait elle-même un signe de conditionnalité[134]. À tel point que, tant les symboles référant à la prémisse manquante (« X », « XX », « XXX » dans les exemples ci-dessous), que le simple et le double deux points indiquant l'opération particulière selon laquelle la reconstitution a lieu, s'avèrent en fin de compte entièrement superflus. Qui plus est, à regarder de plus près on peut constater, non sans un certain étonnement, que le choix frégéen des expressions formelles *est le seul pour lequel l'inférence associée peut avoir cette propriété de déterminisme complet*. En effet, dans le système booléen, l'existence de plusieurs expressions formelles entraîne une ambiguïté dans la réversibilité qui la rend incapable de se déterminer de manière immanente. Par exemple, A étant donné comme conclusion et B comme prémisse, il n'y a pas moyen de déterminer, sans information supplémentaire, si la prémisse manquante dans cette inférence est $A = B$ ou $A \wedge B$. Mais même dans le cas où il n'existerait qu'une seule expression formelle, la définition de cette expression d'une manière autre que par la négation du troisième cas (ou du deuxième, qui définit la conditionnalité dans le sens inverse), engage une symétrie qui entraîne l'impossibilité de distinguer entre la proposition manquante et celle résultant de sa commutation simple. Ainsi, si l'on prend la disjonction comme exemple, de la conclusion B et la prémisse $\neg A$ on ne pourra pas déterminer, sans information supplémentaire, si la prémisse manquante est $A \vee B$ ou $B \vee A$[135]. C'est pourquoi, si Frege n'altère pas le fondement formel de la déduction par rapport à celui de la logique booléenne, son exigence de simplicité fait apparaître une propriété nouvelle qui en transforme profondément son sens. Un sens qui sera lourd de conséquences lorsqu'il sera repris et exploré en profondeur dans le contexte de la « Théorie de la preuve », à commencer par le Calcul de séquents.

---

[134] De la conclusion $A \rightarrow B$ et la prémisse Γ, nous pouvons reconstituer la prémisse $\Gamma \rightarrow (A \rightarrow B)$, ainsi que le jugement Γ peut être reconstruit à partir de la même conclusion et cette dernière prémisse.

[135] Cette différence en apparence triviale jouera, comme on le sait, un rôle fondamental dans le développement de la Théorie de la preuve, et en particulier pour la Logique intuitionniste (voir par exemple Girard, 2006, pp. 108-109). Pour le reste, les expressions formelles définies par la seule affirmation soit du deuxième cas, soit du troisième (non-implication, et non-implication contraposée respectivement), sont elles aussi déterministes pour la réversibilité de l'inférence. Cependant, la règle d'inférence associée nécessitant l'expression de la négation, le choix de cette expression ne serait pas minimale, non seulement à cause de cet usage de la négation, mais aussi du plus grand nombre de règles d'inférence et de réversibilité (deux et quatre respectivement). Dans le cas de la conditionnalité, Frege peut s'en tenir uniquement au cas positif, ce qui réduit la règle d'inférence à une, et la réversibilité à deux. Mais plus généralement, Frege considérerait difficilement l'expression de la non-implication comme susceptible d'une règle d'inférence, puisque le sens de l'inférence semble lié pour lui à la possibilité que plusieurs cas soient vrais (la combinaison de prémisses ayant pour but restreindre à un seul les cas à affirmer). La non-implication étant la négation de trois cas, elle équivaut tout simplement à l'affirmation directe de A et de $\neg B$, et aucune inférence n'est par là rendue nécessaire.

Le second point de nouveauté associée à la déduction formelle mise en œuvre par Frege apparaît lorsque, au lieu d'indiquer les jugements avec des symboles simples comme dans le système booléen, on les exprime avec les nouvelles ressources expressives de l'idéographie. Ainsi, $B \rightarrow A$ peut être exprimé comme la conditionnalité entre deux fonctions propositionnelles : $B(x) \rightarrow A(y)$. Les conséquences de cette invention sont immenses. Car dans le système booléen, le caractère inarticulé des propositions mises en rapport par la conditionnalité (ou par toute autre expression formelle) ne permet d'assurer un lien *interne* entre ces propositions que dans les cas où ces propositions sont identiques ($A \rightarrow A$, $A \wedge A$, $A \vee A$, $A = A$…). Dans tout autre cas, le lien entre propositions, et donc la vérité du rapport en question, doit être assuré de manière *externe*, en l'occurrence par le « calcul de l'identité de domaines d'une multiplicité ». Ainsi, $B \rightarrow A$ sera compris comme le cas où l'extension de B est incluse dans l'extension de A. Or, avec l'expression des jugements au moyen de la fonction propositionnelle, ces relations peuvent être *internalisées*, puisque l'on peut exprimer à l'intérieur du langage logique à la fois une différence et un lien entre les jugements, ce qui peut être établi soit par l'identité du signe de fonction (c'est-à-dire, $A(x) \rightarrow A(y)$), soit par l'identité de l'argument ($B(x) \rightarrow A(x)$). Comme nous l'avons vu, ces identités à l'intérieur de l'articulation fonctionnelle sont assurées au moyen du signe de généralité, embrassant les composantes articulatoires sous sa portée. Le signe de conditionnalité prend alors un autre sens, car dans le cadre de cette liaison articulatoire, les propositions ne dépendent plus des valeurs de variables ainsi liées. C'est de cette façon que Frege conçoit l'expression du lien causal que la simple conditionnalité n'arrivait pas à capturer, puisque, « bien qu'un jugement de ce genre [causalité] ne puisse être fait que sur une telle base [la conditionnalité] », ce lien est « quelque chose de général » (Frege, 1879/1999, p. 20). Frege renvoie alors au passage du signe de généralité, où il affirme que l'expression que l'on noterait de nos jours $\forall a\, X(a) \rightarrow P(a)$ …

> …signifie : « quoi que l'on mette à la place de *a*, le cas où $P(a)$ devrait être nié et $X(a)$ affirmé n'apparaît pas ». Il est alors possible que, selon les significations que l'on peut donner à *a*, $P(a)$ serait à affirmer et $X(a)$ à affirmer, selon d'autres $P(a)$ serait à affirmer et $X(a)$ à nier, selon d'autres encore $P(a)$ serait à nier et $X(a)$ à nier. C'est pourquoi l'on peut le traduire par : « si quelque chose a la propriété *X*, alors cela a aussi la propriété *P* », ou « chaque *X* est un *P* », ou « tous les *X* sont des *P* ».
>
> *Ceci est la manière par laquelle le lien causal est exprimé.* (Frege, 1879/1999, p. 38)

L'établissement des règles d'inférence ou opératoires pour la généralité fournira donc les moyens de maîtriser cette nouvelle dimension intrinsèque de la logique. Ces règles concernent d'une part les différentes possibilités, étant donné la structure formelle d'un jugement affecté du signe de généralité, de le remplacer par un jugement de généralité moindre. Ainsi, si de $\forall a\, P(a)$ on peut conclure $P(A)$, où A est une valeur déterminée de la variable a, il n'en est pas de même des jugements comme $\neg\forall a\, P(a)$ ou $\big(\forall a\, X(a)\big) \rightarrow A$[136]. D'autre part, les règles de remplacement se confrontent aux différentes possibilités de varier, et notamment de réduire, la portée des domaines d'action des signes de généralité, en fonction des différentes occurrences des variables liées par le signe en question dans les divers jugements inclus sous sa portée. De cette façon, le jugement $\forall a\Big(B \rightarrow \big(A \rightarrow P(a)\big)\Big)$ peut être remplacé par $B \rightarrow \Big(A \rightarrow \forall a\, P(a)\Big)$, à condition que la variable a n'apparaisse pas dans les jugements *A* et *B*, et qu'elle n'apparaisse que comme argument dans $P(a)$.

On voit que ces deux nouvelles dimensions gagnées par l'inférence, celle donnée par la réversibilité, et celle donnée par la généralité, malgré l'hétérogénéité des moyens dont ils sont l'effet, partagent une propriété remarquable : elles ouvrent les voies par lesquelles *l'inférence ou la déduction peut, au moins en partie, être libérée des valeurs de vérité des propositions qu'elle engage*. En effet, dans le premier cas, ce n'est pas la vérité ou fausseté des prémisses qui détermine la chaîne inférentielle, depuis ses éléments premiers jusqu'à ses conclusions ultimes, mais c'est la structure de la chaîne inférentielle même qui détermine la valeur de vérité des propositions si un certain jugement est à prendre comme conclusion d'une prémisse donnée. Suivant l'exemple précédent, le fait de poser la vérité de *A*, non pas par simple attribution d'une valeur de vérité, mais comme résultat d'une procédure de déduction liée à la proposition $\Gamma \rightarrow (B \rightarrow A)$, permet de déterminer à la fois la vérité de B et de *Γ*. Cette opération ne dépend donc pas d'une attribution générale des valeurs de vérité, même pas pour les conclusions ou pour les premières prémisses ; elle ne relève que des règles d'inférence opérant sur un jugement considéré comme conclusion sous certaines hypothèses. Certes, les possibilités attachées à cette voie restent très limitées dans le cadre de la *Begriffsschrift*, et Frege ne s'en sert que dans des buts complètement accessoires. Il n'en reste pas moins que la voie reste dès lors ouverte, de telle sorte qu'elle pourra être empruntée (comme elle le sera, notamment, par la Théorie de la preuve) lorsque de nouveaux problèmes viendront occuper la pensée de la logique.

D'autre part, la liaison de variables au moyen du signe de généralité, dans la mesure où elle exprime la vérité d'un jugement au-delà des valeurs particulières des variables, a pour conséquence de « clore » les jugements sur la structure logique et de ne les faire dépendre que des expressions formelles et de l'organisation des domaines donnée par la configuration des

[136] Pour ces exemples, voir Frege (1879/1999, pp. 34-35).

expressions de contenu. Si bien que l'attribution de valeurs de vérité pour les jugements particuliers ne comportant que des variables liées n'a pas de sens, puisque la liaison des variables suppose que cette valeur ne dépend plus des jugements particuliers.

Dans tout ceci, comme nous l'avons dit, le fondement de la déduction formelle ne se voit pas modifié par rapport à la logique booléenne, si ce n'est par l'introduction de règles opératoires pour le nouveau signe de généralité. La déduction prend pourtant de nouveaux sens lorsqu'elle opère dans le contexte de l'idéographie : la minimalité des expressions formelles entraîne la réversibilité de l'inférence, qui permet à la déduction de se détacher des prémisses intermédiaires et de valoir, pour ainsi dire, pour elle-même ; l'expression de la généralité, combinée avec l'articulation fonctionnelle des jugements, internalise d'une certaine manière les conditions sous lesquelles l'inférence était capable exercer son efficacité, à tel point que même l'expression formelle de la conditionnalité ou implication dont l'inférence prend appui reçoit un sens nouveau.

I.3. Lacunes

I.3.1. L'indétermination du système

La reconstitution de l'architecture de l'idéographie à laquelle nous nous sommes livrés dans le chapitre précédent montre à quel point cette architecture est charpentée avec une précision extrême par la dynamique de l'expression des contenus. Loin d'être simplement spéculatif ou justificateur, l'axe qui se détermine entre les expressions et les contenus offre une intelligibilité nouvelle sur la nature et la finalité de la logique, et sert de guide pour sa construction. C'est pourquoi il est surprenant que cette charpente n'ait jamais été mise en évidence comme telle par la tradition philosophique qui reconnait dans Frege sa propre origine. Négligeant cette *dynamique* agissant à la base de l'édification frégéenne, les appropriations postérieures de l'œuvre de Frege ont sans cesse privilégié une structuration *axiomatique* du système formel résultant, projetée sans doute à partir de problèmes et de solutions qui n'étaient pas ceux de Frege lui-même. La présence de cette dynamique dans les formulations de Frege est pourtant massive, assumée et évidente, depuis les premiers textes logiques que nous venons d'étudier, jusqu'aux dernières formulations, définissant ainsi comme un socle sur lequel prennent appui les versions changeantes de l'idéographie.

Cette charpente articulée autour de l'axe expressions-contenus constitue donc le véritable principe par lequel une « logique du contenu » trouve les moyens de s'affirmer dans une construction effective. Et cela non seulement grâce à l'intelligibilité et le guide que les différents concepts attachés à lui apportent, mais plus profondément encore, puisqu'en raison de leur définition même, et de la configuration systématique qui en résulte, ces concepts prétendent être les instruments mêmes fournissant les critères effectifs pour cette construction. Plus précisément, comme nous l'avons montré, l'essentiel de cette tâche est assumé par la détermination réciproque entre un *plan d'expression* et un *plan de contenu*, de telle sorte que les différentes *figures du contenu* (*individu*, *concept*, *contenu jugeable*, *valeur de vérité*) sont déterminées par une certaine distribution ou partition du plan expressif à des niveaux différents d'articulation, ainsi que le plan d'expression est à son tour structuré (en *expressions formelles* et *expressions de contenu*, avec ses formes respectives : *conditionnalité* et *négation* d'un côté, *fonction propositionnelle* et *généralité* de l'autre) selon la géographie du contenu ainsi obtenue.

Toutefois, dans ces aller-retour entre expressions et contenus délimitant toute la surface portante des conditions sémiotiques de la logique, deux points demeurent obscurs, concernant le caractère suffisant d'une telle conceptualisation pour la détermination effective des instruments formels.

Le premier concerne le besoin rencontré par Frege d'introduire un signe pour exprimer l'égalité de contenu (*Inhaltgleichheit*)[137]. L'introduction d'un tel signe dans un système expressif ainsi constitué est étonnante à plusieurs titres. D'abord, parce que, comme Frege l'indique au moment de son introduction, le signe d'égalité de contenu ne porte pas, à la différence de tous les autres signes, sur les contenus eux-mêmes, mais sur les expressions qui les expriment :

> L'égalité de contenu se distingue de la conditionnalité et de la négation en ce qu'elle se rapporte à des noms et non pas à des contenus. Tandis que d'ordinaire les signes ne font rien d'autre que représenter leur contenu, si bien que chaque combinaison dans laquelle ils entrent n'exprime qu'une relation à leurs contenus, ils s'exhibent soudainement eux-mêmes[138] dès qu'ils sont liés par le signe d'égalité de contenu… (Frege, 1879/1999, p. 28)

Le signe d'égalité est ainsi une expression à laquelle aucun contenu ne correspond, ou du moins aucun des contenus précédemment établis et censés commander la structuration dernière de l'expression logique. Qui plus est, le signe d'égalité effectue à l'intérieur du système sémiotique une référence à des expressions en tant que telles, qui engendre une ambiguïté au sein des signes, tel que Frege ne manque pas de le remarquer : « une dualité (*Zwiespältigkeit*) est nécessairement générée dans la signification (*Bedeutung*) de tout signe, les mêmes signes valant tantôt pour leur contenu, tantôt pour eux-mêmes » (1879/1999, p. 28). Enfin, le signe d'égalité de contenu ayant pour fonction de désigner « la circonstance que deux noms ont le même contenu » (1879/1999, p. 28), un autre problème majeur apparaît. En effet, l'idéographie n'avait-elle pas pour but d'ériger un système d'expression au plus près du contenu ? D'où vient dès lors cette multiplicité expressive concernant un même contenu ? Qu'est-ce qui anime cet *excès des expressions par rapport aux contenus*, dont la maîtrise rend

[137] Ce terme est souvent traduit comme « identité de contenu ». C'est pourtant dans la possibilité de réduire la distance entre l'égalité et l'identité des contenus que résident les dimensions profondément problématiques de la *Begriffsschrift* que nous nous efforçons de restituer. Cette différence est explicitement thématisée par Frege, bien que ce soit pour être réduite aussitôt, par exemple dans (1891, p. 82), (1892/2009, pp. 51-52) ou (1892, p. 129). C'est pourquoi nous avons décidé de corriger ponctuellement cette traduction à chaque fois qu'elle apparaît dans les passages que nous citons. Nous abordons cette question dans la quatrième partie de notre travail.

[138] En allemand : « *…kehren sie plötzlich ihr eignes Selbst hervor…* », il se tournent soudainement vers eux-mêmes.

nécessaire l'introduction du signe d'égalité ? Comme dans les autres cas, Frege est bien conscient de cette dimension problématique du plan expressif au sein du système tel qu'il l'a construit, à laquelle il répond en avançant un exemple mathématique où un point géométrique est donné à la fois de deux manières différentes (directement par l'intuition et comme l'intersection variable de deux lignes), après quoi il conclut :

> Un nom particulier correspond à chacune de ces deux manières de détermination. La nécessité d'un signe d'égalité de contenu repose donc sur ceci : le même contenu peut être complètement déterminé de manières différentes ; mais le fait que, dans un cas particulier, *la même chose* soit effectivement donnée par *deux manières de détermination* est le contenu d'un *jugement.* Avant que cela ne se produise, deux noms différents, correspondant aux deux manières de détermination, doivent être attribués à ce qui est déterminé par ce moyen. Mais le jugement a besoin, pour son expression, d'un signe d'égalité de contenu qui relie les deux noms. (Frege, 1879/1999, p. 29)

Le signe d'égalité manifeste donc *une autonomie inattendue du plan expressif par rapport au plan des contenus*. Et cela du fait que son existence même au sein du système est en excès par rapport aux contenus ; parce que, en tant que signe, il fait apparaître le plan expressif comme que tel, et non pas en tant qu'il exprime des contenus ; enfin, plus profondément, parce que le besoin éprouvé de son introduction provient d'une multiplicité expressive dont la source ne saurait, par définition, résider dans le contenu. Dans un système censé être gouverné en dernière instance par les contenus, cette autonomie est d'autant plus déroutante que Frege affirme que l'excès qui la supporte n'est « pas toujours qu'une question indifférente de forme », mais concerne « la nature de la chose même », lorsque cet excès est lié aux différentes « manières de détermination » (1879/1999, p. 29). Le problème acquiert une dimension encore plus radicale si l'on songe que sous le signe d'égalité de contenu habite un aspect crucial de la reprise du projet philosophique kantien dans le cadre renouvelé de la logique. Car comme le dit Frege, « le jugement qui a l'égalité de contenu comme objet est, dans le sens kantien, un jugement synthétique » (1879/1999, p. 29). Dans la possibilité de l'établissement de ces jugements par de moyens strictement logiques se joue donc le sort de l'entreprise logiciste et analytique que Frege est en train d'amorcer, puisqu'un tel établissement logique ferait de cette identité un jugement analytique, malgré la charge cognitive associée au fait de la multiplicité expressive. Reposée dans ce nouveau cadre, la question centrale de la philosophie kantienne trouve des déterminations nouvelles, car l'analyticité se laisse comprendre, non pas comme l'identité ou l'appartenance des concepts, mais comme l'égalité d'expressions multiples correspondant à un contenu identique. Ce qui dans ce cadre veut dire, dans la mesure où il s'agit ici de contenus et d'égalités *logiques,* que le caractère analytique *dépend également du principe de déduction ou inférence* selon lequel a lieu, comme on l'a vu, la répartition des expressions. Frege déplace par ce moyen le problème de l'analyticité, depuis les jugements, où Kant avait su l'inscrire, jusqu'aux preuves ou déductions par lesquelles un jugement est établi[139].

L'excès du plan expressif (et l'autonomie que celui-ci implique) par rapport à celui des contenus revèle un point d'indétermination au sein du rapport entre les expressions et les contenus autour duquel le système frégéen prétend s'articuler. Et cela puisque, une fois les contenus définis, on ne voit pas ce qui pourrait engendrer l'excès du système d'expressions censé se régler de la façon la plus immédiate en fonction d'eux.

Mais celui-ci n'est pas le seul point obscur dans la détermination du système. Si une indétermination s'introduit dans la structuration formelle des expressions à partir des contenus, la définition préalable des contenus comme résultat d'un partitionnement de l'ensemble des expressions d'une langue n'est pas moins indéterminée. On sait que Frege établit qu'un tel partage doit être réalisé en fonction des effets des variations ou des substitutions des expressions sur les conclusions possibles, c'est-à-dire, sur l'inférence ou la déduction. Cela constitue un principe essentiel pour la cohérence conceptuelle du système, ainsi que pour la définition d'orientations pour sa construction. Mais sans d'autres précisions concrètes concernant soit la façon de regrouper des énoncés, soit les principes valides d'inférence, soit la forme ou la nature de ce qu'il faut considérer comme conclusion, l'insuffisance d'un tel critère pour la détermination effective et complète de la forme du contenu est évidente. Certes, on n'a pas besoin d'avoir un principe concret et effectif de partage pour pouvoir déterminer les unités les plus grosses de contenu, telles qu'individu, concept ou contenu jugeable. Mais même ces déterminations ont besoin de beaucoup plus que ce que Frege ne donne de manière explicite. En effet, qu'est-ce que cette déduction au nom de laquelle deux expressions d'un langage courant pourront être dites avoir un même contenu conceptuel ? Au moment précis d'introduire ce critère, Frege ne donne pourtant aucune réponse précise. Il se contente de présenter le célèbre exemple de la victoire des Grecs sur les Perses. Que des deux expressions « les Grecs ont vaincu les Perses à Platée » et « les Perses

[139] C'est d'ailleurs sur cette nouvelle définition de l'analyticité que s'ouvre la préface de la *Begriffsschrift* : « …nous divisons toutes les vérités ayant besoin d'une justification en deux sortes selon que la preuve, pour les unes, peut avancer par la logique pure ou, pour les autres, doit s'appuyer sur des faits d'expérience. […] …ce n'est pas le mode de formation psychologique, mais la méthode de démonstration la plus parfaite qui est au fondement de la distinction. » (1879/1999, p. 5). Frege sera encore plus explicite dans les *Grundlagen* (1884/1969, p. 127) : « Les distinctions de l'*a priori* et de l'*a posteriori*, de l'analytique et du synthétique, ne concernent pas à mon avis le contenu du jugement, mais la légitimité de l'acte de juger » ; et comme si cela n'était pas suffisamment clair, il ajoute que l'objet de la question de l'analytique « est de trouver la preuve, et de la poursuivre régressivement, jusqu'aux vérités premières. Si l'on ne rencontre sur ce chemin que des lois logiques générales et des définitions, on a une vérité analytique ». Et en note, il remarque : « Il est bien clair que je ne cherche pas à modifier le sens de ces expressions ; je vise précisément ce que d'autres auteurs, Kant en particulier, ont voulu dire par là. ».

ont été vaincus par les Grecs à Platée » on puisse tirer les mêmes conclusions, cela à l'air d'être évident, et Frege semble ainsi le considérer. Mais à regarder de plus près, de quel type d'évidence s'agit-il ? De la première de ces expressions ne pourrait-on conclure, par exemple, que celui qui l'énonce s'intéresse plus aux Grecs qu'aux Perses, tandis que de la seconde on pourrait conclure l'inverse ? Ou d'un tout autre point de vue, qui ne saurait cependant être exclu à l'avance, ne pourrait-on conclure de la seconde qu'une langue possède un usage de la voix passive, ce qui serait impossible de conclure si l'on n'avait que des expressions du premier type ? Suivant ce genre de conclusions, la première expression serait à regrouper, non pas avec la seconde, mais avec « les Perses ont vaincu les Grecs à Platée », par exemple. Comment savoir d'avance l'ensemble des conclusions que l'on peut tirer d'une expression ? Ne faudrait-il pas plutôt savoir à l'avance le *genre particulier* de conclusions que l'on veut avoir pour définir ensuite à la fois partage des expressions et principes d'inférence ? D'autre part, imposer un principe déductif particulier pour regrouper les expressions ne serait-il pas une manière de décider ce que l'on peut et ce que l'on ne peut pas déduire d'une expression ? Ou encore, effectuer ce partage plutôt qu'un autre ne serait-il pas une manière de définir ce que la déduction doit être ? Et dans ce cas, ce n'est pas le partage qui aurait lieu d'après la déduction, mais la déduction qui serait définie en fonction du partage. Où réside ici la détermination ultime ? Et qu'en est-il des contenus conceptuels, dont la définition était censée être le résultat de ces opérations ? Ne pourrait-on penser qu'une certaine délimitation des figures du contenu commande et le partage des expressions, et les principes d'inférence, et le type de conclusions ? Mais dans ce cas, d'où tiendrait-on ces figures du contenu, que l'on avait songé déterminer à partir de l'ensemble des expressions modulo la déduction ?

Au demeurant, le problème de la déduction se voit redoublé par le fait que l'excès du plan des expressions formalisées ou logiques sur le plan des contenus réclame lui aussi un principe d'inférence selon lequel cet excès pourrait être réduit par l'établissement d'égalités de contenu. Comment comprendre dès lors cette dualité de la déduction ? S'agit-il du même principe dans les deux cas, ou de deux principes différents ? S'il s'agit du même, comment comprendre alors la nécessité de construire un plan expressif logiquement structuré, puisque le même principe pourrait opérer directement sur le domaine des expressions linguistiques ? S'il s'agit de deux principes différents, quel est le rapport entre eux ?

Le principe déductif de la *Begriffsschrift* que nous avons analysé dans le chapitre précédent semblerait être en mesure de fournir une solution pour le problème de la réduction de cet excès d'expressions formalisées ou logiques sur les contenus, et d'apporter ainsi des réponses pour une détermination interne des contenus. Car, d'une part, il procure les instruments pour établir les identifications nécessaires au niveau des expressions logiques, notamment l'équivalence logique des expressions définie par la bi-implication. Frege est bien conscient que l'égalité booléenne peut être rendue dans son système au moyen de la combinaison de deux conditionnalités, $B \rightarrow A$ et $A \rightarrow B$ (cf. 1880-81, p. 47). Dès lors, quand cette double conditionnalité se trouve dans le contexte d'expressions fonctionnelles dont les variables sont liées par le signe de généralité, l'équivalence résultante exprime bien un lien nécessaire entre ces expressions quant à leur contenu. L'équivalence logique définie au moyen de l'inférence dans le contexte expressif de l'idéographie peut donc ainsi devenir le principe selon lequel l'identification des expressions formalisées opérée par le signe d'égalité de contenu pourrait être établie. D'autre part, les nouveaux sens acquis par la déduction formelle témoignent de la capacité de la logique frégéenne d'internaliser le contenu que les opérations de la logique booléenne ne pouvaient qu'abstraire, car comme on l'a vu elle dispose des moyens de se déprendre, ne serait-ce qu'en partie, de l'attribution externe des valeurs de vérité ou des constructions conceptuelles. Pourtant, malgré la connexion intime avec les formes du contenu qu'elle comporte, le sens renouvelé de cette déduction ne peut pas être considéré comme principe pour la détermination de ces formes. Et cela par le simple fait qu'*il en dépend entièrement*. En effet, comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, tant la minimalité des expressions formelles que le mécanisme des expressions de contenu, grâce auxquels la déduction formelle se voit investie d'un sens nouveau, sont déterminés de manière directe par la configuration des contenus formels. Que ce soit encore cette configuration particulière des contenus qui soit la responsable d'un nouveau sens pour la déduction formelle, cela ne fait qu'accroitre la dimension et la puissance de la logique du contenu tant prônée par Frege. Mais par le même mouvement, puisque cela élimine la possibilité de faire appel à la déduction formelle comme principe effectif de détermination de la forme du contenu, et puisqu'aucun autre traitement de la déduction dont le contenu est censé prendre la forme n'est trouvable dans la *Begriffsschrift*, ni dans les textes qui l'entourent, la question de savoir comment et par quoi le contenu formel se détermine effectivement devient encore plus urgente.

C'est dans ce mince écart, dans le jeu incertain ouvert par l'imparfaite correspondance entre un principe d'identité et un principe déductif, dont les formes du contenu sont censées être à la fois le résultat et la règle, c'est là que se jouera toute la tension du système frégéen, et plus profondément, celle de la possibilité d'une logique du contenu dans le cadre général de la logique contemporaine.

I.3.2. La place constitutive de l'Arithmétique

Tout se passe comme si tous les éléments étaient enfin disposés pour qu'une véritable logique du contenu puisse se clore sur elle-même et assumer la tâche d'une philosophie « analytique », en se montrant capable de déterminer intrinsèquement et *a priori* ses contenus ; et pourtant un point d'indétermination résiste à cette clôture indiquant un lieu par où s'infiltreraient des déterminations « synthétiques », dont la source pourrait difficilement être autre qu'intuitive. En effet, sans plus de précisions concernant le principe de déduction en fonction duquel les expressions d'une langue doivent être identifiées pour dégager les formes logiques du contenu, comment décider que le plan du contenu est organisé en individus, concepts, contenus jugeables et valeurs de vérité ? Certes, l'absence de ces précisions n'empêche pas la logique formelle qui en résulte d'avoir une efficacité, et même une efficacité plus grande que toutes celles qui la précédèrent. Mais sans un lien précis et nécessaire entre les contenus généraux tels qu'ils sont véhiculés par un langage et les contenus conceptuels censés informer le fonctionnement de la logique formelle, la traductibilité entre ces deux instances ne peut être assurée que par forçage ou simple analogie voire métaphore, au point où il n'y aurait aucun moyen d'établir avec légitimité que ces contenus logiques correspondent effectivement aux contenus d'une langue. Autrement dit, sans ce lien rien ne permet de justifier que le contenu logique, voire conceptuel, de l'expression « Archimède périt lors de la prise de Syracuse » est quelque chose comme :

$$\vdash \neg\forall x \neg\Big(M(x) \rightarrow \Big(V(x) \rightarrow \big(A(x) \rightarrow PS(x)\big)\Big)\Big),$$

même en passant par la reformulation « la mort violente d'Archimède lors de la prise de Syracuse est un fait », ce qui exigerait d'ailleurs de nouvelles précisions.

Une logique construite à l'écart d'un tel problème pourrait difficilement être considérée comme une logique du contenu, et encore moins, prétendre supporter le poids de la philosophie, pour laquelle le contenu était devenu la raison d'être. L'idéographie serait-elle, après tout, détachée de ce problème ? Sera-t-il vrai que, comme le suggérait Beaney, des « intuitions sémantiques » plus ou moins informelles, et donc extérieures à la logique, donnent un premier coup de pied qui permet, dans un second temps, de concevoir les éléments primitifs d'un système formel et de tout construire à partir d'eux ? La notion de contenu, et l'axe qu'elle redéfinit avec la notion d'expression, seraient-ils entièrement inefficaces, simples concepts philosophiques pour justifier une démarche qui a lieu malgré eux ? Les analyses que nous avons effectuées, concernant les dimensions articulatoires du plan expressif dont le plan des contenus conceptuels héritait de manière directe, montrent bien qu'il y a dans ces notions beaucoup plus que des spéculations purement métaphysiques, et la constante traductibilité dans le langage des mots recherchée par Frege, non seulement à l'époque de la *Begriffsschrift* mais jusqu'à la fin de son œuvre, témoigne suffisamment du fait qu'il était loin d'être indifférent à cette question. Si l'élaboration et l'explicitation d'une conception de déduction (que l'on pourrait appeler « présystématique » ou « préformelle » si seulement la dimension où elle est censée opérer n'était pas douée d'une systématicité ou d'une formalité singulières) font défaut dans le système frégéen, il existe bien pourtant quelque chose qui remplit cette lacune, et fournit ainsi les déterminations que cette notion de déduction était en principe appelée à donner d'elle-même.

La réponse à cette question est si omniprésente dans les textes de Frege que l'on ne peut que s'étonner qu'elle n'ait pas été sérieusement envisagée comme telle jusqu'à maintenant. Ce qui permet à l'idéographie de prendre sa forme spécifique, malgré un certain manque de déterminations dans les concepts fondamentaux qui font d'elle une logique du contenu, *ce sont les déterminations mathématiques, et plus précisément, celles de l'Arithmétique*. Frege l'annonce dès le sous-titre de son opuscule : « Un langage formulaire de la pensée pure *construit d'après celui de l'arithmétique* »[140]. L'explication de ces mots dans la préface de la *Begriffsschrift* constitue d'ailleurs la motivation des références à l'Arithmétique que nous avons déjà eu l'occasion de rencontrer dans nos analyses précédentes :

> La construction à partir du langage formulaire arithmétique que j'ai indiquée dans le titre se rapporte plutôt aux pensées fondamentales qu'au détail de l'organisation. Tout effort pour élaborer une similitude artificielle en comprenant un concept comme étant la somme de ses marques caractéristiques est cependant resté absolument hors de ma pensée. C'est dans la manière d'employer les lettres que mon langage formulaire est le plus immédiatement tangent à celui de l'arithmétique. (Frege, 1879/1999, p. 6)

La place de l'Arithmétique en tant que modèle pour l'idéographie ne se limite aucunement à cette remarque. Sa présence est constante tout au long de l'ouvrage, en particulier dans le premier chapitre qui présente tous les instruments du langage formulaire, à commencer par la distinction entre deux types de signes employée dans la « théorie universelle des grandeurs » qui ouvre ces réflexions (Frege, 1879/1999, p. 15). Toutefois, ce rapport particulier de l'idéographie à l'Arithmétique n'a été guère remarqué depuis le moment même de l'apparition de l'œuvre frégéenne, au point qu'il pourrait passer pour l'un des événements les plus refoulés de l'histoire de la philosophie et des sciences. Ainsi, dès les toutes premières critiques de l'idéographie, ce lien intrinsèque allant de l'Arithmétique à la

---

[140] « *Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* », dans l'original allemand.

logique renouvelée par l'idéographie est demeuré obstinément incompris. Schröder affirme dans son compte rendu:

> Dans le sous-titre : « un langage formulaire construit d'après [*nachgebildete*] celui de l'arithmétique… », je vois le point spécifique dans lequel l'écrit correspond le moins à ce qui est annoncé, et dans lequel néanmoins une correspondance bien plus complète pourrait être obtenue – précisément par la proximité négligée avec les travaux antérieurs. Si, pour un regard impartial, la « construction d'après » [*Nachbildung*] paraît bel et bien ne constituer rien d'autre, ici et là, que l'utilisation de *lettres*, alors il me semble que cela n'est pas suffisant pour justifier l'attribut utilisé. (Schröder, 1880a, p. 84)[141]

Également, Lasswitz dans son compte rendu, même s'il soutient que « le titre de l'ouvrage, certes, donne au début des raisons pour le scepticisme, mais un examen plus attentif du livre le dissipe rapidement », ajoute presque immédiatement : « Néanmoins, il aurait été souhaitable que l'auteur soit entré dans plus de détails concernant sa position par rapport à ces […] efforts. » (Lasswitz, 1879, pp. 210-211). Et encore Husserl, dans une lettre adressée à Frege plus de dix ans plus tard, prétend le corriger à propos de cette question :

> Bien sûr, il me semble que l'idéographie, puisqu'elle doit être une « *lingua char[acteristica]* », ne devrait pas être appelée une « un langage formulaire construit d'après celui de l'arithmétique… ». En effet, il devrait être certain que l'arithmétique est un *calc[ulus] rat[ionacinator]* et pas une *l[ingua] char[acteristica]*. (Frege, 1976, p. 100)[142]

Bien que Frege ne semble jamais avoir répondu à cette lettre de Husserl, il revient, brièvement mais à plusieurs reprises, sur ce rapport de l'idéographie à l'Arithmétique dans les textes autour de la *Begriffsschrift*. Pourtant, une fois les ressorts fondamentaux de l'idéographie établis, Frege semble simplement abandonner ses explications, et se concentrer sur la reconstruction de l'Arithmétique par les nouveaux moyens logiques offerts par son système. Cette tâche détermine, on le sait, la raison première du programme logiciste auquel Frege se consacre dès le dernier chapitre de son opuscule, et à laquelle il vouera ses plus grands ouvrages. Aussi, la postérité n'envisagera-t-elle le rapport de l'idéographie à

---

[141] *In dem Zusatz der Titelworte: „eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache..." erblicke ich denjenigen Punkt, in welchem die Schrift am wenigsten ihrem Aushängeschild entspricht und in welchem gleichwohl ein viel vollkommneres Entsprechen erzielbar wäre — eben durch die versäumte Annäherung an die vorgängigen Arbeiten. Wenn die „Nachbildung" in der That dem unbefangenen Blick in weiter Nichts zu bestehen scheint, als dass hier, wie dort* Buchstaben *verwendet werden, so scheint mir dies nicht hinlänglich das verwendete Attribut zu rechtfertigen*.

[142] *Freilich scheint es mir, daß die Begriffsschrift, da sie eine „lingua char." sein soll, nicht als „eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache" genannt werden dürfte*. *Denn dies dürfte doch sicher sein, daß die Arithmetik ein calc. rat. u. nicht eine l. char. ist.*

l'Arithmétique que sous cette *dimension fondationnelle* liée au projet logiciste, à commencer par la divulgation de l'œuvre frégéenne par Russell[143].

L'importance de cet aspect fondationnel du rapport Arithmétique-logique pour les enjeux philosophiques associés à la logique naissante est sans doute immense, car l'Arithmétique, en tant que partie des mathématiques, était ordinairement considérée d'après la perspective kantienne comme synthétique, et en tant que telle, irréductible aux déterminations conceptuelles de la logique. La possibilité de réduire l'Arithmétique à la logique nouvellement systématisée constitue ainsi un pas décisif dans la direction d'une « analytisation » de la philosophie. Le programme d' « arithmétisation de l'Analyse » déjà en œuvre dans les travaux de certains mathématiciens, tels que Weierstrass, Kronecker ou Dedekind, promettait d'ailleurs la possibilité de poursuivre plus avant cette « analytisation »[144]. Mais l'autre aspect, concernant la place exemplaire de l'Arithmétique dans la reconstitution de la logique, est aussi décisif, voire plus, pour les aspirations philosophiques de celle-ci. Et cela, d'une part, parce que comme nous l'avons suggéré et comme nous allons l'établir plus largement, avant qu'elle ne soit reconstruite à l'intérieur de la logique, l'Arithmétique vient apporter ses déterminations à une logique dont les instruments n'arrivent pas à se suffire entièrement à eux-mêmes. La portée philosophique de la puissance d'analytisation de la logique serait donc dépendante de la façon particulière dont celle-ci s'articule avec l'Arithmétique *au niveau de sa propre constitution* ou de sa genèse et non pas (ou pas encore) au niveau de ses produits ou résultats. Mais d'autre part, dans la mesure où l'Arithmétique pourrait être responsable de la forme particulière de la nouvelle logique, à partir d'une place ambiguë parce qu'extra-logique, cette *dimension constitutive* oubliée du rapport Arithmétique-logique pourrait apporter une lumière nouvelle sur les raisons de l'échec du programme logiciste.

Comme nous l'avons dit, l'importance des conceptions mathématiques de Frege pour l'élaboration de l'idéographie a été négligée presque totalement par les interprètes de son œuvre. Parmi les rares exceptions qui confirment cette règle nous pouvons mentionner Baker et Hacker (1984), Jamie Tappenden (2006) et Mark Wilson (1992; 2010). Les premiers signalent que, tout comme les inventions logiques de Boole étaient appuyées sur les développements mathématiques de la première moitié du XIXe siècle en Angleterre, la logique frégéenne est tributaire des mathématiques de son époque, seulement plus d' « avant-garde ». Il s'agirait notamment de la généralisation de la notion de fonction opérée dans le cadre de la Théorie abstraite des fonctions, dont l'idéographie pourrait être conçue

[143] Cf. Russell (1903/2010), Appendice A.

[144] Sur l'arithmétisation de l'Analyse, voir *infra* IV.1.3, IV.2.1 et surtout V.2.

comme une extension à la logique. Ce fait expliquerait en particulier la création de la fonction propositionnelle, centrale pour l'idéographie[145]. L'approche de Tappenden est plus subtile. Elle distingue avec rigueur deux traditions dans la conception des mathématiques au XIX^e^ siècle : celle liée à Weierstrass, algorithmique et préoccupée par la représentation particulière des objets mathématiques (et des fonctions en particulier) ; et celle liée à Riemann, plus conceptuelle, liée à des intuitions géométriques et physiques, et ouverte aux problèmes résultant de la définition des objets mathématiques indépendamment de ses représentations. Tappenden montre ainsi comment, à la différence de ce que la tradition liée à la philosophie analytique a voulu croire, Frege se situait dans la tradition riemannienne des mathématiques, ce qui aurait joué un rôle déterminant dans sa conception de la logique, et notamment aussi, bien que de façon non-exclusive, dans l'introduction de la fonction propositionnelle. Enfin, Wilson explore avec précision et méticulosité l'arrière-plan géométrique de la pensée de Frege à partir de son tout premier travail mathématique, avant la *Begriffsschrift.* L'idée de Wilson est que les problèmes propres à la Géométrie, et en particulier à la Géométrie projective telle qu'elle se développait dans les travaux concurrents de Poncelet et de von Staudt, permettent de jeter une lumière nouvelle sur les formulations logiques de Frege, et spécialement des *Grundlagen*. Notamment, une certaine méthode concernant des « éléments d'extension » dans la Géométrie projective, déterminés selon une procédure assimilable à la définition en termes de classes d'équivalence, serait à la base de la conception du nombre proposée par Frege dans son ouvrage célèbre de 1884. Au demeurant, depuis cette perspective géométrique, d'autres éléments de la pensée frégéenne, comme le principe contextuel ou la nature de la définition, voire son projet logiciste tout entier, gagneraient en intelligibilité.

Ces études ont le mérite d'attirer l'attention sur cette dimension oubliée du rapport entre logique et mathématiques. Elles comportent pourtant quelques faiblesses. D'une part, elles n'exhibent pas les moyens précis par lesquels les conceptions et les pratiques mathématiques déterminent de manière effective les instruments logiques. Dans le cas de Baker et Hacker, bien que leur analyse montre avec suffisamment de détail la façon dont les vertus et les défauts de la fonction propositionnelle proposée par Frege peuvent être compris à travers la confrontation de la notion de contenu jugeable avec les différentes fonctions mathématiques[146], on n'y trouve guère de développements sur la fameuse « Théorie abstraite des fonctions » à laquelle Frege emprunterait selon ces auteurs toutes les nouvelles ressources de son idéographie. Une telle théorie ou conception des fonctions devrait être en mesure d'expliquer de façon très précise pourquoi, comme ils l'affirment, l'expression « Si le fusible

[145] Cf. Baker et Hacker (1984, pp. 13-15)

[146] Voir fondamentalement Baker et Hacker (1984, ch. 6, §§ 4 et 5).

n'a pas sauté, l'horloge sera en train de marcher » a la même forme logique que « $3 > 2$ » (1984, p. 123). De fait, elle ne l'a pas, du moins pour Frege. Ce qui ne veut pas dire qu'elle ne puisse pas l'avoir ; mais sans présenter plus de détails sur la manière dont la notion de fonction de la théorie abstraite qu'ils invoquent comprend l'expression « $3 > 2$ », remarquer que les deux expressions « expriment des relations entre couples d'objets » demeure clairement insuffisant. Ce que Tappenden montre, précisément, c'est que la notion de fonction est loin d'avoir un sens univoque dans le contexte mathématique où l'œuvre de Frege a lieu, et que c'est en fonction de ces divergences que doit être comprise la démarche frégéenne dans sa spécificité. Mais si Tappenden présente avec une certaine minutie ce contexte, il ne montre pas les ressorts spécifiques par lesquels il détermine, ne serait-ce qu'en partie, les instruments sur lesquels s'appuiera la logique frégéenne. Tappenden se contente alors d'évoquer des conceptions abstraites et des méthodologies générales dont l'efficacité sur les formulations frégéennes resterait, pour ainsi dire, du pur ordre de l'influence. Bien que plus attentif à la restitution précise des enjeux mathématiques qui l'intéressent, Wilson finit par s'appuyer sur le même type de rapport, essentiellement méthodologique et analogique, entre les déterminations mathématiques et les mécanismes logiques mis en œuvre par Frege pour la constitution de son système.

Mais d'autre part, ces approches manquent un aspect essentiel du rapport non-fondationnel (ou *constitutif*, comme nous l'appellerons par la suite) de la nouvelle logique aux mathématiques, qui concerne *la spécificité de l'Arithmétique*, sur laquelle Frege insiste tant après tout. Étant donné que l'une des nouveautés les plus radicales de la logique frégéenne réside dans l'articulation fonctionnelle des propositions, il paraît naturel que les efforts pour comprendre les emprunts et influences en œuvre à la base de son élaboration se dirigent, comme avec Baker et Hacker et Tappenden, directement vers la Théorie mathématique des fonctions, d'autant plus que Frege s'y réfère lui-même. Mais ce n'en est pas moins méconnaître la nature de la logique visée par Frege, ainsi que la complexité des moyens qu'il déploie pour l'atteindre. Si la Théorie des fonctions a un rôle à jouer dans la constitution d'un langage formulaire tel que Frege l'envisage, ce n'est pas par simple généralisation, mais parce que *l'Arithmétique se laisse comprendre, au moins en partie, de manière fonctionnelle, et que c'est d'après le langage de l'Arithmétique que ce langage formulaire-ci est construit*. Comment expliquer sinon que la distinction entre signes déterminés et indéterminés sur laquelle s'ouvre l'explication des symboles de la *Begriffsschrift*, et qui est à la base de la notion de fonction propositionnelle, soit pensée en fonction des signes comme « $+$ », « $-$ », « $\sqrt{}$ », « 0 », « 1 », « 2, » mais explicitement rejetée pour des signes de fonction comme « *log* » ou « *sin* » ? (1879/1999, p. 15). À chercher un lien direct entre la Théorie mathématique des fonctions et le caractère fonctionnel de la logique tel qu'il résulte de la construction frégéenne, on risque, comme dans les cas que nous venons d'évoquer, de ne voir qu'un lien purement externe entre mathématiques et logique dans cette nouvelle dimension constitutive. Mais le lien des formulations logiques avec la Géométrie mis en relief par Wilson est, quant à lui, trop indirect, et l'auteur se voit ainsi obligé de faire appel à des métaphores et des analogies (par ex. 2010, pp. 380-381), et de les élever au rang méthodologique pour connecter l'ensemble de domaines disparates (Géométrie, Algèbre, Théorie des nombres…) qu'il cherche à mobiliser pour restituer le socle mathématique de la pensée de Frege. Symptomatiquement, Wilson finit par reconnaître l'inadéquation de l'ensemble des éléments qui se dégagent d'une telle approche pour le traitement de l'Arithmétique auquel se voue Frege (1992, p. 174).

Tout cela témoigne d'une incompréhension du niveau proprement constitutif de la logique frégéenne, et de ce qui s'y joue. Aussi, la prise en compte de la spécificité de l'Arithmétique à ce niveau promet-elle de contourner ces problèmes, à condition que l'on comprenne quel sens il y a, pour l'idéographie, à prendre l'Arithmétique pour modèle. Ce sens, Frege n'a cessé de le rappeler dans ses premiers écrits logiques. Si l'Arithmétique peut être un modèle pour un langage aspirant à s'ériger en logique du contenu, c'est parce que *l'Arithmétique est déjà un langage formulaire exprimant des contenus*, c'est-à-dire, une *lingua characterica*. Frege mentionne déjà cette idée dans la préface de la *Begriffsschrift*, où il affirme qu' « on peut voir dans les signes arithmétiques, géométriques, ou chimiques, des réalisations de la pensée leibnizienne pour des domaines particuliers. » (1879/1999, p. 7). Cette préface se clôt d'ailleurs en soulignant la place privilégiée de l'Arithmétique dans la conception de son idéographie :

> Comme je l'ai mentionné au commencement, l'arithmétique a été le point de départ du raisonnement qui m'a conduit à mon idéographie. Par conséquent, je pense d'abord l'appliquer à cette science en cherchant à mieux analyser ses concepts et à fonder plus profondément ses propositions. (Frege, 1879/1999, p. 9)

Si ces quelques lignes à propos de cette question cruciale peuvent, comme le suggérait Lasswitz, sembler insuffisantes, après la mécompréhension témoignée par les comptes rendus de son opuscule, les explications de Frege à ce sujet deviendront parfaitement explicites :

> Une *lingua characterica* doit, comme dit Leibniz, *peindre non pas les paroles mais les pensées.* Les langages formulaires mathématiques s'approchent beaucoup plus de cet objectif, et même ils l'atteignent partiellement. Mais celui de la géométrie reste encore tout entier à développer, et celui de l'arithmétique même ne suffit pas pour son propre domaine ; car précisément aux endroits les plus importants, lorsqu'il faut introduire de nouveaux concepts, établir de nouveaux fondements, il doit céder la place au langage des mots,

> puisqu'il compose seulement des nombres à partir de nombres et peut exprimer seulement la sorte de jugements qui ont trait à l'égalité des nombres qui ont été formés de telle ou telle manière. *Mais l'arithmétique au sens le plus large forme aussi des concepts, et en vérité d'une richesse et d'une précision dans l'articulation interne telles que peut-être on ne puisse en trouver combinés avec une égale perfection logique dans aucune autre science.* (Frege, 1880-81, p. 22, nous soulignons à partir de 'Mais l'arithmétique...')

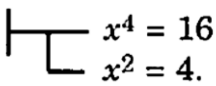
Et une fois de plus, la fin du texte revient sur cette question, où la première chose que Frege dit avoir établie est que l'idéographie « a un objectif plus étendu que la logique booléenne, en ce qu'elle veut rendre possible la représentation d'un contenu en se combinant avec les signes arithmétiques et géométriques. » (1880-81, p. 58). Et plus tard encore, dans un autre texte de cette époque :

> …Le langage par formules de l'arithmétique est une idéographie (*Begriffsschrift*) puisqu'il exprime immédiatement la chose sans passer par les sons.
>
> Il acquiert ainsi une concision qui permet de faire tenir en une seule ligne le contenu d'un jugement simple. Ces contenus – ici des égalités ou inégalités – sont écrits l'un en dessous de l'autre, dans l'ordre où ils découlent l'un de l'autre. Quand une troisième proposition découle des deux premières, on l'en sépare par un trait horizontal qui se lit : « par conséquent ». Ainsi l'extension bidimensionnelle du plan de l'écriture est-elle mise à profit pour la clarté de la lecture. La déduction a, en arithmétique, un cours remarquablement uniforme, et repose presque toujours sur ce principe que les mêmes transformations opérées sur les mêmes nombres donnent les mêmes résultats. (Frege, 1882b, p. 68)

Si nous citons tous ces passages, c'est pour montrer dans quelle mesure la question de l'Arithmétique, non pas en tant que produit de la logique définissant la raison et le but du projet logiciste, mais en tant que sa source, constituant les ressorts intimes d'une logique du contenu, était centrale pour Frege au moment même de la conception des instruments fondamentaux de cette logique. Une simple lecture attentive suffit pour s'apercevoir que la référence à l'Arithmétique est présente dans tous les aspects de la construction de l'idéographie dans les textes de cette époque. Nous avons déjà évoqué la distinction cruciale entre signes déterminés et indéterminés au début du premier chapitre de la *Begriffsschrift*, empruntée à « la théorie universelle des grandeurs » (1879/1999, p. 15)[147]. Et si les exemples arithmétiques ne sont pas très nombreux dans la *Begriffsschrift*, Frege s'y appuiera ouvertement et de manière massive dans une conférence donnée auprès de la *Jenaische Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft* (1879) juste après la parution de son

[147] Nous aborderons les rapports particuliers entre la théorie des grandeurs et l'Arithmétique dans le cadre des problèmes frégéens dans la quatrième partie de ce travail.

opuscule. Schröder ne manquera pas au demeurant de signaler cette conférence comme propice à la compréhension des intentions du système frégéen, quoiqu'elle ne change rien à l'appréciation qu'il fait de sa valeur (Schröder, 1880b, p. 230). C'est d'ailleurs cette incompréhension dans la réception de son ouvrage qui a sans doute poussé Frege à exhiber davantage ce lien intime avec l'Arithmétique. Aussi, dans sa longue réponse à Schröder, l'ensemble des expressions formelles de son système est-il présenté à l'aide de jugements arithmétiques du type $2+3=5$, $\neg(2+3=6)$, $(x+3=10) \rightarrow (x=7)$, ou $\neg\big((2+3=10) \rightarrow \neg(2=7)\big)$ (1880-81, pp. 18-20, note c). Il en va de même des expressions de contenu, à commencer par le signe de fonction propositionnelle, que Frege présente au moyen de la proposition arithmétique $2^4 = 16$. Ainsi, lorsque l'un des nombres est conçu comme remplaçable et se trouve dès lors indiqué par un « x » (ou un « y ») à sa place, « le contenu jugeable se décompose en une partie constante et une partie variable », donnant des expressions telles que : $x^4 = 16$, $2^x = 16$, ou $x^4 = y$, et déterminant respectivement les concepts « racine quatrième de 16 », « logarithme de base 2 de 16 », ou la relation « d'un nombre à sa puissance quatrième » (1880-81, pp. 25-26). Le même cas servira d'ailleurs à présenter le signe de généralité :

> La généralité dans le jugement
>
> 
>
> « toutes les racines carrées de 4 sont des racines quatrièmes de 16 » est exprimée au moyen de la lettre *x*, en ce que le jugement est posé comme valant quel que soit ce qu'on entend par *x*. J'ai stipulé ce sens une fois pour toutes pour les lettres latines dans l'expression d'un jugement. (Frege, 1880-81, p. 27)

Des variations de ce cas lui permettront de présenter immédiatement la restriction du domaine du signe de généralité, et ensuite, les différentes possibilités de combinaisons de l'ensemble de signes formels et de contenu mis à disposition par son système. Après quoi, Frege s'engage dans l'illustration de la puissance expressive de l'idéographie au moyen d'un grand nombre d'exemples portant toujours sur l'Arithmétique, pour montrer « comment l'idéographie est, en vertu de sa disposition, apte à atteindre ses objectifs plus lointains, en se combinant avec les signes de l'arithmétique » (1880-81, p. 31).

Non seulement les signes formels et de contenu se révèlent ainsi conçus suivant le modèle des articulations propres à l'Arithmétique. Comme Frege le signale dans le passage déjà cité, l'utilisation de l'espace bidimensionnel, dont nous avons déjà montré l'importance pour la signification des régimes sémiotiques, est elle aussi empruntée à l'Arithmétique. Ce qui apparaît encore plus clairement dans sa longue réponse à Schröder :

> Schröder me fait grief de ce que, m'écartant de ce qui est habituel, je préfère la graphie de haut en bas à celle de gauche à droite. En vérité je me trouve en complet accord avec l'usage, car dans une dérivation arithmétique aussi l'on fait se succéder de haut en bas les égalités séparées. Mais toute égalité est un contenu jugeable ou un jugement comme aussi toute inégalité, toute congruence etc. Maintenant, ce que je place l'un au-dessous de l'autre, ce sont aussi des contenus jugeables ou des jugements. (Frege, 1880-81, p. 58)[148]

Finalement, même pour la question décisive de la déduction ou principe d'inférence Frege reconnaît la place fondamentale à l'Arithmétique. Car lorsqu'il cherche à répondre à l'accusation de pédanterie lancée par Schröder contre l'utilisation d'une seule règle d'inférence, Frege semble être bien conscient du manque de fondement substantiel du principe formel de déduction de son système. Dans le cadre conceptuel de l'idéographie, organisé autour de l'axe contenu-expression, une telle justification est censée être fournie, comme nous l'avons vu, par un rapport interne entre la règle d'inférence opérant sur les expressions formelles, et un principe déductif en œuvre dans les expressions d'un langage. La réponse de Frege sur ce point est à la fois laconique et éloquente : sa seule règle d'inférence est justifiée si elle est « suffisante » pour « tout faire »[149]. Et lorsqu'il ressent l'obligation d'expliquer ces mots, l'Arithmétique apparaît encore dans son rôle de modèle :

> Ne pouvait certes ici être atteinte qu'une simple probabilité, du fait que j'y étais arrivé par ce moyen dans de nombreux cas. Mais le choix de l'exemple sur lequel le montrer n'était pas indifférent. Afin de ne pas risquer de négliger précisément des transformations importantes pour l'usage scientifique, j'ai choisi la dérivation continue d'une proposition qui me semble être indispensable à l'arithmétique, bien qu'en tant qu'allant de soi elle soit peu prise en considération. (Frege, 1880-81, p. 49)[150]

On voit de cette manière que l'Arithmétique traverse d'un bout à l'autre l'espace sémiotique constitutif de l'idéographie, ce qui donne un sens très concret au sous-titre de la *Begriffsschrift*. Tant dans sa dimension articulatoire que déductive, le système formel frégéen recèle des objets et propriétés de l'Arithmétique derrière chacune de ses instances déterminées : expressions formelles, expressions de contenu, signification de cette différence

[148] On trouve une remarque analogue dans Frege (1882c, p. 77), où l'on peut lire : « …chaque fois qu'en arithmétique on procède à une déduction, on a soin de ne pas écrire les équations les unes à côté des autres, on les dispose, à fin de clarté, l'une sous l'autre. »

[149] « Le principe de la plus grande limitation possible du nombre des lois primitives ne serait pas complètement satisfait sans la preuve que le peu qui reste est encore suffisant. » (Frege, 1994, p. 48). « …fournir un échantillon d'exécution brève et commode de ces inférences, ce n'était pas là mon intention, mais plutôt donner la preuve que j'ai assez de mes lois primitives pour tout faire. » (Frege, 1994, p. 49).

[150] La proposition en question est, comme on le sait, celle qui énonce le principe d'induction mathématique, auquel Frege se réfère sous le nom d' « induction de Bernoulli », et dont la démonstration avec les seules ressources de l'idéographie est l'une des tâches majeures du dernier chapitre de la *Begriffsschrift*.

expressive entre formel et de contenu, articulations induites par cette structure, principe déductif… L'Arithmétique s'impose ainsi comme l'enclume sur laquelle les instruments de formalisation de la nouvelle logique sont forgés et peuvent prendre une forme spécifique et concrète. Certes, les références à l'Arithmétique ne sont pas les seules références que l'on peut trouver dans les écrits de Frege de cette époque ; des illustrations géométriques, chimiques, astronomiques ou simplement langagières sont aussi présentes presque à tout moment. Qui plus est, comme nous l'avons dit, l'appel explicite à l'Arithmétique dans cette dimension structurante et constitutive disparaît pratiquement dans les écrits ultérieurs. Pourtant, la persistance et la consistance de la présence, même voilée, de l'Arithmétique dans l'évolution de l'idéographie ne sont pas comparables à celle du reste des savoirs et pratiques convoqués. Au point que les mots qu'utilise Frege pour justifier la règle d'inférence en invoquant l'Arithmétique peuvent sans doute être appliqués à tous les cas que nous venons de répertorier : *le choix de l'exemple n'est aucunement indifférent*. Le sous-titre de la *Begriffsschrift* ne veut pas dire autre chose, et l'utilisation presque exclusive d'exemples arithmétiques pour la présentation de son système d'écriture dans ses écrits de maturité viendra confirmer cette prééminence.

I.3.3. L'Arithmétique comme contenu et synthèse

L'Arithmétique, comme théorie mathématique spécifique concernant essentiellement les opérations portant sur les nombres entiers, prend de cette façon une place décisive qui ne semble pas avoir été suffisamment reconnue tant dans les réflexions sur la naissance de la logique contemporaine que dans celles sur les conditions du passage de la philosophie à l'âge de sa contemporanéité. Interpellée, moins dans sa nature mathématique, que dans sa dimension sémiotique, envisagée non pas comme théorie scientifique, mais comme langage ou comme système des signes, l'Arithmétique s'installe subrepticement dans l'écart énigmatique qui maintenait à distance les contenus ouverts véhiculés par les expressions d'un langage et le fonctionnement strict d'une logique formalisée. En devenant l'objet sur lequel une théorie du signe et de la signification déterminée par l'axe expression-contenu peut s'appuyer pour constituer une nouvelle logique, l'Arithmétique se place dans cette position intermédiaire depuis laquelle elle peut apporter la solution aux deux aspects d'un même problème. Comme il a été dit, en tant que langage particulier et déterminé, elle permet de prêter ses déterminations spécifiques à une conception générale du signe qui n'arrivait pas, faute de déterminations supplémentaires, à construire effectivement d'elle-même une logique.

Et par le même mouvement, elle permet à la logique d'incorporer de manière rigoureuse un contenu contre lequel sa scientificité et son caractère formel s'étaient toujours définis.

Pour avoir une première approche de la façon précise dont l'Arithmétique occupe cette position, il suffit de revenir sur l'une des invocations à l'Arithmétique qui a lieu dans un moment décisif de la *Begriffsschrift*, à savoir au moment de l'explication du signe de fonction. Cette invocation est d'autant plus significative qu'elle est l'une des seules faites par Frege dans cet ouvrage, comme si elle n'avait lieu que sous une véritable contrainte. C'est ainsi qu'après plusieurs exemples empruntés au langage des mots pour essayer de fixer le sens du signe de fonction, Frege exhorte à se méfier des erreurs propres à l'emploi de la langue, et s'empresse d'en montrer les difficultés et d'en assurer le véritable sens à l'aide d'une confrontation entre les deux phrases : « le nombre 20 est représentable comme la somme de quatre nombres au carré » et « chaque nombre entier positif est représentable comme la somme de quatre nombres au carré ». À ce sujet, Frege écrit :

> il semble alors possible de comprendre 'être représentable comme la somme de quatre nombres au carré' comme étant une fonction qui a une fois 'le nombre 20' et l'autre fois 'chaque nombre entier positif' comme argument. On peut reconnaître que cette compréhension est erronée en remarquant que 'le nombre 20' et 'chaque nombre entier positif' ne sont pas des concepts du même rang. Ce qui peut être dit du nombre 20 ne peut pas être dit dans le même sens de 'chaque nombre entier positif', mais peut l'être de chaque nombre entier positif dans certaines circonstances. L'expression 'chaque nombre entier positif' ne donne pas à elle seule, contrairement à 'le nombre 20', une idée indépendante, mais elle reçoit un sens seulement dans le contexte de la proposition. (Frege, 1879/1999, p. 31)

Toute la complexité de la question du contenu formel se trouve condensée dans cet exemple, depuis les différentes figures du contenu déterminées par les multiples niveaux d'articulation, jusqu'au besoin du signe de généralité, en passant par l'analyse fonctionnelle des jugements. Or il est facile de voir comment la nature arithmétique de l'exemple n'est pas arbitraire ou contingente. Car si toutes ces déterminations du contenu peuvent être conçues avec clarté grâce au rapport entre « le nombre 20 » et « chaque nombre entier positif », il n'en est pas forcement de même si au lieu de nombres on envisage un autre type d' « objet » ou d' « être », selon la modalité expressive suivant laquelle ils se présentent dans le langage. Prenons, par exemple « maison », « oxygène » et « Caton » (exemples que Frege prend à un moment ou un autre de son opuscule). On verra alors qu'à chaque fois, le rapport entre l'expression de la généralité appliquée à chaque objet (« chaque … »), et l'individuation d'un objet du genre correspondant (« le … »), est, *si l'on reste au niveau strict des expressions*, de type différent. Ainsi, si l'expression « chaque maison » ne pose en principe pas de problème, l'individuation d'une maison, comme dans le cas de « la maison de Priam », nécessite une opération expressive qui diffère de la façon dont « le nombre 20 » individualise le concept de nombre (entier positif) ; en effet, si dans le cas du nombre 20 l'article défini semble suffire pour l'individualiser, « maison » a besoin des déterminations supplémentaires, venant dans ce cas de l'attribution à un individu (Priam). Inversement, si « l'oxygène » ne pose pas de problème, c'est maintenant « chaque oxygène » qui est problématique ; et si cette dernière expression est conçue comme normale, alors c'est l'expression « l'oxygène » qui a besoin des déterminations supplémentaires pour exprimer l'individualité. Enfin si l'expression « Caton » désigne un individu, il est clair que le contenu de « chaque Caton » est incertain. On pourrait toujours considérer que l'expression générale pour l'objet ou être « Caton » est, par exemple, « chaque homme », mais alors le cas du nombre 20 nous obligerait à penser à « l'homme Caton », ou même « le Caton », pour exprimer l'individu, alors que ce n'est pas sous cette forme que l'on s'*exprime*. C'est dire que le rapport tant d'individuation comme de généralisation qui a lieu entre « le nombre 20 » et « nombre » ou « nombre entier positif » est d'un type très particulier. C'est dire aussi que, en construisant l'idéographie d'après le langage de l'Arithmétique, ce sera en fonction de ce type très particulier de structuration expressive ou sémiotique que sera réglée l'analyse formelle de l'ensemble des expressions d'une langue, que le simple principe de variation-invariance, même instrumenté sous la forme de la fonction propositionnelle, ne suffit pas à déterminer entièrement. De fait, c'est précisément dans le contexte de la présentation de la fonction propositionnelle et du signe de généralité au moyen des propositions arithmétiques que Frege décèlera avec clarté, dans sa longue réponse à Schröder, les différents niveaux articulatoires qui découperont les figures dont sera peuplé le plan des contenus conceptuels : contenu jugeable, concept, individu… (1880-81, pp. 26-27).

Arithmétique et contenu s'avèrent par là maintenir un lien intime dans la naissance de la nouvelle logique. La nouveauté de ce lien ne saurait être négligée. À la différence d'une conception largement répandue au XIXe siècle, suivant laquelle l'Arithmétique s'appuie tant psychologiquement que sémiotiquement, voire logiquement, sur l'abstraction des contenus, la mathématisation de la logique qui s'exerce ici *à partir de l'Arithmétique*, loin d'être la responsable de la perte du contenu, est celle qui vient le restituer. À condition pourtant d'assumer son caractère de langage particulier, et de se laisser analyser au niveau du fonctionnement de ses signes selon une théorie du langage et de la signification pour laquelle forme et contenu ne constituent pas une polarité fondamentale et incompatible.

Mais le prix à payer par les prétentions analytiques d'une philosophie appuyée sur une logique prenant en charge le contenu peut s'avérer très élevé. Car en tant que système expressif particulier sur le modèle duquel on peut construire une logique, *l'Arithmétique n'est* *qu'un langage parmi d'autres*, dont l'adéquation par rapport à l'idéographie envisagée peut certes s'avérer significative, mais ne saurait être justifiée analytiquement au moyen de la logique qui est censée en être le résultat. En effet, pourquoi préférer par exemple le rapport d'individuation que le nombre 20 maintient avec les nombres entiers positifs à celui que la maison de Priam maintient avec les maisons, ou que Caton maintient avec les hommes, au moment de déterminer la forme générale sur laquelle tous les contenus conceptuels ou logiques devront se régler ? Et comment les instruments logiques résultants pourraient juger de cette pertinence ? C'est pourquoi, dans sa position de modèle à analyser, et non pas de théorie à fonder, *l'Arithmétique devient la source de déterminations synthétiques*, sur lesquelles tous les instruments analytiques ont perdu par définition la possibilité d'avoir prise.

Toujours est-il que l'Arithmétique constitue bien la source de l'incorporation d'un certain contenu dans la logique. Et le fait d'introduire par là une dimension synthétique dans la logique du contenu, loin de diminuer son intérêt pour l'histoire du problème (philosophique avant tout) de la formalisation du contenu, ne fait que l'accroitre. Cette portée philosophique (métaphysique ou ontologique) de l'Arithmétique, en tant que source de contenu, demeure cependant plus ou moins tacite dans les textes de l'époque de la *Begriffsschrift*. En effet, dans ces pages, les réflexions occasionnelles d'ordre général concernant l'Arithmétique insistent plutôt sur sa position simplement exemplaire ou sur son aspect particulier d'objet à construire, ce qui contraste avec son importance effective dans le nouveau système. Mais si cette gravité ontologique ne se laisse pas exprimer directement dans les textes destinés à la publication, elle n'est pas moins présente dans l'esprit de Frege, comme le révèle avec une particulière clarté ce passage de sa lettre à Stumpf[151] :

> Je vois comme l'un des plus grands mérites de Kant, le fait qu'il ait reconnu que les propositions de la géométrie sont des jugements synthétiques, mais je ne peux lui accorder le même pour l'arithmétique. Les cas sont très différents. Le domaine de la géométrie est celui de l'intuition spatiale, l'arithmétique ne connaît pas de telle limitation. Tout est dénombrable, pas seulement ce qui coexiste dans l'espace, pas seulement ce qui est dans une succession temporelle, pas seulement ce qui est externe mais également les activités et événements de l'esprit, et les concepts qui n'existent les uns par rapport aux autres ni temporellement, ni spatialement, mais seulement dans une relation logique. On ne peut trouver de limite à la dénombrabilité que dans l'imperfection des concepts. Les gens chauves, par exemple, ne sont pas dénombrables tant que l'on n'a pas déterminé exactement le concept de calvitie, de manière à ce que, pour chaque individu, il ne puisse y avoir aucun doute s'il tombe sous le concept. Ainsi, le domaine de la dénombrabilité est aussi large que

[151] Voir *supra* note 88.

> celui de la pensée conceptuelle, et une source de connaissance d'extension plus limitée, comme l'intuition spatiale ou la perception sensorielle, ne serait pas suffisante pour garantir la validité des propositions arithmétiques. (Frege, 1976, p. 163)[152]

On aurait tort de lire ce texte surprenant comme la énième postulation frégéenne du logicisme. Si ses derniers mots sont bien un appel à fonder les propositions arithmétiques au moyen de la pensée purement conceptuelle, l'ensemble du texte fait du nombre (entier) et de l'énumérabilité la forme sans frontières de tout contenu en tant que tel, au-delà de laquelle la pensée conceptuelle ne peut avoir la prétention de s'étendre sans se perdre du même coup. Tout se passe comme si par cette extension ontologique illimitée de l'Arithmétique Frege voulait effacer la particularité qui l'exposerait au risque du synthétique. Et ce faisant, les problèmes fondationnels liés au logicisme trouvent à leur tour, dans cette indissociabilité entre contenu et Arithmétique, un terrain ontologique où asseoir leur propre fondement. Le rapport spécifique mais intime entre Arithmétique et contenu mérite ainsi d'être examiné en détail. Car c'est suivant cette spécificité-là que sera agencée pour la philosophie la possibilité contemporaine de se reconnaître dans une logique, suivant les prescriptions et les promesses de sa propre modernité. Mais c'est aussi en fonction d'elle que pourra être jugée la prétention analytique liée au projet logiciste qui cherche à établir le sens et la direction d'une telle reconnaissance.

I.3.4. Arithmétique vs. Algèbre

Toutefois, lorsqu'il s'agit d'envisager la spécificité de la place de l'Arithmétique telle qu'elle résulte de son rapport à la logique dans l'œuvre frégéenne, on se voit confronté à deux problèmes majeurs.

Le premier tient à la nouveauté proprement frégéenne de ce rapport vis-à-vis de la tradition. Car l'idée de prendre l'Arithmétique comme modèle pour la construction d'une *lingua characterica universalis* n'était certainement pas nouvelle au moment de la parution de

---

[152] *Ich sehe ein grosses Verdienst Kants darin, dass er die Sätze der Geometrie als synthetische Urteile erkannt hat, aber ich kann ihm für die Arithmetik das Gleiche nicht zugeben. Die Fälle sind auch ganz verschieden. Das Gebiet der Geometrie ist das des räumlich Anschaulichen, die Arithmetik kennt keine solche Begrenzung. Zählbar ist alles, nicht nur was im Raume nebeneinander ist, nicht nur das zeitlich auf einander Folgende, nicht nur das Aeussere, sondern auch innere Vorgänge und Ereignisse der Seele, Begriffe, die weder in zeitlichen noch in räumlichen, sondern nur in logischen Beziehungen zu einander stehen. Eine Schranke für die Zählbarkeit kann man nur in der Unvollkommenheit der Begriffe finden. Die Kahlköpfigen sind z.B. solange nicht zählbar, als nicht der Begriff der Kahlköpfigkeit so genau bestimmt ist, dass bei keinem Einzelnen ein Zweifel sein kann, ob er darunter falle. So ist denn also das Gebiet des Zählbaren soweit wie das des begrifflichen Denkens, und es würde eine Erkenntnisquelle von beschränkterem Umfange, etwa räumliche Anschauung, sinnliche Wahrnehmung, nicht genügen, die allgemeine Geltung der arithmetischen Sätze zu verbürgen.*

la *Begriffsschrift*. Comme Frege le signale à plusieurs reprises, Leibniz avait déjà exploré cette voie. En effet, Leibniz, qui connaissait les travaux de Kircher et de Becher, avait commencé à travailler autour de cette idée depuis sa jeunesse dans sa *Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666/1858), dont le titre complet annonce déjà la place fondamentale de l'Arithmétique[153]. Insatisfait de ces recherches, il développera plus tard ces idées[154], qu'il n'abandonnera pas jusqu'à la fin de sa vie. Si Frege ne semble pas avoir connu ces textes de manière directe au moment de la conception de l'idéographie, le rapport d'une caractéristique à l'Arithmétique exploré par Leibniz lui était pourtant bien parvenu, renouvelé, comme on l'a vu, à travers la reconstitution de Trendelenburg.

Dans le texte de Trendelenburg auquel Frege renvoie dans la préface de la *Begriffsschrift*, on peut trouver des citations de Leibniz où le lien entre Arithmétique et caractéristique est ouvertement assumé, comme dans celle-ci, que Trendelenburg affirme issue d'un « morceau de papier sous l'inscription *Characteristica* » :

> Comme la langue philosophique pourrait être exprimée par des nombres, c'est-à-dire par l'Arithmétique, de même l'écriture philosophique pourrait être exprimée par des tracés de lignes, c'est-à-dire par la géométrie, de sorte que tous les problèmes et théorèmes des sciences ne deviendraient rien d'autre que des théorèmes de l'Arithmétique ou de la Géométrie, par lesquelles toutes ces choses peuvent être signifiées. C'est pourquoi de même que l'on peut toujours tester la vérité dans les nombres par le novénaire, de même dans les lignes par des essais. (Leibniz, cité dans Trendelenburg, 1867, p. 42)[155]

Le rôle exemplaire et modèle de l'Arithmétique est d'ailleurs constamment relevé par Trendelenburg dans ces pages. Ainsi, par exemple, lorsque les signes correspondent directement aux concepts…

> Tout d'abord, lorsque les parties constituantes d'un concept distinct sont encore connues distinctement, ou, ce qui est la même chose, lorsque la dissection (l'analyse) est poursuivie jusqu'au bout, il en résulte une connaissance adéquate, comme le concept de nombre en est un exemple. Le signe adéquat devra avoir la même nature. (Trendelenburg, 1867, p. 14)[156]

---

[153] « *Dissertatio de Arte Combinatoria in qua ex Arithmeticae fundamentis Complicationum ac Transpositionum Doctrina novis praeceptis exstruitur, et usus ambarum per universum scientiarum orbem ostenditur, nova etiam Artis Meditandi seu Logicae Inventionis semina sparguntur*. »

[154] Fondamentalement dans une série d'écrits datant de 1979, voir Couturat (1903, pp. 42-91) et l'édition de Loemker des écrits de Leibniz (1989, §§ 24-26).

[155] *Ut lingua philosophica exprimi posset per numeros seu Arithmeticam, ita scriptura philosophica posset etiam exhiberi per linear tim ductum seu geometriam, ita ut omnia problemata ac theoremata scientiarum non sint futura nisi theoremata Arithmeticae aut Geometriae, quibus alia omnia significari possunt. Quare ut in numeris semper explorari veritas potest per novenarium ita in lineis per tentamenta*.

[156] *Erst wenn die Bestandtheile eines deutlichen Begriffs wieder deutlich erkannt sind, oder, was dasselbe ist, wenn die Zergliederung (die Analysis) zu Ende geführt ist, entsteht eine adaequate Erkenntniss, wie der Begriff der Zahl davon ein Beispiel ist. Das adaequate Zeichen wird dieselbe Natur haben müssen*.

Plus profondément encore, la place du nombre est directement associée par Trendelenburg à la question du contenu, car comme il le signale, si la dimension calculatoire est laissée de côté dans une caractéristique générale, il reste encore une tâche logique « attirante », à savoir,

> Il reste la tâche de trouver un signe qui, comme notre écriture numérique, soit déterminé à travers du concept de la chose elle-même (Trendelenburg, 1867, p. 25)[157]

Également, au début du deuxième texte de ce volume des *Beiträge*, Trendelenburg soutient que la langue des signes caractéristiques de Leibniz doit exprimer (*darstellen*) les concepts « comme notre écriture numérique arabe exprime l'essence et les lois décimales des nombres » ainsi qu'être comprise comme les nombres « partout d'après son contenu, et partout pouvoir être lue par chacun dans sa langue propre » (Trendelenburg, 1867, p. 48)[158]. Mais de manière bien plus fondamentale, l'ouverture de son article sur Leibniz, rapporte de façon immédiate l'Arithmétique, dans ses aspects à la fois linguistiques et de contenu, *au projet d'une idéographie* :

> L'esprit humain, qui doit tant au signe, a reconnu à sa place la possibilité de façonner le signe encore plus avant, de manière à ce que (plutôt que les mots, signes, [et] choses disponibles dans la langue), les figures des signes et le contenu du concept soient mis en contact immédiat ; et il invente de tels signes, qui présentent comme distinctes et combinées, les marques caractéristiques qui sont distinctes et combinées dans le concept. La science a fait naître des débuts d'une telle idéographie [*Begriffsschrift*] dans les différents domaines à partir de leurs propres besoins, dont nos chiffres, qui expriment la formation progressive des nombres d'après la loi décimale, sont un excellent exemple… (Trendelenburg, 1867, pp. 3-4)[159]

On constate donc que le rôle de modèle éminent de l'Arithmétique pour la construction d'un langage formulaire était bien présent dans la tradition logique et philosophique dans laquelle s'insère le projet de Frege. Comment expliquer alors l'incompréhension que, tout comme la question du contenu en logique, l'appel constitutif et non fondationnel fait par Frege à l'Arithmétique suscita chez ses contemporains ? Cette incompréhension est d'autant

---

[157] *Es bleibt die Aufgabe, ein Zeichen zu finden, welches, wie unsere Zahlenschrift, durch den Begriff der Sache selbst bedingt ist.*

[158] *…wie unsere arabische Ziffernschrift das Wesen und das dekadische Gesetz der Zahlen ausdrückt/…wie die Zahlen, allenthalben nach dein Inhalt verstanden, allenthalben von jedem in der eigenen Sprache abgelesen werden.*

[159] *Der menschliche Geist, welcher dem Zeichen so viel verdankt, hat an dieser Stelle die Möglichkeit erkannt, das Zeichen noch weiter auszubilden, indem er statt des in der Sprache gerade vorhandenen Wortes, Zeichen und Sache, die Gestaltung des Zeichens und den Inhalt des Begriffs in unmittelbare Berührung bringt und solche Zeichen ersinnt, welche die im Begriff unterschiedenen und zusammengefassten Merkmale unterscheidend, und zusammenfassend darstellen. Die Wissenschaft hat auf einzelnen Gebieten aus eigenem Bedürfnisse Anfänge einer solchen Begriffsschrift hervorgebracht, wie davon unsere Ziffern, welche die nach dein zehntheiligen Gesetz fortschreitende Zahlenbildung ausdrücken, ein hervorragendes Beispiel sind…*

plus étonnante que même Schröder, qui dans sa recension de la *Begriffsschrift* dénonçait l'utilisation infondée du nom de l'Arithmétique par Frege, commençait ce même texte en évoquant le nom de Leibniz pour prendre l'Arithmétique comme exemple d'une *lingua characterica universalis* :

> En ce qui concerne un idéal, la référence à un modèle déjà vraiment utilisé n'est pas déplacée. Je voudrais ajouter une comparaison qui, si je m'en souviens correctement, a déjà été utilisée par Leibniz : comparons, par exemple, comment les nombres composés sont issus des nombres premiers par multiplication – ou encore, si l'on veut, d'une manière similaire, comment les nombres naturels seront en général composés par l'addition et la multiplication des onze premiers nombres du système décimal. (Schröder, 1880a, pp. 81-82)[160]

Schröder n'était, pour le reste, pas étranger à l'œuvre de Trendelenburg, dont les *Beiträge* étaient, comme nous l'avons vu, une source commune à lui et à Frege. D'où vient alors le fait que le rapport essentiel de Frege à l'Arithmétique soit passé tellement inaperçu ?

La réponse de Frege à Schröder, s'ouvrant sur la question leibnizienne, permet d'en saisir la raison. Envisageant le problème de manière directe, Frege ne se réfère plus au texte de Trendelenburg, et va maintenant directement aux sources, qu'il a certainement eu l'occasion d'étudier entretemps[161]. Frege cite d'abord une phrase de Leibniz analogue à celle citée par Trendelenburg, concernant la possibilité de résoudre les problèmes philosophiques par un calcul linguistique à la façon de l'Arithmétique ou de la Géométrie, et il présente des illustrations simples du principe caractéristique leibnizien, pour reconnaitre aussitôt que ce principe « semble s'accorder » avec celui découvert indépendamment par « les mathématiciens et logiciens anglais et allemands » (1880-81, p. 18). On comprend ainsi que si l'articulation sémiotique entre Arithmétique et logique effectuée par Frege était imperceptible pour ses contemporains, ce n'est pas parce qu'une telle articulation était profondément inconcevable, *mais parce qu'elle était déjà conçue d'une certaine manière*.

En effet, en héritier peut-être involontaire de Leibniz, Boole et ses successeurs avaient réalisé l'idéal d'une mathématisation de la logique, au nom même de l'Arithmétique ou de la « science du nombre », fixant par là de manière générale un certain sens de l'articulation entre logique et mathématiques. Ainsi, depuis son ouvrage *The Mathematical Analysis of Logic* de 1847, Boole avait commencé à développer des moyens qui prétendaient montrer « le vrai

---

[160] *Bei einem Ideale ist der Hinweis auf ein schon wirkliches Vorbild nicht unpassend; ich möchte also einen, wenn ich mich recht erinnere, schon von Leibniz gebrauchten Vergleich benutzend hinzufügen: analog, wie etwa die zusammengesetzten Zahlen durch Multiplication aus den Primzahlen hervorgehen — oder auch, wenn man will: auf ähnliche Weise, wie die natürlichen Zahlen überhaupt durch multiplicative und additive Verknüpfung aus den elf ersten derselben im dekadischen System zusammengesetzt werden.*

[161] Les textes leibniziens alors évoqués par Frege sont : *De scientia universali seu calculo philosophico* ; *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis* et *Addenda ad specimen calculi universalis*.

principe du Syllogisme, regardé du point de vue de l'Arithmétique » (Boole, 1847, p. 42). Cette articulation entre les deux domaines, conçus en principe comme hétérogènes, exigeait pourtant une opération sémiotique. Nous aurons l'occasion d'étudier en détail cette articulation sémiotique dans les deux parties suivantes. Mais nous pouvons déjà avancer que Boole justifiait cette opération par l'observation que les expressions symboliques des processus arithmétique et logique se trouvent soumises à la même loi formelle lorsque ces processus sont « exprimés de la même façon » (1854, p. 31). Il expliquera le sens de cette opération de la manière suivante :

> …in systems of thought so truly distinct as those of Logic and Arithmetic (I use the latter term in its widest sense as the science of Number), there is, properly speaking, no community of subject. The one of them is conversant with the very conceptions of things, the other takes account solely of their numerical relations. But inasmuch as the forms and methods of any system of reasoning depend immediately upon the laws to which the symbols are subject, and only mediately, through the above link of connexion, upon their interpretation, there may be both propriety and advantage in employing the same symbols in different systems of thought, provided that such interpretations can be assigned to them as shall render their formal laws identical, and their use consistent. The ground of that employment will not then be community of interpretation, but the community of the formal laws, to which in their respective systems they are subject. Nor must that community of formal laws be established upon any other ground than that of a careful observation and comparison of those results which are seen to flow independently from the interpretations of the systems under consideration. (Boole, 1854, p. 46)

Le succès de la logique booléenne avait de cette façon comporté la fixation d'un sens particulier pour la formalisation de la logique à partir de l'Arithmétique, donnant une réalité effective et précise à l'entreprise initiée mais jamais accomplie par Leibniz. Dès lors, si des progrès étaient à faire dans le domaine de la logique mathématisée, ils étaient conçus comme de l'ordre de l'aménagement des instruments techniques, sur le fond de cette articulation symbolique entre les deux disciplines. Mais si cette articulation fournissait le cadre sémiotique qui rendait ces aménagements possibles, elle restait pourtant hors de portée de toute remise en question. C'est pourquoi le geste de Frege est critique à cet égard. Devant ce sens institué du rapport entre Arithmétique et logique qu'il met en avant dans l'ouverture de sa réponse à Schröder, Frege agit en archéologue de la pensée pour dénoncer que quelque chose a été perdu dans le passage qui mènerait de Leibniz à Boole. Aussi mentionne-t-il, après avoir suggéré l'existence de ce passage, un point qu'on pourrait croire de détail :

> En laissant de côté ce qui est moins important, je me borne à mentionner en outre que Leibniz laisse apparaître les mots « non » et « ens » dans ses formules. Il avait sûrement en

> tête avec cette tentative la *lingua characterica*, même s'il n'a établi aucun lien apparent avec les efforts qu'il axait sur l'expression d'un contenu. (Frege, 1880-81, p. 18).

Or, si les logiciens modernes semblent reprendre le principe leibnizien, et même le dépasser sur certains points fondamentaux, Frege signale que dans cette réappropriation dont Boole est le nom propre, « *Le « ens » leibnizien a été supprimé* » (1880-81, p. 18). *Frege prétend ainsi exhiber ce qui serait la marque de la perte du contenu dans la logique*. On ne dissimulera pas la faiblesse de son argument : même si la disparition du « *ens* » leibnizien n'est pas présentée comme responsable de la perte du contenu, mais uniquement comme son symptôme, le passage que nous venons de citer montre que Frege semble avoir été incapable d'établir un lien direct et convaincant entre le « *ens* » et le contenu chez Leibniz. Sans compter que la disparition des termes dans les formules logiques n'a jamais été pour Frege le symptôme de quoi que ce soit.

Derrière cette faiblesse se cache cependant un point important, à savoir le rôle décisif de Trendelenburg dans cette histoire. En effet, si Frege échoue malgré ses efforts à rapporter la question du contenu à Leibniz, c'est certainement dans la mesure où *cette question ne prend tout son sens que dans un contexte post-hégélien*. Dans sa reconstitution de l'entreprise leibnizienne dans les *Beiträge*, Trendelenburg ne se borne pas à reproduire la pensée du vieux philosophe et logicien allemand ; il la renouvelle en la rapportant aux problèmes ouverts par la philosophie kantienne et hégélienne, qu'il avait su si bien déterminer un quart de siècle auparavant sous le nom de la « question logique ». Nous venons de voir comment le lien que Frege pouvait à peine suggérer chez Leibniz entre une caractéristique inspirée de l'Arithmétique et le problème du contenu était, dans les pages des *Beiträge*, directement affirmé. Les faiblesses dans les arguments qui s'étaient glissées dans l'écart qui sépare la référence à Trendelenburg dans la *Begriffsschrift* de la référence directe à Leibniz dans la réponse à Schröder révèlent ainsi que c'est sous la plume de Trendelenburg que s'opère la rencontre du problème du contenu avec celui d'une logique mathématisée, à partir de laquelle l'entreprise frégéenne se donnera sa propre intelligibilité.

Toujours est-il que la réponse de Frege devant la formalisation booléenne dépasse les termes de la « question logique », ne serait-ce que par un développement des idées tardives de Trendelenburg dans les *Beiträge*. Car si dans sa reconstitution de l'entreprise leibnizienne Trendelenburg réussissait à suggérer une synthèse entre le problème du contenu et celui d'une logique scientifique, problèmes que les logiciens de la « question logique » avaient tendance à dissocier, avec le déplacement de l'axe forme-contenu sur celui du contenu et de l'expression, Frege trouve la manière de rendre cette suggestion opératoire. Cette « opérationnalisation » ouvre dès lors une dimension depuis laquelle *la perte du contenu de la logique n'a pas besoin d'être attribuée à l'arithmétisation de ses procédures*. Frege le dit explicitement :

> …si l’on a des concepts logiquement parfaits, au contenu desquels il n’est pas nécessaire de revenir, on peut, même sans calcul, se garantir facilement contre les erreurs. C’est ici que gît la raison pour laquelle la logique booléienne [sic] déçoit les espérances qu’en regard des grandes réussites du langage des signes en mathématiques l’on pourrait en quelque sorte caresser, et *ce n’est pas parce que ces réussites sont liées aux concepts de grandeur*, opinion qui ne s’est fait jour que sur la base d’une généralisation prématurée des expériences faites jusqu’ici. Le langage formulaire de Boole ne représente qu’une partie de notre pensée ; l’ensemble ne pourra jamais être exécuté à l’aide d’une machine, ni remplacé par une activité purement mécanique. (Frege, 1880-81, p. 45, nous soulignons)

La faute n’en revient donc pas à l’Arithmétique, *mais à la façon de l’analyser au niveau de ses signes*. Ou plutôt, le problème n’est pas l’arithmétisation de la logique, bien au contraire, mais le *cadre sémiotique*, c’est-à-dire la conception du signe, avec ses distinctions et ses fonctionnements, ses effets d’analyse et ses conditions de synthèse, suivant laquelle cette arithmétisation est opérée par Boole et ses successeurs. C’est ce que Frege voulait dire dans la préface de la *Begriffsschrift* lorsque, face à sa propre façon de construire le langage à partir de l’Arithmétique, il dénonçait comme une « similitude artificielle » l’effort pour traiter les concepts comme somme de marques caractéristiques. Nous avons déjà mentionné comment Schröder avait entendu sous cette remarque une mise en accusation plus ou moins directe de la logique booléenne. Mais lorsque celui-ci répondait que l’opinion négative de Frege par rapport à ces efforts était erronée, il ne semblait pas voir que la critique frégéenne ne portait pas sur l’arithmétisation en tant que telle, mais sur la « similarité artificielle » suivant laquelle celle-ci est conduite et mise en œuvre. C’est pourquoi Frege développera ce point essentiel dans la réponse à Schröder, aussitôt qu’il aura dénoncé la perte du contenu dans les mains des Booléens :

> [Boole] représente les jugements sous la forme d’égalités qu’il construit à l’aide de lettres et de signes arithmétiques comme $+$, 0, 1. Les lois logiques prennent alors la forme d’un algorithme, qui ne coïncide toutefois que partiellement avec celui en vigueur en arithmétique pour les mêmes signes. Le contenu n’est avec cela pas du tout pris en considération. […] L’utilisation des signes arithmétiques dans des buts logiques a l’avantage que l’on est exempté de la nécessité d’apprendre un algorithme entièrement nouveau. Une grande partie des transformations dont l’œil a pris une première habitude continuent à demeurer admises [*en note* : Au demeurant, les divergences par rapport à l’arithmétique sont pourtant si fondamentales que les résolutions d’équations logiques ne sont pas du tout semblables à celles des algébriques. Par là se trouvera aussi beaucoup rabaissé le mérite de la concordance algorithmique]. À des exigences plus élevées, que Boole cependant ne fixe pas, cette façon de procéder ne rendra certes pas justice. (Frege, 1880-81, pp. 20-21)

Frege introduit ensuite sa propre façon de traiter le problème au moyen de l'exemple de la formation des mots *Bergipfel* et *Baumriese*, exemple qui, comme il a été vu, concentre l'essentiel du problème de l'articulation des langues. C'est alors qu'il présente son apologie de l'Arithmétique « au sens le plus large » que nous avons déjà évoquée, indiquant la façon dont une articulation sémiotique radicalement différente entre Arithmétique et langage pourrait rendre à la logique la force que les efforts des Booléens avaient su suggérer sans la réaliser pour autant :

> …l'arithmétique au sens le plus large (*im weitesten Sinne*) forme aussi des concepts, et en vérité d'une richesse et d'une précision dans l'articulation interne telles que peut-être on ne puisse en trouver combinés avec une égale perfection logique dans aucune autre science. L'arithmétique porte aussi des jugements qui sont différents des simples égalités et inégalités. La raison de cette incapacité à suivre le mode de formation des concepts par la science tient à l'absence de l'une des deux parties dont doit être constitué tout langage perfectionné. C'est-à-dire qu'on peut distinguer la partie formelle, qui, dans le langage des mots, est constituée par les terminaisons, préfixes et suffixes, et les particules, de la partie proprement expressive de contenu. Les signes de l'arithmétique correspondent à la dernière. Ce qui manque encore, c'est le ciment logique qui permettra d'assembler solidement, les unes avec les autres, ces pierres de construction. […] Le problème se pose ainsi de mettre en place des signes pour les relations logiques qui soient aptes à fusionner avec le langage formulaire mathématique, et ainsi de former, au moins pour un domaine donné, une idéographie complète. C'est ici que prend place mon opuscule. (Frege, 1880-81, p. 22)

Face à une similarité purement artificielle, le dégagement de la structure sémiotique de l'Arithmétique au moyen d'une analyse de ses articulations expressives et de contenu internes pourrait lui restituer son sens le plus large, capable d'informer *de lui-même* la constitution d'une logique. Ce *sens* de l'Arithmétique ne pouvait pourtant que demeurer inaperçu dans une sémiotique booléenne faite de correspondances extérieures et d'analogies nécessairement partielles. C'est dire que l'incompréhension à l'égard du rapport de l'idéographie à la l'Arithmétique ne serait pas simplement comparable à celle concernant la question du contenu, mais elle en serait la conséquence directe. Si le nouveau sens de l'Arithmétique est d'être, en tant que système expressif, pourvoyeuse de contenu, on ne s'étonnera pas que ce sens soit demeuré invisible à ceux à qui le contenu, l'autre face des expressions, l'était déjà.

Mais alors apparaît le second des problèmes annoncés. Car le fait que la spécificité de l'Arithmétique, telle qu'elle se révèle dans les premiers temps de l'œuvre logique de Frege, réside dans un lien avec le contenu qui se dérobe à la perspective booléenne oblige à penser que cette spécificité n'est le résultat que du cadre sémiotique suivant lesquels on l'analyse. L'Arithmétique n'aurait donc pas de spécificité en elle-même. À sa place Frege aurait pu prendre n'importe quelle autre discipline mathématique, aussi bien l'Arithmétique que la Géométrie ou le Calcul infinitésimal par exemple, à condition d'en analyser la dimension expressive dans les termes des contenus qu'elles véhiculent respectivement. Mais ce point contredit la puissance interne de contenu que Frege attribue à l'Arithmétique en tant que telle. Si l'on accepte un lien entre Arithmétique et contenu aussi intime que Frege le présente, peut-on encore comprendre pourquoi les Booléens, avec leur approche symbolique après tout réussie et consistante de l'Arithmétique, n'ont pas été capables d'introduire dans leur logique la notion de contenu que Frege y introduira avec les conséquences révolutionnaires que l'on a marquées ? Répondre que Boole ne disposait pas des instruments sémiotiques nécessaires à cette introduction supposerait de revenir sur l'idée que l'essentiel du contenu est extérieur à la constitution propre de l'Arithmétique.

Étant donné le caractère non entièrement thématisé de la théorie du contenu que nous avons dégagée dans ses premiers écrits, on ne doit pas être de surpris que Frege n'ait pas une réponse théorique directe et manifeste à la question de l'absence d'une notion de contenu chez les Booléens. Ses remarques explicites à ce sujet parlent simplement de différences dans les « buts », les « problèmes », les « exigences », les « intentions » ou les « objectifs » entre les deux projets (par exemple : 1880-81, pp. 20-22). Mais à regarder ses écrits de plus près, on peut trouver comme en filigrane un principe de réponse. Ainsi, au moment de présenter le projet de mathématisation de Boole dans la réponse à Schröder, Frege soutient :

> Boole voulait, si je le comprends bien, construire une technique au moyen de laquelle les problèmes logiques pourraient être résolus de façon systématique, de la même manière que l'algèbre enseigne une technique d'élimination et de calcul de l'inconnue. (Frege, 1880-81, p. 20)

Ou bien, dans son article « Sur le but de l'idéographie », peu après avoir affirmé que la légitimité des expressions « produit » et « somme » dans la logique booléenne vient des équations qui déterminent des « points d'accord entre les opérations logiques et les multiplication et addition algébriques » (1882c, pp. 72-72), il affirme :

> Si l'on prend une vue d'ensemble du langage formulaire de Boole, on voit qu'il consiste à habiller la logique abstraite du vêtement des signes algébriques ; il n'est pas propre à l'expression d'un contenu et tel n'est pas non plus son but. (Frege, 1882c, p. 73)

Ce que Frege paraît donner à entendre dans ces remarques, qui ne sont d'ailleurs pas isolées, c'est que *la mathématisation booléenne de la logique ne se fait pas, malgré les apparences, au moyen de l'Arithmétique, mais, ce qui est tout est différent, au moyen de l'Algèbre*. Certes, Frege parle aussi d'Arithmétique pour se référer au projet de Boole, mais dans ce cas, les références visent plutôt l'utilisation des « signes » arithmétiques, tels « 1 », « 0 », « + » ou « · », et non pas de ses lois ou de ses concepts, tels que celui de grandeur, qui comme nous l'avons vu déjà, ne peut d'après Frege être tenu pour responsable des pauvretés de la mathématisation booléenne. Qui plus est, cette évocation des signes arithmétiques a toujours pour but de dénoncer la divergence des significations, les similarités abstraites, ou les analogies fallacieuses qui résultent de leur utilisation par les Booléens, comme dans le cas suivant :

> Je ne pouvais pas utiliser à cette fin le symbolisme de Boole ; il n'est pas possible que dans la même formule le signe + ait tantôt le sens logique, tantôt le sens arithmétique. L'analogie entre les calculs logique et arithmétique, précieuse pour Boole, ne peut manquer d'avoir un effet fallacieux lorsqu'on entreprend de les réunir. On ne peut envisager la symbolique de Boole que dans un domaine totalement séparé de l'arithmétique. (Frege, 1882c, pp. 73-74)

À suivre cette piste, il ressortirait que la logique booléenne a manqué la notion essentielle de contenu logique intimement inscrite dans le fonctionnement même de l'Arithmétique, tout simplement parce qu'*elle a manqué l'Arithmétique*. Intéressé par la possibilité de reconstruire la logique à partir de la « science des nombres », Boole et les Booléens n'auraient retenu de celle-ci que ses propriétés purement algébriques. Les propriétés proprement arithmétiques des signes utilisés seraient alors uniquement accidentelles, tandis que l'abstraction du contenu numérique de ces signes propre aux opérations de l'Algèbre les rendrait, par généralisation de leurs lois combinatoires externes, susceptibles d'être utilisées en logique.

Il apparaît au terme de cette confrontation générale du projet logique frégéen et de celui de Boole et des Booléens qu'une distinction subtile mais profonde s'esquisse entre les régions *mathématiques* de l'Arithmétique et de l'Algèbre, associées de façon intime à deux types de *logiques* aussi différentes que la logique propositionnelle et le calcul de prédicats. Cette distinction ne se révèle pourtant qu'à travers un autre : celle de deux cadres ou régimes *sémiotiques* déterminés l'un par son abstraction, l'autre par sa prise en compte du contenu. Certes, cette série des distinctions et des correspondances ne saurait être énoncée de manière manifeste par Frege. Ses remarques fréquentes à ce sujet rendent cependant la postulation de ces deux grandes articulations plausible, sinon nécessaire à l'intelligibilité générale de son projet. Qui plus est, avec cette postulation se dessine, plus profondément, la possibilité d'envisager un principe complexe de correspondance générale entre ces trois dimensions (mathématique, sémiotique, logique) de l'instance génétique où se sont tissés ou retissés, au fil du XIXe siècle, les ambitions et les contraintes respectives d'une philosophie cherchant, dans l'achèvement de sa modernité, à s'affranchir de la métaphysique, et d'une logique renouvelée par la découverte de la condition mathématique de sa formalité. La question centrale du contenu constitue, comme nous l'avons vu, le lieu même où ces ambitions et ces contraintes pouvaient se rencontrer. C’est pourquoi cette instance génétique, avec l’ensemble de ses dimensions, définit le territoire stratifié où pourrait avoir lieu une sorte d’archéologie visant à restituer le problème aujourd’hui vétuste du contenu dans la logique. Mais c’est sur ce terrain aussi, et comme effet de l’articulation singulière de ses strates, qu’une telle archéologie pourrait dégager les raisons et les mécanismes par lesquels le problème d’une logique formelle du contenu déboucha sur celui d’une *logique du sens*, faisant ainsi apparaître l’une des catégories fondamentales de la philosophie contemporaine qui s’étend du tournant du XXe siècle jusqu’à nous[162].

Un tel travail de fouille pourrait difficilement envisager l’établissement direct d’une correspondance *générale* plus ou moins réglée entre les déterminations des trois dimensions ou strates en question. Si sa possibilité ressort de cette première approche des aspects constitutifs de la logique frégéenne dans son opposition constituant à celle des Booléens, sa nécessité ne saurait en revanche en découler. Elle ne saurait encore moins être établie de manière purement spéculative, car du fait de la disparité essentielle qui règne après tout entre les déterminations de ces trois dimensions, une correspondance entre elles ne peut être que *problématique*, impliquant toute une série d’opérations et de forçages qui ne se laissent pas déduire immédiatement de la constitution de chacune des strates prise isolément. L’existence d’une correspondance générale ne peut donc être que présupposée, comme un principe méthodologique orientant les recherches singulières, qui deviendraient éventuellement capables de constater localement sa validité dans des cas spécifiques, le dotant en retour de la précision et de la positivité que son existence réclame. Ce que nous avons déjà entamé de ces recherches dans les pages précédentes suggère que le principe de correspondance entre mathématiques, sémiotique et logique est tel que *les déterminations fondamentales d’un système logique formel résultent comme effet d’une analyse sémiotique des mathématiques*. C’est donc à la restitution de cette dynamique animée par l’analyse des signes mathématiques qu’une archéologie de la logique devrait vouer ses efforts. À la différence de ce que l’on est habitué à croire, cette analyse n’est pourtant pas justiciable d’une logique, puisque la constitution de la logique en dépend. Que les mathématiques soient elles-mêmes présentées comme justiciables de la logique ne change rien à ce fait, sinon en introduisant une tension dans la cohérence globale d’un projet, tension qui pourra ou non se résoudre en paradoxe suivant la façon qu’il aura de se réaliser. Mais cette analyse n’est pas entièrement justiciable d’une sémiotique non plus, et pas non plus enfin d’une mathématique. Il s’agirait plutôt de mettre en relief les principes d’une analyse sémiotique que mathématiciens et logiciens (ou

[162] Sur la centralité de la catégorie de *sens* dans la philosophie contemporaine, voir Salanskis (2001).

mathématiciens en voie de devenir logiciens) ont éprouvé le besoin de mettre en place et de pratiquer par et pour eux-mêmes, sur des régions spécifiques de l'espace mathématique afin de dégager et d'asseoir l'architecture et les mécanismes d'une logique susceptible de prétendre au qualificatif de « formelle ».

C'est pourquoi, dans la suite de notre travail, nous nous livrerons à l'étude détaillée de l'ensemble de ces rapports dans le cas particulier mais décisif qui oppose ces deux « styles » de mathématisation logique qui sont celui de Boole et celui de Frege. Pris dans la perspective philosophique qui prétend être celle de notre étude, ces deux tentatives générales de mathématisation de la logique apparaîtront comme deux styles possibles de *formalisation du sens*, informés par le problème fondamental du contenu en rapport à des déterminations mathématiques conçues comme des pratiques sémiotiques. Nous avons pu voir comment dans les travaux inauguraux de Frege cette formalisation définissait un nouveau socle de positivité offert au discours philosophique, qui ne se contentait pas de mettre en rapport mathématiques, logique et langage de manière abstraite et générale, mais amorçaient une articulation fine entre l'Arithmétique comme discipline mathématique spécifique, le calcul des prédicats en tant que transformation radicale de la vielle logique propositionnelle, et une théorie du signe et de la signification qui, récusant l'opposition traditionnelle entre forme et contenu, commence à s'ordonner de façon encore rudimentaire mais effective autour de l'axe contenu-expression. La grande contribution de Frege à l'histoire de la philosophie n'est pas, dans cette perspective, d'avoir dressé le premier système formel de la logique, mais plutôt d'y être parvenu au moyen d'une analyse précise de l'Arithmétique *en tant que langage spécifique*, susceptible d'informer une logique, non pas en raison d'une quelconque formalité propre à l'Arithmétique, mais en raison de l'articulation spécifique entre le système expressif qu'elle présente et la structure des contenus qu'elle recèle. C'est par ce moyen que Frege arrive à déterminer une notion efficace de contenu qui pourra désormais être à la fois offerte et confrontée à la pensée philosophique. Il s'agit donc de comprendre les détails de cette articulation spécifique dont nous n'avons dégagé jusqu'ici que les conditions souterraines. L'ensemble d'articulations qui lient de manière intime l'Arithmétique au contenu reste pourtant inexpliqué. Si, dans le but de combler ce manque, nous éprouvons le besoin de déplacer nos recherches jusqu'aux terres booléennes, c'est dans la mesure où, suivant les pistes trouvées dans les écrits de Frege, Arithmétique et contenu s'y trouvent associés dans une configuration qui les exclut au nom de l'abstraction propre à l'Algèbre. L'étude du régime booléen de mathématisation de la logique s'avèrera d'autant plus révélatrice que ce régime peut être tenu pour le premier véritable épisode du processus historiquement déterminé de formalisation du sens. C'est d'ailleurs dans ce rapport d'exclusion entre deux articulations mathématico-sémio-logiques incompatibles que l'hypothèse d'une correspondance générale entre ces domaines qui se place à l'horizon du travail archéologique montre sa fécondité et gagne en détermination.

II. Deuxième Partie

L'Abstraction symbolique

II.1. L'Algèbre anglaise

II.1.1. L'Algèbre en quête d'indépendance

L'œuvre logique de Boole émerge dans le contexte du renouvellement de la pensée mathématique anglaise de la première moitié du XIXe siècle, qui a pour motivation et pour effet de rattraper le retard significatif qu'elle avait pris par rapport aux développements mathématiques qui eurent lieu sur le Continent au siècle précédent. Le moteur principal de ce renouvellement est un groupe de jeunes mathématiciens de l'Université de Cambridge, parmi lesquels Robert Woodhouse, George Peacock, Charles Babbage et John Herschel, rassemblés autour de la « Société Analytique », que les trois derniers nommés fondent en 1812. Les recherches de cette « École des Algébristes de Cambridge », ou « École Algébrique Anglaise », comme elle a été souvent appelée, ouvrirent la voie à l'*Algèbre abstraite*, dont les travaux de Boole sont à la fois une conséquence et un achèvement.

Les spécialistes ont l'habitude de présenter la constitution de l'Algèbre abstraite pendant cette période comme une série de progrès successifs susceptibles d'être attribués dans une certaine mesure à l'un ou l'autre de ces « algébristes »[163]. Dans cette évolution, le nom de Peacock reçoit souvent une place privilégiée, car c'est dans ses travaux que l'existence d'une « Algèbre symbolique » est postulée de manière ouverte par la première fois. Sans préjuger de l'exactitude de cette présentation ni du caractère linéaire de cette histoire, on peut s'accorder sur un point qui ressort clairement de l'ensemble de ces études : les différents pas faits dans la direction d'une Algèbre abstraite peuvent être vus comme autant d'incorporations dans l'espace rigoureux des mathématiques de mécanismes proprement *sémiotiques*, c'est-à-dire, de procédés portant directement sur la nature et le fonctionnement des signes[164]. Ce processus de mathématisation progressive de certains aspects sémiotiques liés aux expressions mathématiques fut inspiré en grande mesure par cette dimension spécifique des travaux des

[163] Voir par exemple Koppelman (1971), Diagne (1982; 1989), Nový (1973), Hailperin (1986; 2004) ou Peckhaus (2009b).

[164] Parmi tous les spécialistes qui ont traité cette question, seul Diagne semble avoir suffisamment insisté sur ce point, en lui donnant une place centrale. Voir Diagne (1982, ch. II).

mathématiciens continentaux qui est connue comme le *calcul d'opérations*[165], ainsi que par certaines impossibilités internes suscitées par les opérations arithmétiques ; et il eut pour effet, sinon pour condition, une progressive « dé-quantification » – selon la expression très juste de Diagne (1982, p. 28) – qui sera essentielle pour la mathématisation de la logique qui sera accomplie sous le nom de Boole. Le mouvement de dégagement d'une dimension purement algébrique dans les mathématiques va ainsi de pair avec une « dés-arithmétisation », qui trouve dans les formulations de Peacock son expression consciente, mais qui recevra dans l'œuvre de Boole à la fois ses conditions systématiques et sa puissance spécifique à l'égard de la logique.

II.1.1.1. L'Algèbre Anglaise et le Continent

Leibniz se trouve de nouveau au commencement de notre histoire. Et cela d'une double façon, qui n'est cependant pas directement liée aux travaux sur la caractéristique. D'abord, comme le montre Koppelman (1971, pp. 157-158), les origines du calcul d'opérations peuvent être attribuées aux réflexions qui ont accompagné ce qui aujourd'hui est connu précisément comme la « formule de Leibniz », c'est-à-dire :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

donnant la dérivée de degré n d'un produit des fonctions (f et g). Tel que le remarque Leibniz lui-même, l'établissement d'une telle formule s'appuie sur l'analogie entre les dérivées successives du produit des fonctions et les puissances entières d'un binôme de la forme $(x+y)^n$, données par la « formule de Newton » :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

L'analogie entre les fonctionnements des deux opérations (celle de puissance d'une somme, et celle de dérivation d'un produit), c'est-à-dire le dégagement des *motifs* qui résulte de leur comparaison, entraîne ainsi une indépendance des symboles d'opération (n comme symbole de dérivation dans le premier cas, et n comme symbole de puissance dans le second) par rapport aux éléments sur lesquels ils opèrent (fonctions et termes respectivement). Dès lors, l'établissement d'un calcul spécifique sur ces symboles d'opération devient possible, comme s'il s'agissait des grandeurs quelconques.

[165] C'est notamment la thèse de Koppelman (1971).

Ces idées, qui contiennent le principe fondamental du calcul d'opérations, furent développées successivement par des mathématiciens continentaux, tels que Lagrange, Laplace, ou Lorgna. Les réflexions de ce dernier dans un mémoire de 1787 montrent à quel point ce développement était attaché au décèlement d'une dimension *sémiotique* spécifique des symboles mathématiques :

> La nouvelle espèce de calcul dont il est question dans cette Mémoire, exige que les caractéristiques Δ, d, Σ, $\int$ dont on se sert dans les calculs ordinaires fini & infinitésimal soient considérées sous deux différents aspects, c'est-à-dire, tantôt comme des signes représentatifs destinés à marquer les états variés des grandeurs avec lesquelles ils se trouvent préfigés, tantôt comme des quantités algébriques. (Lorgna, 1788, p. 411)

De la même façon, Lorgna invite à considérer les différents degrés de différentiation d'une fonction (y', y'', y'''…), soit comme des « quantités symboliques », soit comme des « quantités exponentielles ». Ce qui oblige à « distinguer ces différentes conditions par des symboles, en sorte qu'on puisse toujours reconnoître l'état où les caractéristiques se trouvent à tous momens dans les calculs, & les faire passer de l'un à l'autre sans confusion. » (1788, p. 411). Cette dualité dans la signification des signes constitue le principe sémiotique fondamental du calcul d'opérations. L'idée générale de ce calcul ne sera cependant développée complètement que lorsque ce principe trouvera une formulation explicite ainsi qu'une opérationnalisation le rendant effectif dans l'espace des mathématiques.

Cette dernière condition a été remplie, comme l'indique Koppelman, lorsque Louis François Arbogast introduit la « méthode de séparations d'échelle d'opérations ». Telle qu'Arbogast la définit dans son traité « Du Calcul des Dérivations », de 1800, cette méthode :

> …consiste à détacher de la fonction des variables, lorsque cela est possible, les signes d'opération qui affectent cette fonction, et à traiter l'expression formée de ces signes mêlés avec des quantités quelconques, expression que j'ai nommée *échelle d'opérations*, à la traiter, dis-je, tout de même que si les signes d'opérations qui y entrent étoient des quantités ; puis à multiplier le résultat par la fonction. (Arbogast, 1800, pp. viii-ix)

Arbogast fait aussitôt référence à l'analogie leibnizienne entre puissances et différentielles, ainsi qu'aux travaux de Lagrange, pour remarquer tout de même la supériorité de sa propre méthode qui, en extrayant les signes d'opération et en les traitant de manière indépendante par rapport aux autres signes, simplifie l'ensemble du processus motivé par l'analogie, car il donne « immédiatement des résultats dans lesquels il n'y a plus rien à changer » (1800, p. ix).

Pour illustrer cette méthode, Koppelman choisit, parmi tous les cas qu'Arbogast développe dans son ouvrage, le traitement d'un théorème de Lagrange qui établit l'identité :

$$\Delta^n u = \left\{e^{\frac{du}{dx}\xi} - 1\right\}^n.$$

Si Lagrange avait établi cette identité[166] au moyen d'une analogie entre les développements des deux termes, la méthode d'Arbogast prétend à la fois simplifier cette procédure et la rendre rigoureuse. Arbogast écrit alors « $\delta u = \frac{du}{dx}$ », et détache ainsi le signe d'opération, sur lequel on peut désormais faire tomber les indices, de telle sorte que le signe de fonction « u », sur lequel l'opération δ de dérivation porte, se trouve mis de côté. L'identité peut alors s'écrire :

$$\Delta^n u = \left\{e^{\delta\xi} - 1\right\}^n u.$$

De cette manière,

> …on peut simplifier et les démonstrations et les énoncés de ces propositions […]. Pour cela il faut faire en sorte que les exposans affectent δ et non $\delta.u$, et que demeurant toujours attachés à δ dans les développemens, ils puissent toujours être considérés comme des indices. On y parvient en détachant l'échelle de la fonction, comme nous l'avons pratiqué dans ce qui précède. Cette séparation de l'échelle met plus de netteté dans les expressions, plus de facilité dans les calculs et fait en outre arriver facilement à des théorèmes bien plus étendus… (Arbogast, 1800, p. 350)

Il s'agit ainsi d'isoler, au niveau même des signes, la dimension opératoire de la différentiation (ou l' « échelle de différentiation », comme l'appelle Arbogast). Cela permet, non seulement de réfléchir aux règles propres aux opérateurs en question, mais de les établir de façon explicite. Ainsi, Arbogast établit que l'échelle de la différentiation sera

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,},$$

où $\mathrm{d}^{1,}$ représente la dérivation par rapport à la première des deux variables d'une fonction du type xy ou $\varphi(x,y)$, et $\mathrm{d}^{,1}$ la différentiation par rapport à la seconde. De cette façon, on aura (1800, p. 319) :

$$\mathrm{d}(xy) = (\mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,}) \cdot xy = \mathrm{d}^{,1}(xy) + \mathrm{d}^{1,}(xy) = x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x.$$

On voit ainsi que ce qui n'était qu'une simple intuition sur les signes, prenant la forme d'une analogie entre le fonctionnement des différentielles et celui des puissances binomiales, trouve par là la façon de s'expliciter symboliquement dans une expression faisant entièrement partie du discours mathématique, quitte à engendrer à l'intérieur des mathématiques mêmes un domaine entièrement nouveau.

[166] Autrement dit, l'identité entre la puissance n d'un accroissement d'une fonction u (noté $\Delta^n u$) correspondant à l'accroissement de sa variable x (Δx, que l'on nomme ξ dans ce contexte), et la puissance n de la fonction exponentielle de la dérivée de u multipliée par ξ, moins 1.

Il est vrai pourtant, comme le remarque Diagne (1982, pp. 42-43), qu'avec Arbogast nous sommes toujours loin d'une théorie moderne des opérateurs, puisqu'une telle théorie exigerait que ce qui apparaît ici comme des *propriétés* des opérateurs, devienne en fait leur *définition*. Mais il n'en reste pas moins que par cette explicitation symbolique d'une intuition sémiotique – c'est-à-dire par l'explicitation d'une intuition sur des signes en général à l'aide de ces signes particuliers que sont les symboles –, la notion d'opérateur ouvre de manière durable un territoire inédit dans les mathématiques qui réclamera un traitement spécifique, inséparable des aspects notationnels ou sémiotiques qui ont marqué sa naissance.

Malgré les développements ultérieurs du calcul d'opérations sur le Continent, fondamentalement par les analystes français, tels Fourier ou Cauchy, la dimension spécifique qui le justifiait et le rendait possible ne parvenait pas à être véritablement dégagée. Ainsi, Lagrange déclare ne pas comprendre les principes qui sous-tendent ce calcul ; Laplace pointe vers l'indépendance dans un développement entre les coefficients des opérations et les variables ; Arbogast et Fourier le considèrent comme une méthode d'expression ou de vérification, mais non pas de preuve ; Cauchy le voit comme une méthode purement inductive[167]… Servois occupe pourtant une place exceptionnelle dans cette histoire. À la recherche d'une base théorique pour ce calcul, il est parvenu à établir que la cause de l'analogie qui le justifiait résidait dans les propriétés partagées par les opérations en question, à savoir la « distributivité » et la « commutativité », termes qu'il introduit lui-même[168]. Mais malgré la justesse des formulations de Servois, le calcul d'opérations continuait d'être l'objet d'une défiance qui l'empêchait de devenir la base de la constitution d'un nouveau domaine mathématique à part entière.

C'est précisément ce pas qui sera franchi par les algébristes anglais. On ne s'étonnera pas qu'une préoccupation portant directement sur les signes se trouve à l'origine de cette aventure anglaise, et que, comme nous l'avons anticipé, le nom de Leibniz se fasse entendre une deuxième fois. Car l'importation en Angleterre du problème général que le calcul d'opérations avait posé aux mathématiciens du Continent était indissociable d'une querelle autour de la *notation* utilisée en Analyse. En effet, les mathématiciens de la vieille école anglaise, attachés à la notation « fluxionelle » de Newton, étaient réticents à l'utilisation de la notation leibnizienne des infinitésimaux, alors que c'était dans ses termes que se faisait l'ensemble des progrès continentaux. Cette question de la notation, dans laquelle se mêlent toutes sortes de raisons d'ordre historique, voire nationaliste, ne constitue pas néanmoins un point accessoire. La notation newtonienne affectait d'un ou de plusieurs points diacritiques les

---

[167] Cf. Koppelman (1971, pp. 171-172).

[168] Koppelman (1971, pp. 174-175).

quantités exprimées par une variable pour signifier ses dérivées successives, ou plus exactement, ses « fluxions ». Ainsi, par exemple, les deux premières dérivées ou fluxions de x étaient notées « $\dot{x}$ », « $\ddot{x}$ », la troisième dérivée de xy s'écrivant « $\dddot{\widehat{xy}}$ » ou « $(xy)^{\dddot{}}$ ». Une telle notation, qui voyait x et $\dot{x}$ comme deux quantités (une quantité « fluente », et la quantité de « fluxion » de cette dernière, respectivement), était censée représenter avant tout des propriétés physiques (trajectoire, vitesse, accélération…). Elle accentuait ainsi l'aspect géométrique du calcul différentiel, s'appuyant sur les intuitions correspondantes. La notation différentielle de Leibniz, avec ses « d », ses quotients et ses exposants, était en revanche bien plus générale. Comme le remarque Diagne (1989, p. 74 sq) suivant Vuillemin, à la différence de l'écriture fluxionnelle « $\dot{x}$ », l'écriture leibnizienne « $\frac{dy}{dx}$ » désigne la variable par rapport à laquelle la différentiation a lieu (y en l'occurrence), ce qui devient essentiel lorsqu'il s'agit de travailler avec des dérivées partielles. D'autre part, elle permet de faire apparaître des relations entre les variables en jeu, comme dans le cas d'une fonction composée $z = k(x) = g(y) = g\big(f(x)\big)$ avec $y = f(x)$, que la notion leibnizienne exprime comme

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

au lieu de l'écriture newtonienne

$$k'(x) = g'(y) \cdot f'(x).$$

Mais plus décisif encore, en écrivant les dérivées successives à l'aide des exposants portant sur le « d » comme signe de la différentielle (c'est-à-dire : « $\mathrm{d}x$ », « d^2x » ou « $\mathrm{d}^3(xy)$ », pour les trois exemples ci-dessus), la différentiation se trouve identifiée comme une opération indépendante pour laquelle des règles spécifiques de calcul peuvent être établies. Ce que Leibniz fait d'ailleurs, dans son traité « *Nova methodus pro maximis et minimis* » :

> Voici quelles seront les règles du calcul. Soit a une quantité donnée constante, $\mathrm{d}a$ sera égal à 0 et $\mathrm{d}(ax)$ sera égal à $a\mathrm{d}x$. Si y est égal à v, $\mathrm{d}y$ sera égal à $\mathrm{d}v$. Pour l'addition et la soustraction si $z - y + w + x$ est égal à v, $\mathrm{d}(z - y + w + x)$ sera égal à $\mathrm{d}z - \mathrm{d}y + \mathrm{d}w + \mathrm{d}x$.
>
> Pour la multiplication : $\mathrm{d}(xv)$ est égal à $x\mathrm{d}v + v\mathrm{d}x$ (...).
>
> Pour la division $\mathrm{d}\left(\frac{v}{y}\right)$ est égal à $(\pm v\mathrm{d}y \mp y\mathrm{d}v)/yy$) (...).
>
> Pour l'exponentiation $\mathrm{d}x^a = a \cdot x^{a-1}\mathrm{d}x$. (cité dans Diagne, 1989, p. 76)

C'est dire que la version leibnizienne du calcul infinitésimal comporte une dimension algébrique, *au niveau même de son écriture*. Car il faut bien admettre, comme le fait Leibniz d'ailleurs, que la notation newtonienne et celle de Leibniz *représentent de fait la même chose* ; leur différence n'est donc que *de l'ordre de l'expression*. Mais c'est précisément à ce niveau expressif qu'une dimension algébrique peut se développer. Ce point est décisif, puisqu'il montre dans quelle mesure la naissance de l'Algèbre abstraite dans le contexte anglais de la première moitié du XIXe siècle en tant que domaine mathématique à part entière est indissociable d'une pratique, d'une réflexion et d'un développement d'ordre fondamentalement sémiotique. Et de ce fait, tant les exploits que les difficultés du développement mathématique de l'Algèbre se rapprochent de façon naturelle des réflexions autour de la signification et du langage, propres à la pensée logique.

II.1.1.2. Woodhouse : Le vrai sens des signes

Ce caractère essentiel de l'aspect sémiotique ou linguistique se trouve pleinement assumé par le premier des algébristes de Cambridge, Robert Woodhouse. En effet, Woodhouse fut le premier à vouloir introduire la notation leibnizienne dans les mathématiques anglaises. À cette adoption s'ajoutait également une affirmation énergique de la généralité et de l'indépendance des méthodes algébriques, qui sur le Continent trouvait des difficultés à être dégagée. Mais si quelque chose commence pour nous avec Woodhouse, c'est dans la mesure où le problème de la généralité de l'Algèbre est posé par lui dès le début comme une propriété *directement attribuable à la nature des signes*.

La première fois que Woodhouse témoigne de la nécessité d'adopter la notation leibnizienne c'est dans un court traité de 1802 intitulé « On the Independence of the analytical and geometrical Methods of Investigation; and on the Advantages to be derived from their Separation ». La question précise déclenchant cette nécessité était celle de trouver un binôme de puissances de la forme $\alpha^n + \beta^n$ en termes du binôme $\alpha + \beta$. Woodhouse fait alors appel à l'œuvre d'Arbogast :

> The great simplicity and convenience of his notation have caused me to adopt it, although it does not harmonize well with the fluxionary notation which I have employed in the present Paper. (Woodhouse, 1802, p. 109, note)

Woodhouse s'attaque dans ces pages au géométrisme qui dominait la scène mathématique anglaise de son époque. À cette méthode géométrique, Woodhouse opposera la méthode analytique, c'est-à-dire celle qui permet de représenter des fonctions usuellement associées à des représentations géométriques (tels *sin, cos, e, log*…) au moyen d'expressions analytiques déterminées par ses développements en série[169]. Devant l'usage répandu des représentations géométriques dans les démonstrations mathématiques, le but de Woodhouse est de montrer que cet usage n'est absolument pas nécessaire puisque la méthode analytique est non seulement suffisante, mais aussi entièrement indépendante. La primauté de cette dernière est d'autant plus urgente que, à la différence des ambiguïtés et des erreurs induites par les représentations géométriques, elle représente ses objets « par inférence stricte, adéquatement, de façon non ambiguë, et uniquement [*solely*] » (1802, p. 86, note). Or, lorsque Woodhouse explique ce qu'il entend par « expression ou raisonnement analytique », il affirme :

> The terms analysis, analytical, algebra, algebraical, have been so often distinguished, and so often confounded, that I shall not take the trouble again to distinguish them. I use the words analytical, algebraical, indifferently, in contradistinction to geometrical. (Woodhouse, 1802, p. 87, note).

Cette alliance, voire confusion, entre Analyse et Algèbre est un pas crucial pour le développement d'une Algèbre abstraite. Car bien que Woodhouse ne prenne pas soin de les distinguer, méthode analytique et Algèbre ne renvoient pourtant pas au même phénomène. Avant les travaux des algébristes anglais, les méthodes analytiques consistent pour l'essentiel dans un ensemble de techniques efficaces de détermination d'objets liés fondamentalement au calcul infinitésimal, la nature de ces objets (physique, géométrique, métaphysique ou autre) demeurant entièrement étrangère à ces techniques. L'Algèbre de son côté, dans le sens abstrait que lui donneront les mathématiciens de Cambridge, n'était que le domaine toujours virtuel dont certaines opérations concrètes liées à l'Analyse, et au calcul infinitésimal en particulier, comme le calcul d'opérations, pourraient tirer leur consistance et leur généralité. Or, par cette identification de l'Analyse et de l'Algèbre qui commence à s'opérer dans les travaux de Woodhouse, suivant sans doute l'inspiration du grand projet d'Analyse algébrique de Lagrange, l'Analyse peut recevoir de l'Algèbre une nouvelle nature qui lui enlève son caractère simplement accessoire et subordonné. Woodhouse l'énonce avec une clarté étonnante vers la fin de son *Principles of Analytical Calculation* :

> According to the view that has been taken of the differential calculus, it is to be considered as a branch of common Algebra […]. In its mere processes and rules it demands no hypothesis, it requires the establishment of no theory: the differential of fx is simply the second term of $f(x+\mathrm{d}x)$ expanded, $\mathrm{d}x$ being altogether arbitrary […]. In its application,

[169] Ainsi, par exemple, si la représentation *géométrique* de la fonction $\sin(x)$ correspond à une courbe de forme sinusoïdale, elle se laisse pourtant exprimer *analytiquement* comme $\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ (avec x complexe et $i=\sqrt{-1}$), où la fonction exponentielle est à son tour développable en série entière : $e^x=\sum_0^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$.

> the calculus cannot be laid to demand any new hypothesis, but simply requires this proportion to be established, viz. that in a series $a + a'.x + a''.x^2 + \&c.x$ may be taken of such a magnitude, that any term as $a''^{\cdots n}.x^n$ shall be greater than sum of succeeding terms. In the method of fluxions and of limits, the differential (or fluxion) of a function fx, although expressed by the second term of $f(x + \mathrm{d}x)$, or $f(x + \dot{x})$ expanded, is not simply that second term, but is expressed by it, under the circumstances of a particular hypothesis and of a particular theory; and consequently, the mere analytical processes and operations by which rules are founded, become burthened with that theory. (Woodhouse, 1803, p. 212)[170]

Le déplacement est radical. Si le développement analytique d'une fonction $f(x)$ n'était précédemment qu'une technique devant passer par l'artifice d'un accroissement $f(x + \mathrm{d}x)$, pour arriver à déterminer des propriétés de la fonction en question, définie extérieurement (par la représentation d'une trajectoire, d'une courbe, d'un fonctionnement particulier…), en toute indépendance de son expression analytique, maintenant c'est l'expression analytique, c'est-à-dire le développement de $f(x + \mathrm{d}x)$, qui définit la fonction $f(x)$ comme n'étant rien d'autre que l'une des places que cette expression habilite (la seconde en l'occurrence). $f(x)$ peut alors être détachée de toute intuition autre que celle liée aux conditions expressives, libérée de toute « hypothèse », délestée de toute « théorie ». Seul le fonctionnement des expressions analytiques compte, seul d'une théorie générale de ce fonctionnement les éléments de l'Analyse pourront accepter d'être lestés.

Or, cette théorie du fonctionnement des expressions analytiques n'est pour Woodouse autre que l'Algèbre. Seulement, si jusqu'alors le domaine que l'Algèbre recouvre et qui la définit ne se présentait que comme une virtualité derrière des analogies toujours particulières, toujours locales (comme celle entre la formule du binôme de Newton et celle de Leibniz, à la base du calcul des opérations), l'indépendance requise des méthodes analytiques par rapport à

[170] On trouve dans le même ouvrage une remarque aussi éloquente concernant ce que Woodhouse propose d'appeler « Naperean logarithm » : ce logarithme « is commonly called the *hyperbolic logarithm*, because it can be represented by the area of the equilateral hyperbola between its asymptotes: the name, however, is improperly given, since the connexion between the theories of logarithms and curve lines is merely accidental and arbitrary. The Analysts of the 17th century thought otherwise, and fancying that a real and necessary connexion, existed between the properties of logarithms and of hyperbolic spaces, first investigated those of the latter and thence transferred them to logarithms. In fact, the arrangement of the truths of analytical science, such as history gives it, is very different from their logical and natural arrangement; and as, in the infancy of analysis, mathematicians were more solicitous to advance it, than to advance it by just and natural means, they frequently deviated into indirect and foreign demonstrations, and sometimes employed the geometrical method, with which they were well acquainted, to establish arithmetical and algebraical truths: the evil attending on this mode of procedure has been, that things in their nature totally independent have been thought to possess a real and necessary connexion, and, that the principles of a general method have been fought for, in some particular method, properly, that is according to the logical and natural order of ideas, to be comprehended under the general one. The properties of numbers established by means of the properties of extension, and the expansion of algebraic expressions by means of the properties of motion are curious facts in the history of science: a knowledge and examination of these facts would shew us the source of many confused notions, and conduct us to the solution of several paradoxes with which analytic science is supposed to be embarrassed. » (Woodhouse, 1803, pp. 39-40)

d'autres domaines, et à la géométrie en particulier, offre à cette virtualité un champ à la fois général et effectif sur lequel se développer. Ensemble, l'Analyse et l'Algèbre ainsi définie peuvent réaliser la double tâche d'écarter les intuitions géométriques qui entravaient de nombreux aspects des développements mathématiques[171], et d'isoler un champ spécifique et indépendant à l'intérieur de l'espace mathématique, doué d'une normativité et d'une consistance propres. L'Algèbre surmonte ainsi l'incapacité où elle se trouvait chez les mathématiciens continentaux de se distinguer de la simple analogie, en recevant de l'Analyse, en tant qu'ensemble ouvert de techniques ou pratiques expressives, le terrain *concret* où penser l'analogie *en général*. Et c'est de cette généralité pensée par l'Algèbre que l'Analyse recevra en retour ses titres d'indépendance[172], quitte à ce qu'Analyse et Algèbre finissent par se confondre, au point que l'indépendance du domaine analytique devienne celui de l'Algèbre elle-même. Qui plus est, ce champ nouvellement constitué pourra prétendre posséder la clé des contenus mathématiques attribués jusqu'alors à la Géométrie : le Calcul infinitésimal devient dès lors une branche de l'Algèbre.

L'Algèbre offre donc, à travers l'Analyse, une nouvelle nature et une nouvelle théorie aux contenus mathématiques. Mais de quelle nature et de quelle théorie s'agit-il ? La réponse de Woodhouse ne laisse pas de doutes : le Calcul différentiel

> is to be considered as a branch of common Algebra, or rather as a part of the common symbolical language in which quantity is treated of. (Woodhouse, 1803, p. 212)

La nature même de l'Algèbre est symbolique, ce qui veut dire qu'en tant que théorie, elle se confond avec une théorie du langage et du signe. Aussi, Woodhouse donne-t-il une importance décisive à la question de la *notation*, et attribue « la plupart des avantages que la science a reçues » aux « améliorations faites dans le langage de l'Analyse » (1803, p. xxxi). Le fait que l'Algèbre soit la théorie qui permet de penser l'analogie *en général* ne veut pas dire autre chose. Et c'est précisément par là que le traité de Woodhouse de 1802 commence par poser le problème. Il s'ouvre sur l'explicitation du but d'un de ses textes précédents, où il s'agissait de

> …shew the insufficiency in mathematical reasoning, of a principle of analogy, by which the properties demonstrated for one figure were to be transferred to another, to which the former was supposed to bear a resemblance. (Woodhouse, 1802, p. 85)

---

[171] Dont l'utilisation des quantités imaginaires est l'exemple le plus fréquent, bien qu'il ne soit pas le seul.

[172] Très nombreux sont les cas des généralisations de propriétés mathématiques effectuées par les algébristes de Cambridge au moyen de l'algébrisation de l'Analyse. Mentionnons à titre d'exemples arbitraires, à part les démonstrations de la célèbre formule du binôme, et sa généralisation à l'expansion des puissances d'un multinôme (Woodhouse, 1803, pp. 109-122), le traitement des séries indépendamment de leur convergence (Woodhouse, 1803, pp. 153-155), ou la prise en considération de l'ensemble de racines, réelles et imaginaires, déterminées par les équations analytiques d'un problème donné (Babbage, 1826, § III).

L’analogie est donc moins un principe d’explication qu’un phénomène lui-même à expliquer.

Or, si l’analogie ne peut pas être tenue pour responsable des démonstrations de propriétés mathématiques, qu’est-ce qui pourrait bien l’être à sa place ? Non pas, dit Woodhouse, un nouveau principe ou un processus intellectuel inaperçu, mais des *opérations pures*, « conduites d’une manière similaire à celle par laquelle est conduit tout raisonnement avec des termes généraux » (1802, p. 85). Il s’agit donc de rendre compte du fonctionnement de ces opérations, en l’apparentant au fonctionnement du raisonnement en général – ce qui pourra être établi « en donnant le vrai sens [*meaning*] aux signes de connexion [*connecting signs*] » (1802, p. 86). L’Algèbre sera donc le nom de cet établissement du « vrai sens » des signes en tant qu’opérations, susceptibles de constituer des « termes généraux » pour le raisonnement. Et comme si le caractère essentiellement linguistique ou sémiotique de sa nature et de son fondement risquait de ne pas se laisser suffisamment entendre, Woodhouse affirme :

> That, in algebraical calculation, geometrical expressions and formulas are not essentially necessary, perhaps this short and easy consideration may convince us; since *algebra is an universal language*, it ought surely to be competent to express the conditions belonging to any subject of inquiry; and, if adequate expressions be obtained, then there is no doubt that *with such, reasoning or deduction may be carried on*. (Woodhouse, 1802, p. 87, nous soulignons)

Ce dernier point est décisif. Car il révèle que lorsque l’Algèbre parvient à affirmer, avec Woodhouse et au moyen d’un ensemble de procédures de sémiotisation, son indépendance à l’intérieur des mathématiques, *elle se rapproche naturellement et par le même mouvement du territoire de la logique*. En effet, l’indépendance de l’Algèbre est gagnée au moyen d’un détachement d’une dimension sémiotique capturant les déterminations mathématiques traditionnellement attachées à la Géométrie. Ce qui place l’Algèbre abstraite dans le territoire problématique de l’universalité du langage, et des procédures du raisonnement et de la déduction. Autrement dit, dans le territoire définissant au XIX^e siècle la double préoccupation de la pensée logique : *lingua universalis* et *calculus ratiocinator*. Il en résulte que si la mathématisation de la logique constitue un événement dans l’histoire de la pensée, cet événement n’a pourtant rien de hasardeux. Ce qu’on appelle mathématisation de la logique, c’est d’abord et avant tout le traitement des déterminations logiques au moyen des procédures algébriques. Or, un regard sur la naissance de l’Algèbre abstraite montre que, loin d’être accidentel, le lien qu’elle entretient avec la logique est de droit : l’Algèbre abstraite n’existe comme telle qu’en définissant son être même selon les mêmes problèmes qui définissent à l’époque de sa naissance le territoire de la pensée logique.

Encore faudrait-il, pour qu'il y ait véritable « mathématisation » de la logique, que l'Algèbre abstraite elle-même soit reconnue comme discipline « mathématique » à part entière (et non pas comme simple technique attachée à une autre discipline, comme c'était le cas du calcul d'opérations, par exemple). Aussi, la distinction entre Algèbre et Géométrie sur laquelle insisteront tous les algébristes de Cambridge est-elle fondamentale. Car il ne suffit pas de montrer que l'Algèbre constitue un domaine consistant et autonome ; il faut encore montrer que la détermination des propriétés attribuée jusqu'alors aux mathématiques dans leurs différentes branches, relève en fait du domaine algébrique nouvellement constitué. C'est pourquoi l'article de Woodhouse de 1802 se présente comme le traitement analytique des cas « qui ont toujours été pensés comme réclamant l'aide de la méthode géométrique » dans le but de « montrer que le calcul analytique n'a besoin d'aucune aide de la géométrie, et doit la rejeter, comptant entièrement sur ses propres ressources » (1802, p. 124).

Par cette différentiation d'avec la Géométrie, l'Algèbre s'affirme comme un domaine à la fois alternatif et irréductible des mathématiques. Mais alors les aspects sémiotiques reçoivent par là même une nouvelle centralité, car c'est précisément au niveau de leurs systèmes de signes respectifs que cette différence entre Géométrie et Algèbre pourra être établie. Si la nature de l'Algèbre est symbolique, il faut que celle de la Géométrie, avec laquelle celle-là rivalise dans la détermination des propriétés, le soit aussi. Responsables, comme nous venons de le voir, à la fois de l'autonomie de l'Algèbre et du lien intime qu'elle maintient avec les problèmes logiques, les propriétés liées directement au fonctionnement des signes sont précisément celles qui permettront d'affirmer et de comprendre la différence entre Géométrie et Algèbre en tant que domaines également *mathématiques* mais néanmoins *distincts*. On comprend dès lors pourquoi, au moment de contester la nature géométrique de certaines expressions mathématiques, Woodhouse appréhende le géométrique avant tout comme un langage ou système de signes :

> All expressions and formulas, such as, $\sin. x$, $\cos. x$, $\text{hyp.}\log. x$, $\sin. nx = 2\cos. x \,.\, \sin.(n-1)x - \sin.(n-2)x$, $\int x^{\cdot}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$ circular arc, $\int x^{\cdot}\sqrt{\frac{1+n^2x^2}{1-x^2}} =$ elliptical arc, &c. are geometrical, or involve geometrical language: they suppose the existence of a particular system of signs, and method of deduction; and relate to certain theorems, established conformably to such system and method. (Woodhouse, 1802, pp. 87-88)[173]

[173] Voir aussi par exemple Woodhouse (1802, p. 100), où il parle de l'éventuelle commodité (*convenience*) de « traduire » quelques résultats analytiques « dans le langage géométrique » ; ou quelques pages plus loin, où il affirme à propos du théorème de Cotes que « the circle and its lines were no farther useful or necessary, than as they afforded a mode of expressing, in geometrical language, an analytical truth » (p. 108).

C’est dire que la nature de la Géométrie est elle aussi d’ordre sémiotique, lorsqu’elle est confrontée dans ses résultats à ceux de l’Algèbre. Dès lors, Algèbre et Géométrie doivent être mises sur un pied d’égalité : si la Géométrie doit être séparée de l’Algèbre, l’Algèbre ne doit pas moins être séparée de la Géométrie, et l’Analyse ne nuit pas à la simplicité de la Géométrie plus que celle-ci ne nuit à la simplicité de celle-là (Woodhouse, 1802, p. 117). Mais si Géométrie et Algèbre ne sont que deux langages pour exprimer les mêmes sens ou les mêmes vérités, comment alors les distinguer, et au nom de quoi serait-il possible d’établir une préférence entre l’un ou l’autre ? Précisément en fonction de leurs propriétés *sémiotiques*. Ainsi, s’il s’agit de rendre compte supériorité de la méthode géométrique, Woodhouse affirme que :

> …geometry, instead of a generic term, employs, as a particular individual, the sign or representative of a genus; and […], as in algebra, the signs are altogether arbitrary, in geometry, they bear a resemblance to the things signified, and are called *natural* signs, since the figure of a triangle, or square, suggests to the mind the same tangible figure in Europe, that it does in America: and this resemblance of the sign to the thing signified, is supposed to be the chief cause of the superior clearness of geometrical demonstration. (Woodhouse, 1802, pp. 119-120)

Ce ne sont pas les seules raisons; Woodhouse s’efforce de trouver d’autres arguments en faveur de la Géométrie :

> Another cause may perhaps be thought to exist in this circumstance, that whatever is demonstrated, of a triangle or other diagram, considered as the representative of all triangles and diagrams, is moreover demonstrated of that individual triangle or diagram. A third, and more satisfactory cause than the last, may be, that in investigation, for the purpose of preventing ambiguity and mistake, it is frequently necessary to recur from the sign to the thing signified; which is more easily done, the less general and arbitrary the modes of representation are; and, consequently, in geometry more easily than in algebra. (Woodhouse, 1802, p. 120)

Signes individuels représentants d’un genre, ressemblance et naturalité, immédiateté entre signe et chose signifiée : toutes les propriétés qui définissent la Géométrie en opposition à l’Algèbre, ainsi que sa supériorité à l’égard de celle-ci relèvent de la nature des signes par lesquelles ces deux disciplines s’expriment. Or ces propriétés sémiotiques n’impliquent une supériorité que dans certains usages, et ne sont pas adéquates de manière générale. Ainsi, la naturalité des signes géométriques s’avérera inadaptée pour le traitement des propriétés des solides « puisque la représentation des solides sur un plan par diagrammes n’est pas une représentation naturelle » (1802, p. 120), de même que pour des questions concernant des courbures ou l’emploi du Calcul différentiel. D’où Woodhouse conclut que la méthode géométrique n'est supérieure que lorsqu'il s'agit de recherches de « nature simple » (p. 121). Le langage de l'Analyse associé à l'Algèbre est, en revanche, plus « lumineux » lorsque l'on est confronté à des recherches « abstruses et intriquées » (p. 122). En particulier, la nature de ses signes le rend adéquat pour la « déduction de la vérité », et cela parce que cette nature habilite de façon intrinsèque la double opération de *combinaison* et de *généralisation étendue* (p. 121). Woodhouse conclut alors :

> No language like the language of analysis, one of the greatest of modern mathematicians has observed, is capable of such elegance as flows from the development of a long series of expressions connected one with the other, and all dependent on the same fundamental idea. (Woodhouse, 1802, p. 121)

À partir de ces travaux précurseurs de Woodhouse, on peut voir que la mathématisation de la logique préparée et exigée d'une certaine manière par la naissance de l'Algèbre abstraite doit être comprise sur le fond de cette distinction de domaines à l'intérieur des mathématiques, établie non pas en fonction de leurs objets et de leurs propriétés, mais de leur nature sémiotique, c'est-à-dire, de leur existence en tant que langages ou systèmes de signes ainsi que des opérations que cette nature habilite. Qui plus est, dans la foulée de cette réflexion sémiotique exigée par le développement même de l'Algèbre abstraite, que Woodhouse initie de façon discrète mais indubitable, il devient manifeste qu'à travers cette appréhension des contenus mathématiques à partir des systèmes des signes, un lien nécessaire entre la formalité proprement mathématique et la nature même des langages en général commence à apparaître d'une façon nouvelle, qui dépasse les aléas des analogies purement locales et acquiert une consistance opérationnelle élargie.

II.1.1.3. Babbage : Extension du domaine de la lutte

Cet élargissement de la consistance au niveau de la correspondance entre domaines mathématiques et systèmes de signes, se manifeste avec particulière évidence dans l'œuvre de Charles Babbage. Fondateur, avec d'autres, de la Société Analytique, et fortement influencé par la pensée de Woodhouse, Babbage écrira en 1821 un opuscule intitulé *On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning*, qui sera publié quelques années plus tard. Dans ces pages, les propriétés sémiotiques qui définissent l'Algèbre prétendent être explorées pour elles-mêmes et de façon aussi exhaustive et systématique que possible, tout en marquant leur différence, voire leur opposition, avec celles des autres branches des mathématiques, et de la Géométrie en particulier. La volonté d'élargir la portée des réflexions sémiotiques à l'ensemble de l'espace des mathématiques, qui se laisse entendre déjà dans le titre de l'opuscule, est explicitée dès le premier paragraphe. En effet, le texte de Babbage s'ouvre sur le problème de l'établissement de « fondements sûrs » pour les principes qui fondent à leur tour « ces branches qui ont altéré de façon si complète le visage de la science » (1826, p. 1). Or, ce qui pourrait fournir une solution à ce problème des fondements des nouvelles mathématiques, c'est précisément une réflexion autour du langage et de la notation des mathématiques en général :

> As a remedy to the inconveniences which must inevitably result from the continued accumulation of new materials, as well as from the various dress in which the old may be exhibited, nothing appears so likely to succeed as a revision of the language in which all the results of the science are expressed, and the establishment of general principles which shall curtail its exuberance, and regulate that which has hitherto been considered as arbitrary — the contrivance of a notation to express new relations. (Babbage, 1826, p. 2)

Cette nécessité, énoncée par Babbage, de réviser entièrement le langage général des mathématiques définit, on le sait, la tâche essentielle de la philosophie moderne des mathématiques, ainsi que de la logique formelle qui naîtra dans le sillon de cette exigence. Babbage ne s'occupera pourtant pas d'entreprendre directement ce travail, mais il en préparera le terrain au moyen d'un ensemble d'observations autour de la nature du rapport entre les signes et les facultés du raisonnement, et notamment autour des propriétés sémiotiques qui assurent la certitude de l'Analyse mathématique, par comparaison avec d'autres langages, scientifiques ou non.

Ainsi, selon la caractérisation de Babbage, le sens des signes en Algèbre est régulé par des définitions très simples, ne contenant qu'un nombre très réduit d'idées. D'autre part, à la différence des signes du langage ordinaire, ceux du langage de l'Analyse ne possèdent en général qu'un seul sens ou signification (*meaning* ou *signification*), et même lorsque ce n'est pas le cas, les définitions de leur sens sont si précises et distinctes que l'ambiguïté n'est que de l'ordre de la « forme extérieure » des signes (p. 3). Si bien que les signes algébriques peuvent toujours résoudre les difficultés attachées à la multiplicité des significations, en rendant « visibles aux yeux » les propriétés sur lesquelles porte « toute la force de notre raisonnement », sans pourtant exclure celles qui y contribuent en moindre degré (p. 4). L'exemple alors présenté par Babbage montre qu'une telle résolution est associée aux procédures symboliques propres au calcul d'opérations : il s'agit des circonstances communes dont peuvent dépendre les propriétés de différentes variantes ou cas d'une fonction symboliquement exprimée par « $\psi(\overline{x},\overline{y})$ », qui se laisseraient « séparer » du reste des circonstances et exprimer symboliquement. Ainsi,

> …the index *n* subjoined to a function

$$\psi(\overline{x}, \overline{y})_n$$

may be defined to mean that it is homogeneous with respect to *x* and *y* and of the dimensions *n*: these two circumstances are the causes on which the truth of the following property depends.

xt being substituted for *y*

$$\psi(\overline{x}, \overline{xt})_n = x^n \psi(\overline{t}, \overline{1})_n$$

(Babbage, 1826, p. 5)

La généralité des contenus capables d'être capturés par les signes algébriques apparaît aussitôt comme explication possible de leur efficacité. À cette généralité, déjà signalée par Woodhouse, s'ajoute également ce que Babbage appelle « contraction », et qu'il comprend comme la propriété des signes algébriques de concentrer une grande « quantité de sens » dans un espace réduit. Par ce moyen, l'Algèbre peut présenter avec clarté et sans avoir recours au langage des mots, non seulement la conclusion d'un raisonnement, mais aussi « chaque étape de son progrès » (p. 7). Babbage présente encore un exemple tiré du « calcul des fonctions », comme la branche de l'Analyse où ces propriétés semblent se présenter dans leur état le plus développé, exemple dans lequel une seule équation algébrique est censée suffire à exprimer ce qui autrement nécessiterait 2307 symboles. La nature mécanique des opérations algébriques est aussi soulignée, et rapportée au pouvoir de l'Analyse de séparer les difficultés en éléments simples.

Ces traits définissent la spécificité de l'Algèbre par rapport à la Géométrie. Car bien que les contenus et les raisonnements de cette dernière soient eux aussi de nature générale, les signes sur lesquels elle s'appuie ne peuvent représenter qu'un individu, ce qui introduit souvent dans le cours du raisonnement des particularités qui portent atteinte à la généralité des résultats. Aussi, Babbage conclut-il :

> *The reasonings employed in Geometry and in Algebra are both of them general, but the signs which we use in the former, are of an individual nature, whilst those which are employed in the latter, are as abstract as any of the terms in which the reasoning is expressed.*
>
> The signs used in Geometry, are frequently merely individuals of the species they represent; whilst those employed in Algebra having a connection purely arbitrary with the species for which they stand, do not force on the attention one individual in preference to any other. (Babbage, 1826, p. 14)

Comme on l'a vu, le caractère individuel des signes géométriques avait été déjà signalé par Woodhouse. Mais comme le remarque Diagne (1989, p. 80 sq), Babbage opère ici une radicalisation de l'argument en faveur de l'Algèbre. Car pour Woodhouse l'individualité incarnée par les signes géométriques était après tout un appui pour l'intuition et une garantie de naturalité. Pourtant, la généralité des conclusions dans les deux disciplines devant être la même, ainsi que Babbage y insiste, cette naturalité-là ne joue aucun rôle dans le raisonnement mathématique proprement dit. La véritable signification des signes géométriques est en fin de compte aussi abstraite que celle des signes algébriques. Seulement, le régime de signes dans lequel la Géométrie se déploie ne prend pas en charge cette abstraction en tant que telle, et fait par là obstacle au raisonnement proprement mathématique.

De cette manière, les réflexions de Babbage produisent un élargissement de la légitimité de l'Algèbre dans l'espace des mathématiques, basé entièrement sur ses qualités sémiotiques. Mais par le même mouvement s'affirme et s'approfondit son rapprochement avec la logique. Au point où l'on pourrait dire que c'est par cette expansion de la juridiction sémiotique que ce qu'il faut appeler en vérité l'algébrisation de la logique pourra être vu comme une mathématisation de la logique tout simplement. Si chez Babbage ce processus n'arrive pas encore à être appelé par son nom, il est néanmoins annoncé par sa tâche :

> An examination of the various stages, by which, from certain data, we arrive at the solution of the questions to which they belong, ought to constitute a prominent feature, in any work devoted to the philosophical explanation of analytical language. (Babbage, 1826, p. 21)[174]

Mais Babbage ne se contente pas de signaler le terrain possible, voire nécessaire, d'une recherche à venir. Il dessine en même temps les traits généraux de la méthodologie à suivre, ainsi que le double principe qui pourrait éventuellement la fonder. Quant à la méthode générale, Babbage distingue trois étapes, avec leurs règles et leurs difficultés respectives (p. 22 sq.). La première de ces étapes consiste dans la traduction de la question à traiter dans la « langue de l'analyse », ce qui veut dire fondamentalement la réduction de la difficulté à une ou plusieurs équations. La seconde étape correspond à l'ensemble des opérations nécessaires pour résoudre analytiquement les équations dans lesquelles le problème à résoudre a été traduit, ce qui ne comporte pas plus de complications que la résolution ordinaire d'un problème algébrique. Enfin, la troisième étape s'occupe de la retraduction dans le langage ordinaire des résultats obtenus par les opérations strictement algébriques de la seconde étape. Cette dernière étape présente les plus grandes difficultés, car du fait de l'essentielle généralité du langage algébrique, l'ensemble des solutions trouvées analytiquement peut se révéler bien plus grand que le nombre des solutions requises pour la question initiale, et dès lors le problème de leur *interprétation* se pose (p. 32). S'annoncent ainsi les traits fondamentaux

---

[174] On remarquera, au demeurant, la tonalité calculatoire ou computationnelle dans laquelle la tâche de la logique est énoncée par Babbage, en accord avec l'approche de la mécanisation du calcul qui le rendra célèbre.

qu'une logique formelle issue de l'ensemble de ce processus de constitution de l'Algèbre abstraite aura à définir et spécifier.

Quant au principe qui pourrait être responsable de la « puissance étendue » de l'utilisation des signes algébriques, en plus de tous ceux que nous avons déjà mentionnés, Babbage en avance un auquel il semble accorder une place privilégiée, celui qu'il appelle de *symétrie*. Ce principe présente deux aspects, parfois connectés mais essentiellement indépendants : ressemblance des systèmes de caractères utilisés pour représenter les données et similarité de situation de ces caractères à l'intérieur d'une formule (p. 36). Par son premier aspect, la symétrie peut être illustrée par la ressemblance dans le choix des symboles de deux séries :

$$a + b + c + \cdots$$

et

$$a' + b' + c' + \cdots$$

dont il s'agirait de faire le produit $aa' + bb' + cc' + \cdots$, et où les objets désignés par « a » et « a' » n'ont besoin d'avoir aucune relation entre eux, autre que celle qui est symboliquement instituée par la mise en correspondance algébrique de ces séries. Le deuxième aspect de la symétrie, en revanche, tient à ce que Babbage appelle « forme », et qui concerne la disposition des termes dans une formule ou équation. Ainsi, par exemple, étant donnés les rayons a, b et c de trois cercles définissant un triangle, au lieu d'exprimer la cotangente du demi-angle opposé à a par :

$$\sqrt{\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2}}$$

il est préférable de le faire par l'expression équivalente :

$$\frac{\sqrt{ab + ac + bc}}{a}$$

où l'on peut percevoir immédiatement dans le numérateur les produits des rayons, deux à deux. Babbage conclut :

> By employing the first species of symmetry, we assist the memory in remembering the ideas indicated by signs; by the use of the second, we enable it more easily to retain the form, in which our investigation has arranged those signs, as well as facilitate the processes, by which that final arrangement was accomplished. By the happy union of the two, our formulae acquire that wonderful property of conveying to the mind, almost at a single glance, the most complicated relations of quantity, exciting a succession of ideas, with a rapidity and accuracy, which would baffle the powers of the most copious language. (Babbage, 1826, p. 52)

Grâce à ce travail de Babbage, l'aspect proprement sémiotique des mathématiques est reconnu explicitement et dans toute son étendue. Mais ces derniers mots montrent néanmoins que le terrain sémiotique pour la rencontre inédite et définitive entre la pratique mathématique et la réflexion logique sous le signe de l'Algèbre n'est pas encore prêt. Car les principes sémiotiques qui sont placés à la base de la généralité de l'Algèbre continuent à appuyer leur légitimité sur une efficacité toujours subjective et après tout extrinsèque aux propriétés déterminables algébriquement (la perception, le regard, la mémoire, l'esprit, etc.). L'établissement, suggéré autrefois par Servois, de principes sémiotiques véritablement immanents au système de l'Algèbre et capables de court-circuiter le détour métaphysique du sujet renvoyant signes mathématiques et logiques directement les uns sur les autres, devra encore attendre les formulations de Peacock. Il n'en reste pas moins qu'avec Babbage on voit positivement se déployer sur toute l'étendue des mathématiques une dimension qui n'est définie que par la nature des signes, à partir de laquelle les différentes régions des mathématiques regagnent une intelligibilité nouvelle, conformément aux méthodes d'une Algèbre qui a trouvé les moyens de faire passer sa propre généralité pour celle des mathématiques tout court.

II.1.2. L'abstraction malaisée de l'Arithmétique

Les travaux de Woodhouse et de Babbage montrent que la naissance de l'Algèbre abstraite se définit en fonction d'une « dé-géométrisation » du langage mathématique. Ils montrent aussi que la justification d'une telle dégéométrisation porte entièrement sur les propriétés de la Géométrie comme de l'Algèbre observées en tant que systèmes de signes. À tel point qu'il serait inexact d'affirmer que l'Algèbre abstraite s'est constituée en rejetant l'appel à l'intuition que la Géométrie introduisait dans les mathématiques. Il faudrait dire plutôt que ce qui est rejeté par là, c'est uniquement la forme géométrique de l'intuition, donnée par la nature particulière de son système de signes, au profit d'une intuition proprement algébrique liée au fonctionnement des symboles tel qu'on peut les trouver dans l'Analyse, donnant un accès plus direct à des propriétés telles que la généralité ou les règles de combinaison.

Or, si l'algébrisation de l'espace mathématique suppose de façon simultanée et corrélative une dégéométrisation dans ce sens précis, elle entraîne en même temps une « désarithmétisation ». Et cela peut-être de manière plus fondamentale, puisque *c'est en se distinguant de l'Arithmétique que l'Algèbre acquerra la généralité que les algébristes anglais feront ensuite jouer contre la Géométrie*. Beaucoup a été dit à propos du caractère « abstrait » de l'Algèbre symbolique développée par les mathématiciens anglais dans la première moitié du XIX^{e} siècle ; mais on a rarement remarqué que ce qui a été « abstrait » (c'est-à-dire, considéré par abstraction, séparé et isolé) pour parvenir à l' « Algèbre abstraite » n'est rien d'autre que l'Arithmétique. En effet, les opérations de l'Algèbre sont le résultat de l'abstraction des principes opératoires des opérations arithmétiques, tout comme les termes généraux qui font l'essence symbolique de l'Algèbre (et donc l'essence de l'Algèbre tout court) résultent d'un processus de détachement par rapport aux termes arithmétiques (quantités numériques calculables). Plus précisément, l'Algèbre n'est que le nom de cette abstraction et de ce détachement comme deux aspects du même processus. C'est pourquoi l'Algèbre abstraite ne recevra son véritable fondement que lorsque George Peacock arrivera à la qualifier en tant qu'Algèbre symbolique en opposition à l'Algèbre arithmétique.

Que l'achèvement du processus de constitution de l'Algèbre abstraite ait dû attendre l'explicitation de sa différence d'avec l'Arithmétique dans les travaux de Peacock ne veut pas dire, pourtant, que cette différence n'était pas présente déjà dans les réflexions des algébristes de Cambridge dès le début de leurs travaux. Seulement, cette différence était plus délicate à saisir sous la forme d'une différence symétrique *entre deux régimes sémiotiques*. À tel point que cette différence ne parvenait pas à s'énoncer sans engendrer des difficultés au niveau de la cohérence de la dimension symbolique sur laquelle prenait appui la naissance de l'Algèbre. Ces difficultés tiennent pour l'essentiel à la tendance des algébristes anglais à refuser, ne serait-ce que tacitement, tout statut sémiotique à l'Arithmétique. Elles s'organisent suivant les deux aspects élémentaires de la généralité symbolique par laquelle l'Algèbre cherche à se démarquer de l'Arithmétique. Concrètement, ces difficultés se manifestent comme deux asymétries menaçant l'homogénéité de la surface symbolique de l'Algèbre.

Le premier de ces aspects concerne donc l'algébrisation des opérations arithmétiques. Nous avons mentionné que l'article de Woodhouse de 1802 s'ouvrait sur l'évocation d'un de ses travaux précédents pour placer la question de l'Algèbre immédiatement sur un plan sémiotique à partir du problème des fondements de l'analogie. Si l'Algèbre pouvait alors être vue comme la discipline traitant de manière globale des « symboles abrégés » ou des « termes généraux » constitués par la restitution du « vrai sens » des signes connecteurs, c'est dans la mesure où elle a été capable de concevoir ce « vrai sens » comme entièrement indépendant *du calcul arithmétique des quantités,* puisque ces signes connecteurs « indiquent, non pas tellement le calcul [*computation*] arithmétique de quantités, mais certaines opérations algébriques » (1802, p. 86). Woodhouse ajoute :

> It was further observed, that, from certain established formulas, abridged symbols or general terms might be formed, which consequently must have their signification dependent on such formulas; and that, although the parts of certain abridged expressions could not separately be

> arithmetically computed, yet the expressions themselves might be legitimately employed in all algebraic operations. (Woodhouse, 1802, p. 86)

Certes le détachement de la dimension opératoire était déjà présent dans le calcul d'opérations continental, mais uniquement sous la forme d'une pratique ou d'une simple technique. L'Analyse, pour sa part, n'élargit la portée de l'Algèbre qu'en lui offrant un vaste territoire d'application à partir duquel contester la primauté sémiotique de la Géométrie dans la géographie des mathématiques. Mais l'indépendance d'un niveau opératoire et de la généralité dans les signes qui en résulte ne s'y trouvent que constatées, et l'essence même d'un fondement est de ne pas se laisser appuyer sur de telles constatations. Si fondement il y a, il ne peut être trouvé que du côté du fonctionnement des *quantités numériques* sur lesquelles ces opérations étaient censées porter, et par rapport auxquelles elles devraient par conséquent prendre leur indépendance. Autrement dit, le fondement doit être cherché dans une indépendance possible par rapport à l'Arithmétique, en tant que science du nombre. Il suffit de revenir à l'article que Woodhouse évoquait au début de son traité de 1802 pour constater que le rapport entre signes et quantités y est envisagé à partir d'une autonomie des opérations par rapport aux quantités sur lesquelles elles portent dans le cadre de l'Arithmétique.

Dans cet article de 1801, le problème est soulevé par l'introduction dans l'espace des mathématiques des « quantités impossibles » (du type $\sqrt{-1}$), engendrées au niveau des opérations numériques, mais dont le contenu arithmétique demeure cependant incalculable. La question se pose alors de savoir s'il est légitime d'opérer sur de telles quantités. Voulant fonder cette légitimité, Woodhouse formule d'abord l'argument des opposants de la manière suivante :

> Algebra is a species of short-hand writing; a language, or system of characters or signs, invented for the purpose of facilitating the comparison and combination of ideas. Now all demonstration by signs, must ultimately rest on observations made on individual objects; and all the varieties of the transformation and combination of signs, except what are arbitrary and conventional, must be regulated by properties observed to belong to the things of which the signs are the representatives. Demonstration by signs is shewn to be true, by referring to the individual things the signs represent; and is shewn to be general, by remarking that the operation is the same, whatever is the thing signified, or, in other words, that the operation is independent of the things signified. (Woodhouse, 1801, p. 90)

Le rapport de l'Algèbre à l'Arithmétique – Woodhouse fait dire à ses adversaires – est celui de la généralité symbolique utile à l'individualité essentielle des objets. Seules les propriétés des objets importent, si bien que ceux-ci constituent le fondement de toute vérité établie au niveau des signes algébriques ; lorsque ces objets manquent (à cause d'une impossibilité de calcul arithmétique), toute conclusion algébrique doit être suspendue. Or Woodhouse répond que les opérations avec des quantités impossibles entraînent des conclusions vraies et certaines, ce qui oblige à penser que leur nature et leur usage ont besoin d'être expliqués sur de nouvelles bases. Aussi oppose-t-il à ces arguments le fait que les opérations avec des quantités impossibles sont « régulées par les règles d'une logique aussi juste que la logique des quantités possibles » (1801, p. 90). Autrement dit, le fondement des vérités de l'Algèbre ne réside pas dans les propriétés des objets qu'elle représente mais uniquement dans les lois auxquelles cette représentation obéit, à condition que ces lois soient les mêmes que celles suivant lesquelles les objets se rapportent les uns aux autres. Il en résulte que l'indépendance de l'Algèbre par rapport à l'Arithmétique ne fait qu'un avec l'indépendance de la représentation symbolique par rapport aux objets que ces signes représentent.

Mais en quoi cette conception ne nous fait-elle pas retomber dans la simple analogie comme seul fondement de l'Algèbre, toujours subordonnée à l'Arithmétique parce que c'est au fonctionnement de cette dernière que celui de l'Algèbre doit être analogue ? Tant que les lois qui régulent le fonctionnement des signes sont comprises sous la forme de l'analogie, aucune vérité ne leur pourra être attribuée en propre, et l'Algèbre restera justiciable de l'Arithmétique. Aussi, Woodhouse rejette-t-il de manière décidée tout appel à la notion d'analogie[175]. Car, comme il le rappelle dans son traité de 1802, l'analogie n'est « ni antérieure au calcul, ni indépendante de lui, et par conséquent ne pourrait pas le réguler », et de cette façon, elle constitue « l'objet de recherche, non pas le guide ; le résultat de démonstration, non pas son principe directif. » (1802, p. 85). Ce qui fonde pour lui les vérités de l'Algèbre, ce n'est pas le fait que les lois de ses signes soient *analogues* à celles des objets, mais qu'elles soient *les mêmes*, sous une forme étendue. Ainsi, contre l'idée que les preuves des expressions générales dépendent des cas particuliers qui résultent d' « assigner des valeurs spécifiques aux signes », Woodhouse affirme :

> $(a+b\sqrt{-1})\times(c+d\sqrt{-1})$, and $ac+ad\sqrt{-1}+cb\sqrt{-1}-bd$, are two forms equivalent to each other, not proved equivalent, but *put so*, by extending the rule demonstrated for the signs of real quantities to characters that are insignificant. (Woodhouse, 1801, p. 93, nous soulignons)

Si le domaine des signes qui constitue l'essence de l'Algèbre peut déclarer son indépendance par rapport aux objets Arithmétiques, c'est dans la mesure où les signes cessent d'être vus

[175] Woodhouse (1801, pp. 91-92): « Pour les mathématiciens… le principe d'explication invoqué [analogie] doit absolument être insatisfaisant ; car, indépendamment de l'extension accordée au terme analogie, c'est toujours certain qu'une preuve par analogie est inférieure à la démonstration stricte ». C'est pourquoi « le principe d'analogie doit être abandonné, et un autre plus naturel et satisfaisant doit être cherché… » (p. 92).

comme leurs simples représentants pour établir d'eux-mêmes les règles de leurs vérités (c'est en ce sens que les équivalences sont *posées* et non *prouvées*). Certes, ces règles sont l'extension des règles démontrées dans l'Arithmétique en tant que domaine d'objets individuels. Mais si ces règles acceptent d'être étendues, c'est-à-dire posées comme générales, sans besoin d'être prouvées dans des cas particuliers, mais sans atteinte à la vérité ni à la certitude pour autant, alors force sera bien d'accepter que quelque chose de général, et donc d'algébrique, habite déjà au milieu des signes de l'Arithmétique. Ce quelque chose, on l'aura deviné, ce sont les *opérations*, exprimées typiquement par des signes tels que « $\times$ » ou « $+$ ». Comme le dira plus tard Woodhouse, ces « signes de connexion » indiquent, non pas « le calcul arithmétique de quantités », ce qui les rendrait complètement tributaires des objets de l'Arithmétique, mais des pures « opérations algébriques » (1802, p. 86), auxquelles on peut prouver que ces objets sont soumis, mais qui leur sont néanmoins entièrement indépendantes. Plus précisément :

> $x\sqrt{-1} - x\sqrt{-1}$ is put equal 0, not by bringing $x\sqrt{-1}$ under the predicament of quantity, and making it the subject of arithmetical computation, but by giving to $+$ and $-$ their proper signification when used with real quantities, and then they designate reverse operations: […] $\frac{x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ is equal to *x*, not because it is true that a quantity multiplied and divided by the same number remains the same, but because $\frac{x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ means, that *x* is to be combined with $\sqrt{-1}$ after the manner that real quantities are in multiplication, and then divided after the manner that real quantities are in division; and therefore, since the two operations are the reverse of each other, $\frac{x \times \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ and *x* must be equivalent expressions. (Woodhouse, 1801, p. 99)

Voilà le « vrai sens » de ces signes. Non pas addition et soustraction des quantités, pas plus que multiplication et division, mais opérations quelconques liées de manière immédiate entre elles par un rapport d'inversion. Sans doute ce sens se trouve-t-il *vérifié* par des quantités arithmétiques. Mais étant en dernière instance indépendant d'elles, ce sens peut être *posé* comme tel, auquel cas les objets auront à être remplacés par des termes génériques, résultant dans une généralisation par extension de la validité des règles qui définissent son fonctionnement. Par ce moyen, Woodhouse justifie l'introduction du « symbole $\sqrt{-1}$ » dans la pratique et la pensée mathématiques, et avec lui, les droits de cité de l'Algèbre en tant que dimension autonome dans l'espace mathématique, qui pourront être mesurés ensuite, tel qu'on l'a vu, à ceux de la Géométrie[176].

[176] Woodhouse (1801, p. 108): « The other demonstrations examined will appear conducted on the same principle […]: hence, although the symbol $\sqrt{-1}$ be beyond the power of arithmetical computation, the operations in which it is introduced are intelligible, and deserve, if any operations do, the name of reasoning.

Mais cet élargissement du sens des signes de connexion ne saurait pas s'arrêter aux signes des opérations élémentaires. Ainsi, dans le texte de 1802, lorsqu'il en vient à confronter l'Algèbre à la Géométrie, Woodhouse éprouve le besoin d'élargir conséquemment le sens du signe d'égalité « = », à cause des paradoxes apparents liés aux opérations avec les développements en série de certains termes :

> Another cause [of a paradox] I apprehend was, the want of precise notions on the force and signification of the symbol =. It is true that its signification entirely depends on definition; but, if the definition given of it in elementary treatises be adhered to, I believe it will be impossible to shew the justness and legitimacy of most mathematical processes. It scarcely ever denotes numerical equality. In its general and extended meaning, it denotes the result of certain operations. [en note: This is consistent with what I advanced in the Phil. Trans for 1801. p. 99, concerning the meaning of the symbols × + &c.] (Woodhouse, 1802, pp. 102-103)

On voit que cet élargissement est motivé par la recherche d'une cohérence et une homogénéité du plan symbolique général institué par l'Algèbre. En effet, conformément au nouveau sens (opérationnel) attribué aux symboles de connexion des énoncés arithmétiques, le signe d'égalité doit lui aussi recevoir son « vrai sens » : non plus l'égalité numérique qui rapportait des quantités calculables, mais le résultat des opérations nouvellement signifiées par les symboles de connexion. Aussi, Woodhouse revient-il sur cette question dans son *Principles of Analytical Calculation*, où, au lieu d'introduire un nouveau signe, il préfère étendre la signification du symbole « = » pour exprimer « le processus déductif à l'œuvre dans la science analytique » (1803, p. 3), c'est à dire, la connexion entre une expression et son développement en série. Cette indépendance du signe d'égalité par rapport aux quantités arithmétiques habilite notamment l'utilisation et l'opération avec toutes les expressions de séries en général, sans tenir compte de leur convergence. L'indépendance gagnée est si radicale que, même dans le cas où la substitution des lettres par des nombres résulte en une égalité arithmétique, « une telle égalité résulte non pas nécessairement, mais de façon contingente » (1803, p. 14).

Mais on peut voir qu'avec cette extension du sens du signe d'égalité, la première des difficultés annoncées apparaît, menaçant la cohérence sémiotique des mathématiques telle qu'elle résultait des conditions de l'Algèbre naissante. Certes, cette extension offre plus de liberté à la pensée algébrique, en la dispensant de toutes les contraintes liées au calcul effectif

---

[…] The chief purpose of this Paper is fulfilled, if it has appeared that the operations with imaginary symbols possess the evidence and rigour of mathematical demonstration ».

des quantités. Sans doute le nouveau sens confère-t-il plus d' « exactitude logique »[177] à des expressions telles que : « $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots$ », car le signe d'égalité signifie ici la connexion entre des opérations « enveloppées » (*involved*) et des opérations « développées » (*evolved*). D'autre part, un tel sens donné à l'égalité serait à la limite capable de contenir comme l'un de ses cas particuliers des expressions arithmétiques du type « $2 + 4 = 3 + 3$ » ou même « $2 + 4 = 2 \times 3$ », en tant que connexion entre des opérations (enveloppées ou développées, comme on voudra). Mais qu'en est-il des expressions du type « $2 + 4 = 6$ », voire « $3 \times x = 6$ » ? Le nouveau sens du signe d'égalité nous force à penser à un rapport entre des opérations, fût-ce enveloppées, mais quelle opération est donc enveloppée dans « 6 » ? L'asymétrie entre les êtres de l'Algèbre et ceux de l'Arithmétique au niveau de leurs signes, selon laquelle les êtres arithmétiques, c'est-à-dire les nombres, et plus précisément les nombres entiers, sont vus comme des objets individuels devant les opérations algébriques définies par des règles combinatoires, empêche de donner au signe d'égalité un sens consistant dans le contexte de ces expressions. C'est dire que la généralisation du sens du signe d'égalité entre en tension avec l'*asymétrie ontologique* de l'Algèbre et de l'Arithmétique. Bien que Woodhouse, à cause des buts spécifiques de ses recherches, ne semble pas s'être occupé de cette difficulté particulière[178], le rapprochement naturel et progressif de l'Algèbre et de la logique fera éprouver cette difficulté comme une tension toujours plus fondamentale à l'intérieur de la constitution générale d'un système formel.

Si l'on ne veut pas abandonner le processus de symbolisation progressive par lequel l'Algèbre cherche à conquérir sa légitimité et son autonomie mathématiques, le contournement de cette difficulté doit naturellement se confronter à la question de la symbolisation des quantités arithmétiques elles-mêmes. En effet, par cette symbolisation littérale des nombres caractérisant typiquement le travail de l'Algèbre, le plan des signes algébriques serait capable d'acquérir une homogénéité conjurant l'asymétrie ontologique à laquelle finissait par se heurter une symbolisation appuyée uniquement sur les opérations. C'est sur ce deuxième aspect de la généralité symbolique que Babbage mettra l'accent dans son approche des signes mathématiques. Ainsi, dans son texte de 1821, Babbage reprend la question de la distinction de l'Algèbre et de l'Arithmétique. On ne s'étonnera pas si, comme

---

[177] Woodhouse (1803, p. 3): « …it is with this signification of the symbol =, that the deductive processes in works on Analytical science, are to be understood: they are not logically exact, when = is restricted to denote numerical equality. »

[178] Il en reconnaît pourtant une autre, à savoir, la différence entre le sens étendu qu'il attribue au signe « $=$ » et son utilisation dans le contexte d'une définition : « The symbol = has other significations as when we find $\frac{1}{x^2}$ put $= x^{-2}$, $a^0 = 1$, by which forms it is meant, that conformably to certain conventions and processes of calculation the expressions x^{-2}, $\frac{1}{x^2}$, a^0, 1, are alike significant » (Woodhouse, 1803, p. 3, en note).

chez Woodhouse, cette différence s'appuie sur des propriétés de nature essentiellement linguistiques ou sémiotiques. Mais c'est le remplacement des nombres par des signes littéraux qui est alors mis en avant :

> The power which language gives us of generalizing our reasonings concerning individuals by the aid of general terms, is no where more eminent than in the mathematical sciences, nor is it carried to so great an extent in any other part of human knowledge. In the transition from Arithmetic to Algebra, when letters began to be substituted for numbers, the first step consisted rather in the circumstance of the possibility of operating on a quantity determined but unknown. (Babbage, 1826, p. 11)

Les remarques de Babbage à propos de l'Arithmétique sont plutôt brèves dans ce texte, qui s'occupe, pour la plupart, de la différence entre Algèbre et Géométrie. Mais précisément parce que ces remarques ont lieu dans le contexte de cette autre différence, où de plus la question des signes en mathématiques est prise ouvertement comme objet, elles introduisent des nuances significatives à l'égard de la distinction entre Algèbre et Arithmétique en tant que différence de nature sémiotique. Comme il ressort du passage que nous venons de citer, cette différence est celle du général à l'individuel. Or comment distinguer alors cette individualité de l'Arithmétique de celle propre aux signes géométriques ? L'individualité de ces deux disciplines à l'égard de l'Algèbre avait déjà été énoncée par Woodhouse dans ses textes de 1801 et 1802 respectivement. Mais, ces textes s'occupant de problèmes spécifiques et de façon relativement indépendante, l'affirmation de la généralité de l'Algèbre dans les deux cas constituait une conclusion satisfaisante, et la question de l'individualité des deux autres disciplines n'avait pas lieu de se poser. Les réflexions de Babbage forcent en revanche cette confrontation dans l'espace problématique des signes mathématiques en général. Ce qui explique le subtil glissement dans la conception de la Géométrie par rapport à son maître : si l'Algèbre est supérieure à la Géométrie c'est dans la mesure où les raisonnements généraux que les deux véhiculent sont plus adéquats à la nature générale, voire générique, des signes algébriques qu'à celle individuelle des signes géométriques. Ce qui est individuel dans le cas de la Géométrie, ce sont donc les signes, qui fonctionnent par représentation de l'espèce au moyen de l'un de ses individus. Dans l'Arithmétique, en revanche, les raisonnements sont eux-mêmes individuels (des « cas ») dans la mesure où ils sont dépendants des nombres spécifiques sur lesquels portent ses énoncés (toute indépendance gagnée par rapport aux nombres spécifiques faisant presque par définition partie de l'Algèbre). Dans les mots de Babbage :

> …the advantage of employing letters for the known quantities, consists in their similarity to general terms in language, and the consequent extension of the reasoning from an individual case to a numerous species. (Babbage, 1826, p. 12)

De cette manière, la distinction entre les différentes dimensions à l'intérieur des mathématiques – Arithmétique, Géométrie, Algèbre – trouve dans les aspects sémiotiques sa raison générale d'être.

Mais une fois cette distinction ainsi établie, un problème majeur apparaît au niveau de l'Arithmétique. Car si le caractère individuel des signes géométriques est aussi clair que le caractère général des signes algébriques, le statut sémiotique de l'Arithmétique est en revanche fort problématique. Certes, celle-ci s'oppose à l'Algèbre comme l'individuel au général, mais cela uniquement au niveau des raisonnements. Sans doute cette généralisation algébrique des raisonnements est indissociable d'une généralité dans les signes. Mais à bien y regarder, rien n'est dit par là quant à l'Arithmétique *en tant que système de signes*. Ce manque est pourtant beaucoup plus qu'une simple absence. Car l'Arithmétique étant la science du nombre, et chaque nombre étant une entité individuelle, tout se passe comme si, pour Babbage non moins que pour Woodhouse, la présentation de ces nombres s'y faisait de manière directe, sans médiation sémiotique. Au point où dans leurs écrits l'Algèbre se distingue de l'Arithmétique, non seulement comme le général de l'individuel, mais aussi, et de manière indissociable, comme *le sémiotique du non-sémiotique*.

Nous avons vu comment pour Woodhouse la distinction entre l'Algèbre et l'Arithmétique se confondait avec celle de la représentation symbolique par rapport aux objets. C'est ainsi que Woodhouse parle de l'Arithmétique comme le domaine des « objets » et des « choses » constituées par les quantités calculables (*computable*), face au « langage » et aux « signes » de l'Algèbre[179]. L'asymétrie ontologique en est d'ailleurs l'effet direct. Moins explicite, la position de Babbage sur cette question semble à la fois plus complexe, sans être différente sur le fond pour autant. Puisqu'à partir de ses formulations, certaines propriétés sémiotiques de l'Arithmétique pourraient être induites par opposition à celles de l'Algèbre. Ainsi d'une part, l'utilisation des nombres se distingue de celle des lettres en ce que les nombres « transmettent » une multiplicité de « significations » (*signification*) en plus du « sens » (*meaning*) précis et spécifique transmis par les lettres utilisées en Algèbre (1826, p. 19). D'autre part, et sans doute de manière plus remarquable en vue des enjeux qui seront associés aux travaux de Frege, Babbage attribue aux « quantités inconnues dans l'Algèbre » la capacité d'être manipulées « *sans référence* aux valeurs déterminées dont elles prennent la place »[180] (p. 12, nous soulignons), suggérant donc une fonction de *référentialité* inhérente à l'Arithmétique. Cependant, la différence sur laquelle Babbage insiste entre nombre et lettre indique que la distinction entre le sémiotique et le non-sémiotique n'est pas abandonnée, ce

[179] Voir, par exemple, le passage déjà cité dans Woodhouse (1801, p. 90).

[180] *…operated on without reference to the determined values for which they are placed…*

qui se trahit aussi lorsque Babbage oppose le « langage de l'arithmétique » au bien plus général « langage des signes » (p. 12).

C'est pourquoi, dans les formulations de Babbage, l'asymétrie non résolue entre Arithmétique et Algèbre quant à la nature de leurs éléments engendre subrepticement un conflit dans le sens des signes des expressions algébriques, non plus au niveau des signes de connexion, ou d'égalité, mais des lettres ou caractères représentant des termes généraux ou des quantités indéterminées sur lequel Babbage a mis l'accent. Cette difficulté se manifeste lorsque Babbage envisage la généralisation du problème arithmétique exprimé par l'équation $x^2 + 3 = 4x$ au moyen de la « dénotation des quantités connues par des lettres » (1826, p. 11), donnant : $x^2 + a = bx$. Après avoir vanté l'indépendance des processus algébriques gagnée grâce à cette généralisation, Babbage se voit pourtant obligé de faire la remarque suivante :

> It may perhaps be contended that by the assumption of *x* for the number to be found, it was meant to represent number in the abstract, and that such was also the meaning of *a* and *b;* but there exists this difference, that it is not in our power to alter the value of *x*, but we may give to those of *a* and *b* any numerical magnitude we may please. [en note: There is in truth one restriction, namely, that a must always be less than $\frac{b^2}{4}$; but this will be removed when the question is viewed in an algebraical light, and does not in the least affect the argument.] (Babbage, 1826, p. 12)

Grâce à la symbolisation littérale de tous les nombres, une expression comme « $x^2 + a = bx$ » est censée appartenir entièrement au plan homogène des symboles algébriques[181], au point que l'asymétrie ontologique qui menaçait l'algébrisation mise en avant par Woodhouse serait conjurée. Et pourtant, malgré son prétendu degré zéro de sémioticité, quelque chose de l'Arithmétique semble résister lors du passage à un pur langage des symboles. Car même dans le cas où tous les nombres, en tant que quantités déterminées constituant les éléments de l'Arithmétique, auraient été substitués par des lettres dans une expression mathématique, une différence peut encore subsister entre ces lettres, qui rejoue en un certain sens l'asymétrie qui était censée définir la frontière entre l'Arithmétique et l'Algèbre. Seulement, cette asymétrie ne se donne plus comme celle du non-sémiotique au sémiotique ; elle devient interne au sémiotique comme tel. En effet, si tous les termes sont bien exprimés par des lettres, ces

---

[181] Le signe numérique « 2 » en exposant de « *x* » doit en principe être considérée à part, puisqu'il indique moins le nombre 2 qu'une certaine opération réalisée sur le signe « *x* ». Il reviendra à Gregory de réfléchir au statut opérationnel de ce signe (voir *infra* II.1.3.2). Toutefois, les choses ne sont pas si simples, et des propriétés arithmétiques inattendues se cacheront derrière cette utilisation des signes numériques, qui permettront de comprendre la conception singulière de Boole par rapport à la question délicate du statut sémiotique de l'Arithmétique dans le cadre du symbolisme généralisé de l'Algèbre. Nous aborderons cette question dans la partie III.

lettres peuvent néanmoins se distinguer encore par leur *façon de signifier*. Tandis que les termes algébriques (*a* ou *b*) peuvent signifier « n'importe quelle grandeur numérique », ceux qui restent liés à l'expression arithmétique initiale (*x*) sont doués d'une certaine rigidité quant à leur signification (c'est ce que veut dire le fait qu'il ne soit pas en notre pouvoir d'en altérer la valeur…)[182].

Toujours est-il que cette nouvelle asymétrie qu'on pourrait appeler *logique*, dont Babbage se débarrasse un peu trop rapidement, n'est pas prise en charge en tant que telle dans le cadre des réflexions des algébristes anglais, puisqu'aucune marque n'est spécialement prévue pour distinguer les caractères doués d'une rigidité propre à l' « arithmétique » des termes « algébriques ». Tout comme dans le cas du signe d'égalité, cette situation exigera, lorsque l'ensemble des propriétés sémiotiques des mathématiques sera appelé à supporter le poids de la pensée logique, soit une homogénéisation au niveau de la nature sémiotique (ou sémiologique) des variables, auquel cas la nature des éléments arithmétiques devra être revue ; soit une prise en charge explicite au niveau des signes de cette différence, auquel cas la nature sémiotique des termes algébriques aura à être spécifiée.

II.1.3. La consolidation de l'Algèbre abstraite

II.1.3.1. Peacock : L'Algèbre symbolique

À la suite de cette démarcation de l'Algèbre par rapport à l'Arithmétique, les symboles composant les expressions algébriques se trouvent repensés dans leur ensemble : symboles d'opérations, symboles de connexion, lettres, signe d'égalité… Cette réévaluation complète de la nature sémiotique des symboles mathématiques constitue la condition fondamentale de la naissance de l'Algèbre comme discipline mathématique autonome. Elle n'est pourtant pas entièrement suffisante. Ce qui manque encore, c'est l'établissement d'un principe général capable de rassembler toutes ces nouvelles déterminations sémiotiques sur un seul plan cohérent. Ce sera l'apport de George Peacock. Dès les premières pages de son célèbre « Report on the Recent Progress and Present State of certain Branches of Analysis » de 1833, Peacock affirme que l'examen précis et logique des premiers principes de l'Algèbre, qui l'assurent de sa complétude en tant que science indépendante, est demeuré remarquablement

[182] C'est d'ailleurs à ce moment que Babbage parle des termes algébriques comme ne faisant pas « référence » à des valeurs déterminées (1826, p. 12).

négligé, l'attention demeurant concentrée sur ses applications. Parmi les causes de cette négligence, Peacock mentionne

> …the peculiar relation which the first principles of algebra, in common with those of other sciences of strict demonstration, bear to the great mass of facts and reasonings of which those sciences are composed. (Peacock, 1833, p. 186)

De cette manière, Peacock affirme lui aussi, à la suite de ses prédécesseurs et collègues, la proximité de principe entre l'Algèbre et la logique en tant que science du raisonnement rigoureux. Mais étant donné que ces premiers principes qui rapprochent l'Algèbre des sciences déductives se voient constamment escamotés par ses applications, on comprend que l'attention se tourne aussitôt vers le rapport que l'Algèbre maintient avec l'Arithmétique. Car si la nature de chaque type de symbole faisant partie de l'Algèbre a bien été repensée à chaque fois, il ne reste pas moins qu'elle l'a été à partir du fonctionnement des expressions arithmétiques. Certes, chaque nouvelle compréhension proposée avait comme but explicite de se démarquer de l'application ou interprétation arithmétique, mais le principe privilégié de *généralisation* selon lequel cette démarcation avait lieu non seulement réaffirmait le lien qu'il prétendait rompre, mais plus profondément, comme nous venons de le voir, il introduisait à l'intérieur des expressions généralisées de l'Algèbre des difficultés qui continuaient à exiger une clarification de ses relations avec l'Arithmétique.

Aussi, la recherche d'un principe général entraîna Peacock à revenir sur ce rapport entre Arithmétique et Algèbre, et à proposer une solution radicale : *l'Algèbre n'est pas le résultat de la généralisation de l'Arithmétique, mais une science abstraite autonome, maintenant avec la généralisation de l'Arithmétique des rapports étroits mais à définir*. On voit que de cette façon Peacock coupe les liens directs entre les deux domaines, puisque l'Algèbre ne se rapporte plus directement à l'Arithmétique, mais uniquement à la version généralisée qui en résulte de par l'utilisation du langage symbolique (cf. 1833, pp. 188-189). Sorte de troisième terme qui vient articuler le décalage sémiotique entre les deux disciplines, la généralisation de l'Arithmétique garde de celle-ci le sens (*meaning*) de ses opérations fondamentales, tout en se plaçant à un niveau symbolique qui la rapproche de l'Algèbre pure. Cette place charnière se trahit déjà dans le nom, « Algèbre arithmétique », que Peacock choisit pour la désigner, afin, aussi, de la distinguer de la nature purement « symbolique » de l'Algèbre en tant que telle. Voici la façon dont Peacock établit cette distinction :

> There are, in fact, two distinct sciences, *arithmetical* and *symbolical algebra,* which are closely connected with each other, though the existence of one does not necessarily determine the existence of the other. The first of these sciences would be, properly speaking, *universal arithmetic*: its general symbols would represent numbers only; its fundamental operations, and the signs used to denote them, would have the same meaning as in common

arithmetic; […] it is this species of algebra which alone can be legitimately founded upon arithmetic as its basis. (Peacock, 1833, p. 189)

Si bien que l'Algèbre ne se mesure pas à l'Arithmétique mais à une autre Algèbre, dont elle se distingue par le sens des signes. Par cette médiation de l'Algèbre arithmétique, Peacock conjure le risque de court-circuit entre l'Algèbre et l'Arithmétique que la généralisation du signe d'égalité de Woodhouse engendrait sous la forme d'une asymétrie ontologique. Car la généralisation, en tant que « montée des particuliers aux généraux » (1833, p. 194, note), n'a lieu qu'entre l'Arithmétique et l'Algèbre arithmétique. Un tel processus est cependant incapable de rendre compte du rapport entre le type de termes généraux de l'Algèbre arithmétique et ceux de l'Algèbre symbolique, c'est-à-dire, du « processus de l'esprit [*mind*] par lequel nous passons du sens [*meaning*] de $a - b$, lorsque a est plus grand que b, à son sens lorsque a est plus petit que b » (1833, p. 194). On voit donc comment Peacock concentre ainsi le problème fondamental de l'Algèbre pure, en fonction duquel elle doit être pensée et définie, sur cette différence entre « a » et « a » en tant que termes généraux de nature hétérogène, qui déterminait l'asymétrie à laquelle Babbage s'était déjà heurté dans ses recherches. La distinction dans la nature des symboles littéraux devient par là le critère même qui permet de distinguer l'arithmétique de l'algébrique, comme le fait voir Peacock au moyen d'un exemple où la différence dans la nature ces symboles se laisse capturer dans le contexte d'une même expression :

> Some formulae are essentially arithmetical: of this kind is 1 . 2 . 3… *r*, in which *r* must be a whole number. The formula $\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1\,.\,2\ldots r}$ is symbolical with respect to *m*, but arithmetical with respect to *r*. (Peacock, 1833, p. 201, note)

Mais comment caractériser cette différence ou hétérogénéité, une fois dit qu'elle ne peut être considérée sous la forme de la généralisation que par un abus du langage (1833, p. 194) ? La réponse de Peacock apparaît comme une explicitation des idées tacites de Babbage. Étant donné que l'Arithmétique est « la science du calcul, comprenant toutes les sciences qui sont réductibles à la mesure et au nombre », l'Algèbre arithmétique peut alors être caractérisée comme

> …the immediate form which arithmetic takes when its digits are replaced by symbols and when the fundamental operations of arithmetic are applied to them, *those symbols being general in form, though specific in value*. (Peacock, 1833, p. 200)

Dès lors, il est facile d'établir la « distinction réelle » entre cette dernière et l'Algèbre symbolique, en remarquant que

> …the symbols in symbolical algebra are perfectly general and unlimited both in value and representation, and that the operations to which they are subject are equally general likewise. (Peacock, 1833, p. 195)

De ce fait, l'Algèbre arithmétique se caractérise par une restriction du sens de ses signes à celui déterminé par le domaine de l' « Arithmétique commune », qui se trouve ainsi posé comme concret et sert dès lors de fondement à la première. L'Algèbre symbolique, en revanche, n'admet pas une telle restriction. Par exemple, ce qui dans un cas apparaît comme des quantités impossibles, du fait de l'impossibilité de leur attribuer un sens arithmétique, constitue dans l'autre de simples quantités négatives (1833, p. 194). Mais ce qui importe avant tout, c'est que ce passage des valeurs spécifiques aux valeurs générales des termes généraux exige beaucoup plus qu'un simple processus de généralisation, elle exige *un changement du principe même suivant lequel le sens des signes est déterminé*. En effet, si dans l'Algèbre arithmétique le sens des termes généraux, ainsi que des signes d'opération, continue à être déterminé par les valeurs arithmétiques spécifiques qu'ils sont susceptibles de prendre, le sens des termes et des opérations de l'Algèbre symbolique, en revanche, est défini au seul moyen de règles de combinaison purement *arbitraires*, c'est-à-dire, entièrement indépendantes des valeurs spécifiques auxquelles ils pourraient faire référence[183]. Si bien que la différence entre le terme « *x* » et les termes « *a* » ou « *b* » dans l'exemple de Babbage, ou entre « *r* » et « *m* » dans celui de Peacock, n'est pas à proprement parler une différence entre les sens de chacun d'eux (l'un étant particulier, l'autre général), mais plus profondément entre deux façons de signifier, c'est-à-dire entre deux manières dont le sens de chacun de ces signes est déterminé. Aussi, Peacock introduit-il deux noms ou concepts pour saisir cette différence des principes sémiotiques à l'œuvre dans la pratique mathématique, qui seront destinés à prendre une place décisive lorsque logique, mathématiques et sémiotique conflueront dans la constitution d'un espace commun. Ces concepts sont ceux de *définition* et d'*interprétation* :

> To *define*, is to assign beforehand the meaning or conditions of a term or operation; to *interpret*, is to determine the meaning of a term or operation conformably to definitions or to conditions previously given or assigned. It is for this reason, that we *define* operations in arithmetic and arithmetical algebra conformably to their popular meaning, and we *interpret* them in symbolical algebra conformably to the symbolical conditions to which they are subject. (Peacock, 1833, p. 197)

[183] Peacock (1833, p. 199) : « the laws of combination of symbols […] have no reference to the specific values of the symbols ». Sans faire de la notion de « référence » un concept systématique, Peacock caractérise à plusieurs reprises les symboles de l'Algèbre symbolique comme des signes sans référence. Voir par exemple Peacock (1833, pp. 200, 222, 230, 236). Le mot « dénotation » est aussi employé souvent dans le même sens. Ainsi dans Peacock (1833, pp. 193 note, 196, 198, 200, 201, etc.).

Si bien que le sens d’un signe mathématique peut être, soit *interprété* en fonction du domaine concret d’objets auxquels il fait référence (l’Arithmétique, en l’occurrence), soit *défini* en fonction du rapport qu’il entretient avec d’autres signes (c’est-à-dire, des règles de combinaison). Ou plus précisément, étant donné une sorte de perpendicularité entre les deux principes de déterminations (l’interprétation fonctionnant en verticalité face à l’horizontalité de la définition, si l’on peut dire), le sens d’un signe peut se trouver à la fois interprété et défini. La distinction fondamentale ne passe donc pas entre l’un ou l’autre de ces deux principes, mais entre les dépendances respectives : un signe sera arithmétique lorsqu’il sera défini en fonction de son interprétation ; il sera algébrique lorsqu’il sera interprété en fonction de sa définition. L’Algèbre symbolique peut alors être conçue comme la « science des symboles et de leur combinaisons, construite à partir de ses propres règles, qui peuvent être appliquées à l’arithmétique et à toutes les autres sciences par interprétation » (1833, pp. 194-195).

Avec cette définition, l’Algèbre trouve également sa tâche propre, à savoir l’établissement de règles de combinaison entre des symboles. Et sans doute l’interprétation des définitions résultantes est-elle « l’un des processus déductifs les plus importants et les plus essentiels qui soit requis en algèbre et ses applications » (p. 198). Mais les définitions de l’Algèbre étant par principe entièrement indépendantes de toute interprétation, au point où il pourrait se trouver qu’elles n’aient pas d’interprétation du tout, le problème majeur de l’Algèbre en tant que nouvelle science est celui de savoir selon quels critères elle doit se régler pour établir arbitrairement ses propres règles. C’est alors que Peacock reconstitue le lien entre l’Algèbre et l’Arithmétique qu’il avait réussi à défaire. Car si la science de l’Arithmétique, ou plus précisément de l’Algèbre arithmétique, ne peut pas se constituer en fondement de l’Algèbre, elle peut néanmoins lui servir de guide en lui suggérant ses principes ou lois de combinaison. Et cela dans la mesure où, d’après Peacock, le caractère arbitraire de l’Algèbre concerne uniquement le fondement, mais non pas les applications, car *l’Algèbre symbolique doit pouvoir inclure l’Algèbre arithmétique* (p. 195). Dès lors, un critère général pour l’établissement des règles algébriques peut être induit. Étant donné que ces règles s’énoncent sous la forme d’équivalences entre des expressions symboliques (ou « formes », comme Peacock les appelle), telles que $a(b-c)=ab-ac$, il sera requis que ces règles à fondement arbitraire et interprétation indéterminée soient pourtant vraies lorsque des valeurs numériques spécifiques seraient susceptibles d’occuper la place de leurs symboles. Autrement dit, les équivalences algébriques devront être vraies lorsqu’une interprétation arithmétique (ou d’autre « science de suggestion ») serait possible. Ce *principe de permanence des formes équivalentes* est donc celui que Peacock énonce comme étant « le véritable fondement de toutes les règles de l’algèbre symbolique » (p. 198).

En regardant l'ensemble de ce processus, on peut voir que l'autonomie gagnée par l'Algèbre, tant de fondement que de principe, suppose *un abandon du problème du statut sémiotique du nombre*. Au niveau du fondement d'abord, car si le nombre est bien le fondement de l'Algèbre arithmétique, rien ne le rapporte directement à l'Algèbre lorsqu'elle devient purement symbolique, parce qu'elle détermine d'elle-même ses propres règles. Au niveau des principes ensuite, puisque l'Algèbre symbolique ne reconnait des limitations pour le fonctionnement de ses signes que de la part d'expressions arithmétiques où les nombres, en tant que valeurs spécifiques, ont été remplacés par des termes généraux censés les représenter. Cette expulsion du nombre hors de l'espace sémiotique des mathématiques n'est sans doute pas contingente : elle fait entièrement partie du mouvement par lequel l'Algèbre pure se constitue comme science indépendante, assumant la question de la différence de nature des symboles littéraux, ou asymétrie logique, rencontrée fugacement par Babbage, et offrant, au moyen du principe de permanence des formes équivalentes, une solution au problème du sens du signe d'égalité, ou asymétrie ontologique, soulevé par les formulations de Woodhouse.

II.1.3.2. Gregory : La véritable nature de l'Algèbre symbolique

Cependant, un dernier pas reste à accomplir pour que l'Algèbre coupe définitivement tout lien de principe avec l'Arithmétique. Car si Peacock fournit des fondements et des principes revenant en propre à l'Algèbre, celle-ci ne reste pas moins obligée de s'accorder selon ces mêmes principes avec les résultats de l'Arithmétique lorsque ses symboles peuvent être interprétés en ce sens. Le mathématicien et ami proche de Boole, Duncan Gregory, fera sauter ce dernier verrou. Comme l'indique Hailperin (2004, p. 345), avec les formulations de Gregory dans son court article de 1838 intitulé « On the Real Nature of Symbolical Algebra », l'Algèbre acquiert un visage où nous pouvons reconnaitre l'Algèbre abstraite de nos jours.

Dans ces pages, Gregory définit l'Algèbre symbolique comme

> …the science which treats of the combination of operations defined not by their nature, that is, by what they are or what they do, but by the laws of combination to which they are subject. (Gregory, 1838/1865, p. 2)

Cette définition se trouve dans la continuité de la voie ouverte par Peacock, qui est d'ailleurs mentionné aussitôt. Mais l'allusion directe à l'Arithmétique a été remplacée par l'affirmation ouverte de l'indépendance des opérations par rapport à leur nature (arithmétique ou autre). Le poids entier de l'Algèbre tombe ainsi du côté des lois de combinaison. Au cas où cette définition ne suffisait pas à exprimer la césure que Gregory cherche à accomplir, il ajoute :

> It is true that these laws have been in many cases suggested (as Mr. Peacock has aptly termed it) by the laws of the known operations of number; but the step which is taken from arithmetical to symbolical algebra is, that, leaving out of view the nature of the operations which the symbols we use represent, we suppose the existence of classes of unknown operations subject to the same laws. (Gregory, 1838/1865, p. 2)

Autrement dit, le principe de permanence des formes équivalentes doit être abandonné, et laisser la place aux seules relations entre des classes d'opérations. C'est dire que le critère qui guidera le pouvoir d'établir des règles arbitraires de combinaison ne repose plus sur les vérités arithmétiques, mais sur la capacité d'ordonner les opérations en classes. Ainsi, par exemple, étant données deux opérations F et f, l'établissement des règles opératoires suivantes :

$$1)\ FF(a) = F(a)$$
$$2)\ ff(a) = F(a)$$
$$3)\ Ff(a) = f(a)$$
$$4)\ fF(a) = f(a)$$

détermine une classe, que Gregory appelle « circulante » ou « reproductive », sous laquelle tombent, entre autres, les signes « $+$ » et « $-$ » en Arithmétique, ainsi que la translation d'un point le long d'une circonférence ou d'une demi-circonférence en Géométrie. Gregory remarque qu'il ne s'agit nullement d'analogie entre ces cas tombant dans la même classe, précisément parce que le rapport qui existe entre eux est indépendant de la « nature » des opérations considérées et ne relève que « du fait d'être combinées selon les mêmes lois » (1838/1865, pp. 3-4). D'autres classes peuvent être définies de la même façon. Ainsi, la classe des indices numériques, définie par les lois suivantes :

$$1)\ f_m(a) \cdot f_n(a) = f_{m+n}(a)$$
$$2)\ f_m(a) f_n(a) = f_{mn}(a)$$

et plus décisivement encore, celle déterminée par les lois :

$$1)\ f(a) + f(b) = f(a + b)$$
$$2)\ f_{,}f(a) = ff_{,}(a),$$

qui inclut, selon Gregory, les opérations les plus importantes des mathématiques (numériques, différentielles, géométriques…). Notamment, c'est aux lois de cette classe qu'est soumise la « méthode de séparation des symboles », c'est-à-dire, le calcul d'opérations grâce auquel ont pu être établis les théorèmes de Lagrange ou de Leibniz. Aussi, Gregory nomme les opérations de cette classe d'après les noms déjà utilisés par Servois, à savoir « distributives » et « commutatives » (pp. 6-7).

C'est donc l'ensemble ouvert de ces règles qui seul détermine les principes de l'Algèbre, et ce n'est que dans la soumission à ces règles que réside le fondement de leur vérité, car comme l'affirme Gregory :

> …as many different kinds of operations may be included in a class defined in the manner I have mentioned, whatever can be proved of the class generally, is necessarily true of all the operations included under it. (Gregory, 1838/1865, p. 2).

L'Algèbre apparaît dès lors comme cette dimension où le sens des signes est déterminé exclusivement par des lois combinatoires arbitraires – si par arbitraire on veut dire : sans aucune relation substantielle avec les contenus représentés par les signes en question –, et doués d'une consistance et d'une organisation propres. Si, depuis les travaux de Woodhouse, telle avait toujours été l'essence à la fois cherchée et attribuée à l'Algèbre, avec les formulations de Gregory cette dimension spécifique du sens des signes capable de supporter des propriétés mathématiques est non seulement acquise, mais elle l'est d'une façon qui la rend *suffisante*.

La preuve de cette suffisance est que Gregory ne sent plus le besoin d'assumer les effets d'une asymétrie logique au niveau des symboles rencontrée par Babbage et élaborée par Peacock, qui hantait le système expressif de l'Algèbre. En effet, dans un texte appartenant à la même époque que celui que nous venons de considérer, et portant sur la solution des équations différentielles linéaires à partir de la méthode de séparation des signes d'opérations de ceux de quantité, Gregory soutient :

> We have spoken as if there were a distinction between what are usually called symbols of operation, and those which are called symbols of quantity. But we might with perfect propriety call these last also symbols of operation. For instance, x is the operation designated by (x) performed on unity, x^n is the same operation performed *n* times in succession on unity, $a + x$ is the operation $(a + x)$ performed on unity, $(a + x)^n$ is the operation $(a + x)$ performed *n* times in succession on unity. […] x^n is to be distinguished from nx, which represents that *n* of the operations (x) on unity are taken simultaneously. In the same way as $a(1)$ represents the operation (a) performed on (1), $a(x)$ would represent the same operation performed on *x*, and $a^n(x)$ would represent the operation repeated *n* times on (x). These operations are usually written ax, $a^n x$. (Gregory, 1838/1865, p. 24)

Ainsi, de la même façon que la méthode de séparation extrayait de l'expression $\frac{dy}{dx}$ le symbole d'opération $\frac{d}{dx}$ pour l'appliquer au signe de quantité y et former $\frac{d}{dx}(y)$, selon le modèle de l'obtention de $y(1 + a)$ à partir de $(y + ay)$, on peut considérer que l'on extrait y de y pour former $y(1)$. Dès lors y n'est pas moins un symbole d'opération que $\frac{d}{dx}$. Ce qui ne revient pas cependant à effacer toute différence entre types de symboles ou de variables. En effet, dans l'expression ($\frac{d}{dx} - a$), les deux symboles $\frac{d}{dx}$ et a possèdent un sens différent, ce qui induit par ailleurs une distinction entre le signe a et le signe x, comme l'atteste la disparité des conséquences opératoires qui existe entre ($\frac{d}{dx} - a$) et ($\frac{d}{dx} - x$)[184]. Cette différence ne tient pourtant qu'aux lois combinatoires auxquelles ces signes obéissent, déterminant leur appartenance à de classes diverses[185]. Ce qui veut dire que la distinction entre des types de symboles génériques exprimés par des lettres *ne correspond plus à une distinction entre des régimes de signification hétérogènes* : *tout symbole générique, c'est-à-dire tout* « *caractère* », *est de nature algébrique.*

Mais si les symboles caractéristiques ou littéraux sont aussi des signes d'opération, alors la distinction entre les symboles littéraux et les symboles typiquement opératoires, tels que « $+$ » ou « $\times$ », n'a pas non plus raison d'exister. D'autant plus que ces signes risquent de continuer à introduire des contenus arithmétiques dans des expressions qui se veulent purement algébriques. En effet, si ces « signes de connexion » étaient pour Woodhouse ce qu'il y avait déjà de général au milieu des éléments singuliers de l'Arithmétique, une fois ces singularités écartées par l'utilisation des symboles littéraux en Algèbre arithmétique, les signes de connexion continuent à véhiculer le sens proprement arithmétique qu'ils comportaient dans leur contexte original. C'est pour relativiser ce sens que Peacock avait introduit la distinction entre Algèbre arithmétique et Algèbre symbolique. Relativisé, ce sens n'était pas entièrement libéré pour autant, puisque par le principe de permanence des formes équivalentes, il était appelé à coïncider avec le sens arithmétique lorsqu'une interprétation arithmétique était possible. Mais si leur sens veut être rendu purement algébrique, il n'y a plus lieu de distinguer ces signes des symboles opératoires littéraux. C'est précisément ce que Gregory soutiendra dans un article de 1843 intitulé « On a Difficulty in the Theory of Algebra ». Dans ces quelques pages, Gregory commence par énoncer ce qu'il faut entendre par symbole *algébrique* :

> …a symbol is defined *algebraically* when its laws of combination are given; and […] a symbol represents a given operation when the laws of combination of the latter are the same as those of the former. (Gregory, 1843/1865, p. 236)

Cette définition reprend les termes de celle de Peacock, et d'ailleurs Gregory s'empresse d'ajouter que ces affirmations dépendent de l'existence d'une Algèbre

---

[184] Comme l'indique Gregory, dans le second cas les deux symboles sont liés de telle sorte que la commutativité entre les deux n'est pas valable : $x\left(\frac{d}{dx}(z)\right)$ n'est pas égal à $\frac{d}{dx}\big(x(z)\big)$. Voir Gregory (1838/1865, pp. 26-27).

[185] Ce qui de surcroit, comme l'exemple le laisse voir, ne dépend pas uniquement du signe lui-même mais de la structure entière de l'expression.

symbolique, différente de l'Algèbre arithmétique. Notamment, la définition de Gregory reprend de Peacock les termes de *définition* et de *représentation* (un signe représentant l'objet ou l'opération selon lequel il est *interprété*). Mais, à la différence de Peacock, Gregory cherchera à montrer que les signes « $+$ » et « $-$ » ne représentent pas les opérations arithmétiques d'addition et de soustraction. Car lorsqu'ils représentent une opération par eux-mêmes en affectant d'autres symboles en tant qu' « individualités algébriques » (comme dans « $-a$ », « $+b$ » ou « $+-a$ », par exemple), ils sont soumis à des lois circulantes. Or ces lois n'appartiennent pas à l'opération d'addition exprimée par « $a+b$ ». Cette dernière expression doit en fait être comprise comme une opération portant sur a, en l'occurrence l'opération d'ajouter b à a. En tant que telle, l'addition (non moins que l'opération inverse de soustraction) peut être symbolisée, à l'instar de la manière typique d'écrire les opérations dans le calcul d'opérations, à l'aide d'un terme générique préfixant celui sur lequel il porte, par exemple « $A_b(a)$ », où l'index b correspond à la quantité à être additionnée (ou soustraite). De l'examen des lois auxquelles le symbole « A_x » est soumis ressort de manière précise la divergence entre lui, en tant que représentant de l'addition, et le symbole « $+$ ». Gregory conclut que dans l'expression « $a+b$ », le symbole « $+$ » ne fait, au mieux, qu'*indiquer* l'opération d'addition, sans nullement la représenter. Tout comme le signe « $\times$ » pour la multiplication d'ailleurs, dont l'omission fréquente, lorsque l'on exprime la multiplication de a par b au simple moyen de « ab », est exposé par Gregory comme un argument décisif[186]. Mais l'on ne peut pas considérer le signe « $+$ » comme indiquant l'opération d'addition indépendamment des lois combinatoires auxquelles il est soumis, sans vouloir du même coup réduire l'Algèbre à l'Arithmétique (1843/1865, p. 283). Aussi, Gregory conclut-il à l'identité de nature entre les signes de connexion ou « d'affection » et les termes généraux symbolisés par des lettres :

> [The symbols $+$ and $-$] are generally considered to be absolutely distinct from literal symbols, and have in consequence a different name assigned to them, being called "signs of affection." Such a distinction exists in arithmetical, but not in general Algebra. […] When we write the symbol a in Arithmetical Algebra, we mean that we may substitute for it any number we choose; but when we write $a+b$, we say that b is added to a, we attach to $+$ a definite meaning, and we can give no other interpretation to it, without taking into consideration its laws of combination, which are excluded from Arithmetical Algebra. On the other hand, in Symbolical Algebra, where every symbol represents an operation, it is

[186] Gregory (1843/1865, p. 242) : « …it is merely a matter of accident that the symbol $\times$ was that which was expunged: that fate might as well have befallen the symbol $+$, and then ax would have signified the addition of a to x »

> obvious that we cannot *a priori* speak of any difference in kind between different symbols. In such a science what is a, and what is $+$? To neither are definite meanings attached, as to the latter symbol in Arithmetical Algebra. (Gregory, 1843/1865, p. 241)

De cette manière, Gregory démantèle pièce par pièce l'ensemble de distinctions et d'articulations sémiotiques qui furent nécessaires pour détacher de l'Arithmétique un domaine où le fonctionnement des signes, déterminé de manière essentielle par des lois de combinaison, devient capable de se constituer en discipline mathématique à part entière. Cet effacement des distinctions (entre des types de symboles littéraux d'abord, entre des symboles littéraux et des signes de connexion ensuite), n'est pas la marque d'un échec ou la reconnaissance d'une erreur. Bien au contraire, il n'est que l'expression ultime d'une réussite. Gregory n'est pas en train de revenir sur le pas de Woodhouse ou de Babbage, mais d'accomplir leur tâche. Car si l'établissement des distinctions entre des régimes hétérogènes de signification à l'intérieur d'une expression mathématique, et notamment arithmétique, de la part des premiers algébristes anglais, avait pour but d'avérer l'existence d'une dimension algébrique autonome, la possibilité de leur effacement se fait au nom de cette dimension même, indiquant que ce domaine est non seulement autonome, mais aussi autosuffisant, voire total : le sens de tout symbole ou signe caractéristique peut et doit dès lors être compris et déterminé par les règles suivant lesquelles il accepte d'être combiné. C'est là tout leur être. Du moins en tant que signes *mathématiques*. Et dans la mesure où c'est dans ces signes que se laissent exprimer analytiquement les propriétés géométriques traditionnellement véhiculées par des signes d'un autre type (graphique, figural ou diagrammatique), l'Algèbre peut même aspirer à dominer l'ensemble de l'espace mathématique en tant qu'espace ultimement déterminé par la nature et le fonctionnement des signes.

II.1.3.3. La sémiotisation générale de l'espace des mathématiques

Le parcours qui mène des premières distinctions trouvées au niveau des expressions mathématiques jusqu'à leur effacement n'aura donc pas été inutile. Mais ses conséquences ne s'épuisent pas dans l'émergence et la consolidation de l'Algèbre abstraite. Même si les distinctions sémiotiques dégagées dans le cours de ce processus peuvent finalement disparaître, de nouveaux principes n'en furent pas moins découverts et établis, venant informer une pensée du signe. À commencer par la requalification de la géographie des mathématiques en fonction de la nature des signes sur lesquels portent les pratiques qui définissent les disciplines. Ainsi, la Géométrie se trouve définie comme une discipline portant sur des propriétés générales et s'appuyant sur des significations particulières ; l'Arithmétique porte sur des propriétés singulières à travers des éléments singuliers à la limite de la signification ; l'Algèbre enfin, porte sur des propriétés générales au moyen des significations tout aussi générales. Il ne s'agit pas là d'une simple catégorisation, mais d'une véritable dynamique par laquelle les contenus d'un domaine se voient repris par un autre, selon des processus de réinvestissement sémiotique très précis, déterminant des règles de passage ainsi que des limites et des frontières. Non pas que cette circulation des sens mathématiques à travers les différents domaines ait été le résultat direct du processus de sémiotisation. Mais c'est par ce regard sémiotique porté sur l'ensemble des mathématiques que ces processus sont devenus susceptibles d'une intelligibilité globale nouvelle, en fonction de laquelle l'espace des mathématiques peut être nouvellement partagé en régions nettement distinctes mais suivant un principe unifié. De ce point de vue, la sémiotisation générale de l'espace mathématique est loin d'avoir été entièrement inefficace.

Qui plus est, cette sémiotisation a forcé l'émergence de tout un réseau de concepts sémiologiques (c'est-à-dire, portant sur des propriétés sémiotiques), constituant ce qu'il faut comprendre comme *une véritable proto-théorie du sens*. En effet, avec les premiers travaux des algébristes anglais, on a vu apparaître des notions portant sur le fonctionnement même des signes, telles que naturel et arbitraire, particulier et général, ressemblance, similarité, notation, signification, sens, expression, référence, dénotation, généralisation, abstraction, traduction, symétrie, définition, interprétation, représentation, indication… Le point surprenant est que, forcés de s'occuper de la nature de la signification, les algébristes anglais n'aient pas eu le réflexe d'aller la chercher ailleurs que dans les mathématiques. De fait, il est presque impossible de trouver, dans cette période de naissance de l'Algèbre abstraite, des références philosophiques, philologiques, grammaticales ou autres qui viendraient à l'appui des réflexions sémiotiques qui s'imposent presque à chaque moment de développement formel et de création conceptuelle dans les recherches de ces auteurs[187]. À la place, on trouve des noms de mathématiciens comme ceux de Lagrange, Cauchy ou Servois. Mais ce qui à première vue pourrait être considéré comme une faiblesse ou même un manque de perspective, constitue en réalité la plus grande originalité et la force de la théorie du sens (et de la logique qui lui est

[187] Parmi les très rares références spécifiquement liées à la question du langage et des signes, nous pouvons mentionner celle de Babbage (1826, pp. 5-6) à Joseph-Marie de Gérando, auteur, entre autres, d'un long ouvrage en quatre volumes sous le titre *Des Signes et de l'art de Penser*, et d'un essai appelé *De l'influence des signes sur la génération des idées*, dont Babbage aurait pu s'inspirer pour le titre de son opuscule. À la même époque, bien que dans le contexte de ses recherches historiques sur l'Arithmétique où la question de l'Algèbre symbolique ne se posait pas encore, Peacock fera référence aux différents travaux de Humboldt concernant l'étude des langues et des sociétés (cf. 1826/1849, pp. 372-373, 379, 386, 388-390, 481).

associée) qui se devine et s'annonce à travers les réflexions de cette génération de mathématiciens. Surtout si on la compare à celle qui, par exemple, de l'autre côté de la Manche, forçait, dans les formulations de Hegel, le Calcul différentiel à répondre aux exigences externes et un peu grossières d'une dialectique lestée du lourd poids de la métaphysique.

Certes, aucune des notions essayées ou proposées par les algébristes n'est véritablement nouvelle ; elles appartenaient bien sûr au langage courant et au sens commun, et dans certains cas aussi elles comportaient également un sens plus technique dans le cadre d'autres savoirs. Mais ce qui est nouveau, c'est leur apparition massive dans le contexte du savoir mathématique, et pour des besoins strictement liés à ce contexte. En effet, l'utilisation de ces différentes notions de la part de chacun des mathématiciens de Cambridge se fait à chaque fois sous la contrainte d'un problème spécifique, et afin d'y apporter une solution précise. L'utilisation de ces termes est sans doute intuitive et guère systématique dans les premiers écrits, mais l'insistance des problèmes et l'apparition progressive d'une solution ont fini par stabiliser leur usage et leur sens, opérer des choix parmi eux et organiser les rapports respectifs entre ce nœud de notions. Ainsi pour les notions de *définition* et d'*interprétation* chez Peacock, et leur prolongement dans celles de *représentation* et d'*indication* chez Gregory.

À ces dernières il faudrait sans doute ajouter celles qui se dégagent des travaux de De Morgan. En effet, dans une série de textes lus devant la Société Philosophique de Cambridge entre 1839 et 1844, portant sur les fondements de l'Algèbre, De Morgan s'occupe des aspects sémiotiques propres à la méthode algébrique, de telle sorte qu'il étend le couple des concepts proposés par Peacock, en distinguant l'*interprétation* de l'*explication* :

> …a symbol is *defined* when such rules are laid down for its use as will enable us to accept or reject any proposed transformation of it, or by means of it. A simple symbol is *explained* when such a meaning is given to it as will enable us to accept or reject the application of its definition, as a consequence of that meaning: and a compound symbol is interpreted, when, having occurred as a result of explained elements, used under prescribed definitions, a necessary meaning can be given to it… (De Morgan, 1842, p. 338)

Autrement dit, la notion d'interprétation que Peacock distinguait de la définition pure pour faire de celle-ci le travail propre de l'Algèbre, se divise à son tour en *explication* et *interprétation*, indiquant une nouvelle différence dans l'attribution de sens aux signes : attribution indirecte ou directe selon que le signe soit ou non le résultat de l'une des opérations algébriques habilitées par définition. Certes, Babbage avait décrit le processus d'attribution de sens aux signes algébriques en trois étapes où le problème de l'interprétation dans le sens que De Morgan essaie de lui donner se posait déjà (1826, p. 22 et sqq). Et

Peacock avait déjà souligné que la recherche autour des interprétations possibles des symboles algébriques était l'un des plus importants processus de l'Algèbre (cf. 1833, p. 198). Mais si, ce faisant, Peacock arrivait à construire des concepts pour les problèmes d'ordre strictement sémiotiques rencontrés par Babbage, il ne le faisait que pour concevoir les signes arithmétiques comme des signes interprétés et les écarter de l'Algèbre véritable, faisant ainsi de l'interprétation, un problème secondaire par rapport à la définition à partir des seules règles combinatoires. L'accent mis sur la notion d'interprétation par De Morgan montre, par les spécificités qu'il y introduit au moyen de celle d'explication, qu'elle n'a plus à voir avec l'Arithmétique de manière essentielle, et qu'elle constitue une tâche propre à l'Algèbre, aussi importante que la définition des lois opératoires. À tel point que cette nouvelle distribution des tâches sémiotiques devient l'occasion d'identifier un nouveau domaine à l'intérieur de l'Algèbre : à côté de l'Algèbre symbolique (que De Morgan décide d'appeler Algèbre « technique ») il faut en reconnaître une autre définie par ces mécanismes concurrents de détermination du sens, à savoir l'*Algèbre logique* :

> Algebra now consists of two parts, the technical, and the logical. Technical algebra is the art of using symbols under regulations which, when this part of the subject is considered independently of the other, are prescribed as the definitions of the symbols. Logical algebra is the science which investigates the method of giving meaning to the primary symbols, and of interpreting all subsequent symbolic results. (De Morgan, 1842, p. 338)

Par ce moyen, De Morgan – le plus « logicien » parmi les algébristes de Cambridge avant Boole – parvient à nommer le lien avec la logique que, depuis sa naissance, l'Algèbre abstraite suggérait à chaque mathématicien qui assumait la tâche de développer. Qui plus est, l'Algèbre symbolique apparaît maintenant pour De Morgan comme un simple art, ou technique, devant la véritable science qu'est l'Algèbre logique.

Bien que la plupart des développements du « dernier grand logicien traditionnel » – comme le qualifie très justement Hailperin (2004, p. 346) – seront éclipsés par la solidité à la fois radicale et novatrice de l'œuvre de Boole, l'apport de De Morgan à la logique est sans doute loin de se réduire à ces considérations[188]. Ce qui importe ici en tout cas, c'est que, animées par l'évolution d'une problématique interne, les mathématiques finissent par déboucher de manière naturelle sur le territoire d'une logique dont elles viendront à transformer durablement le paysage. Puisque parmi les conséquences les plus inédites d'une telle situation se trouve le fait que chaque notion portant sur des propriétés sémiotiques et qui

[188] Nous aurons l'occasion de revenir sur d'autres formulations de De Morgan dans les chapitres suivants (cf. par exemple, *infra* III.2.2.1). Pour un aperçu général de l'œuvre logique de De Morgan, on pourra consulter Grattan-Guinness (2000, pp. 25-36), Hailperin (1986, pp. 113-118; 2004) ou Sánchez Valencia (2004).

a trouvé le moyen de se stabiliser et de devenir un concept systématique, se voit intrinsèquement liée à des propriétés formelles, mathématiques, bien précises, par la façon même dont cette stabilisation du concept a eu lieu. C'est justement sur l'intimité non métaphorique d'un tel lien que l'événement que l'on nomme généralement *mathématisation de la logique* et que nous avons décidé d'appeler *formalisation du sens* (justement pour mettre l'accent sur l'importance du problème sémiotique) pourra s'appuyer pour assurer son avenir. Mais c'est aussi pour cela que cet événement sera indéfectiblement marqué par la spécificité du signe *algébrique* – avec ses articulations et ses effacements, ses genèses et ses expulsions – dont ce lien est à la fois l'occasion et l'effet.

C'est ainsi que l'ensemble du processus d'émergence de l'Algèbre abstraite, qui, de manière non nécessairement linéaire, avance tout de même guidé par les déterminations précises d'un problème, dispose les conditions qui rendent à la fois possible et nécessaire la rencontre, intime jusqu'à la confusion, entre mathématiques et logique – rencontre qui aura lieu dans l'œuvre de Boole.

II.2. L'émergence de l'œuvre de Boole

II.2.1. Boole en contexte

Dans un court texte où la place accordée à Boole dans l'histoire de la logique est fortement réévaluée, Michael Dummett suggère que la différence la plus importante entre Boole et Leibniz est que, contrairement à Leibniz, Boole publia ses travaux (1978, p. 71). De façon plus subtile, et sans entrer dans des discussions de paternité d'une fécondité douteuse[189], Hailperin (1981, p. 176) signale pourtant une différence substantielle entre les deux logiciens philosophes, à savoir la possibilité dans laquelle Boole se trouvait de disposer, comme guide pour la compréhension des symboles généraux et des opérations, du système théorique constitué par l'Algèbre symbolique. En effet, identifiée avec le dégagement d'une dimension sémiotique spécifique dans l'espace des mathématiques, la naissance de l'Algèbre abstraite dans les travaux des mathématiciens de Cambridge de la première moitié du XIX^e^ siècle entraîna, comme on l'a vu, tout un ensemble de problématisations, de réflexions et d'inventions originales concernant la nature de la signification et le fonctionnement des signes. Au-delà du contexte historique et sociologique, qui vient toujours apporter une nouvelle dimension à l'intelligibilité d'une œuvre, il y a aussi un contexte qui pourrait être appelé *problématique*, irréductible aux déterminations purement factuelles et sociologiques, puisque, bien qu'historiquement déterminé, il comporte une sorte d'objectivité propre à l'évolution d'un problème. Avec l'émergence de l'Algèbre symbolique, c'est précisément ce contexte problématique qui se voit transformé à l'arrière-plan de la pensée logique. Au point qu'une loi logique fondamentale comme $AA = A$ (selon l'écriture de Leibniz) ou $x^2 = x$ (suivant celle de Boole), découverte de manière indépendante par l'un et l'autre, peut avoir un

---

189 Pour une position critique sur la question de la paternité dans l'histoire de la logique, et celle de Boole en particulier, voir Peckhaus (2000). Pour une comparaison entre la logique booléenne et les formulations de Leibniz, en plus de ce texte de Peckhaus, on pourra consulter Hailperin (2000), et (2004), qui en est une version étendue.

sens entièrement différent dans la mesure où, suivant ce contexte, elle incarne une solution à deux problèmes différents. Et cela même dans le cas où ces deux expressions s'avéreraient équivalentes d'un point de vue qu'on pourrait appeler « formel », si ce n'était pas justement du sens du formel lui-même qu'il était ici question. Il convient donc, avant d'aborder l'œuvre séminale de Boole, de synthétiser ce qui fait de la naissance de l'Algèbre abstraite le contexte problématique pour son émergence.

Ainsi qu'il ressort du chapitre précédent, parmi les conséquences les plus décisives pour une pensée du signe qu'ont eu les recherches des algébristes anglais, dont la motivation demeura toujours d'ordre fondamentalement mathématique, on trouve d'abord ce que l'on pourrait appeler une *sémiotisation générale de l'espace des mathématiques*. On entend par là le processus par lequel les différents domaines des mathématiques – Géométrie et Arithmétique typiquement, mais aussi Analyse, par exemple, en tant que région spécifique liée au Calcul infinitésimal, non moins que les techniques de calcul numérique ordinairement associées à l'Algèbre à cette époque-là – deviennent identifiables, non plus par leurs objets ou les types de propriétés qui leur sont associées, mais par la nature de leurs signes et les ressorts propres suivant lesquels ils produisent de la signification ou du sens (*meaning*). De cette manière, les aspects sémiotiques associés aux différentes disciplines mathématiques cessent d'en être une simple propriété, même essentielle, pour devenir le critère même de leur identification et le principe général de leur positionnement respectif. Cette sémiotisation de l'espace des mathématiques, requise non seulement pour l'intelligibilité des mécanismes de l'Algèbre abstraite, mais aussi par le couronnement de cette Algèbre comme dimension privilégiée, voire universelle, face aux autres disciplines, a eu des effets décisifs, tant au niveau des mathématiques qu'à celui d'une théorie de la signification.

Du côté des mathématiques, la naissance de l'Algèbre abstraite elle-même en est sans doute la conséquence la plus prodigieuse. Mais avec elle il faudrait compter également, non seulement la conquête d'un degré d'abstraction inédit peut-être dans l'histoire des mathématiques, mais également une nouvelle approche des connexions possibles entre les diverses régions mathématiques. Notamment en ce qui concerne les liens entre Géométrie et cette région ambiguë de l'Arithmétique générale sous laquelle le XVIII[e] siècle avait l'habitude de ranger le Calcul différentiel et infinitésimal, et que le nom d' « Analyse » venait habituellement circonscrire. L'algébrisation de l'Analyse qui accompagne la naissance de l'Algèbre offre à ces traversées d'un territoire à l'autre des mathématiques plus qu'un ensemble de techniques subtiles et idoines : elle lui offre une cohérence et un fondement. Et ce faisant, elle suggère à l'ensemble des mathématiques, à travers la substitution de la vieille et lourde notion de quantité par l'abstraction opératoire du signe, quelque chose qui s'insinue comme un nouveau principe pour leur unité.

Simultanément, du côté d'une pensée du signe et de la signification, une série ouverte de concepts sémiologiques a vu le jour, forcé par un processus de redéfinition de la nature sémiotique de certains énoncés mathématiques à partir duquel s'accomplissait la migration des propriétés mathématiques vers le domaine de l'Algèbre. En effet, de Woodhouse à Gregory, les différents mathématiciens de l'école de Cambridge se sont livrés à une création aussi spontanée que féconde de concepts portant sur les mécanismes par lesquels les signes sont capables de produire du sens. De façon surprenante cependant, ces réflexions n'ont guère fait appel à des recherches philosophiques ou scientifiques en dehors de l'univers strictement mathématique. Or, bien que motivés par des problèmes mathématiques spécifiques, les concepts engendrés étaient doués d'une portée bien plus générale. Si bien qu'au rythme de la stabilisation de la pratique algébrique qu'ils avaient pour fonction d'étayer, une consistance, rustique mais certaine, a fini par s'installer au milieu de ce faisceau de notions, qui suffisait pour remplir, et excédait parfois, les exigences de la pratique mathématique qui le nécessitait. Ainsi, à la suite de l'utilisation quelque peu hâtive de notions telles que *signe naturel* ou *arbitraire* de la part de Woodhouse, et de l'emploi souvent irréfléchi des notions comme *généralité*, *signification* ou *ressemblance* par les premiers algébristes anglais, on a vu les mécanismes propres au signe algébrique se spécifier, par exemple, dans les mains de Babbage avec le concept de *symétrie*, doublement déterminé comme *ressemblance* de systèmes de caractères et *similarité* de leur situation. Si nombre de termes ont fini par être abandonnés et oubliés purement et simplement, d'autres sont devenus les pivots d'une théorie de la signification aussi générale que féconde, capable de rendre compte de certaines déterminations essentielles à l'intérieur des mathématiques. Le cas de la notion d'*interprétation* est emblématique : utilisée de manière incidente et non technique par Woodhouse, elle s'impose à Babbage comme problème dans le cadre de sa méthodologie orientée par la notion de *traduction*, et accède enfin au rang de véritable concept lorsque Peacock l'utilise en opposition à celle de *définition* pour déterminer la nature même de l'Algèbre, d'une façon qui demeurera stable chez Gregory, sera spécifiée par De Morgan et, profitant de la puissance de l'œuvre logique de Boole, qu'elle informera à son tour, ira jusqu'à inspirer un siècle plus tard la Théorie des modèles parvenant ainsi jusqu'à nos jours[190]. Ce faisceau de notions était aussi loin de se réduire à une simple nomenclature que de s'épuiser dans ses effets réels sur la pratique mathématique, et algébrique en particulier. Évoluant selon une organisation et une stabilité croissantes, on a vu comment cet ensemble de concepts est parvenu à constituer une véritable proto-théorie du sens, dessinant et s'articulant

[190] Sur le rapport de la notion d'interprétation à la Théorie des modèles, voir l'introduction à Hintikka (1997b).

autour d'un double principe de détermination : d'une part, le sens d'un signe apparaît comme déterminé « verticalement », pour ainsi dire, par rapport à l'objet ou contenu auquel il est censé renvoyer ; d'autre part, il est déterminé « horizontalement », par rapport aux autres signes avec lesquels il s'articule dans des formes, selon des règles de combinaison précises. C'est justement autour de ces deux principes, enfin identifiés par Peacock au moyen des concepts d'*interprétation* et de *définition*, que l'ensemble initialement désordonné de considérations et de notions portant sur la nature des signes et de la signification trouvera une façon simple mais durable de s'organiser.

Mais ce qui est encore plus intéressant, c'est la manière dont les deux plans – mathématique et sémiotique – *se sont retrouvés intimement corrélés*, par la façon dont les réflexions et les concepts sémiotiques ou sémiologiques furent engendrés, ainsi que par les effets concrets que ceux-ci étaient appelés à avoir pour les mathématiques. Ce n'est pas par simple métaphore qu'une certaine loi combinatoire peut être dite « interprétée » arithmétiquement, ou géométriquement, car la notion d'interprétation, en tant que concept *sémiologique* dans le cadre de la pensée algébrique, a été définie pour désigner très précisément l'opération mathématique même par laquelle une loi algébrique peut recevoir un sens arithmétique, géométrique ou autre. Inversement, si des propriétés arithmétiques, géométriques ou analytiques peuvent communiquer entre elles, et les déterminations respectives circuler entre des disciplines différentes par des procédures faisant elles-mêmes entièrement partie des mathématiques et sans avoir recours à une légitimation externe, c'est dans la mesure où non seulement des lois formelles, mais aussi tout un nouveau dispositif technique pour les traiter et les manipuler, furent soigneusement agencés. Or cet agencement est indissociable de l'émergence de concepts comme celui d'interprétation (mais pas uniquement), et du réseau conceptuel et problématique dans lequel celui-ci était inscrit. Car l'élaboration de tels concepts n'est rien d'autre que l'amorce d'une intelligibilité pour les opérations techniques en question, qui constitue la condition même de possibilité d'un tel agencement.

Par le moyen de ces rudiments, l'Algèbre anglaise a été capable de fournir de l'intérieur des mathématiques une solution sémiotique mathématiquement satisfaisante pour ce qui de l'extérieur n'arrivait à être vu autrement que comme simple analogie. Et de ce fait, elle a disposé le terrain pour la construction d'une théorie du sens à même de rivaliser avec les imperfections, le vague, le simplement probable, les coïncidences éventuelles, les dangers, les limitations et les restrictions, les interruptions et les irrégularités, les paradoxes embarrassants et les inexplicables mystères, propres à une conception du fonctionnement des signes appuyée sur la base étroite et fragile des similarités et des ressemblances du principe d'analogie[191]. Mais si devant une conception purement analogique de la signification, l'Algèbre abstraite est arrivée à proposer, en lui opposant, une approche stricte et sûre des significations des signes, il reste que cette sûreté et cette rigueur sont indissociables d'un ensemble de fonctionnements sémiotiques, que l'on finira par qualifier de « formels », dont les exigences demeurent déterminées par le savoir et la pratique mathématiques[192].

Cet impératif qui commande de repenser ce qui autrement ne se laissait penser que comme analogie, dans le cadre sûr et strict d'une conception formelle attachée à la correspondance intime entre pratiques mathématiques et concepts sémiotiques, supposait déjà un rapprochement de thèmes mathématiques de ceux qui furent traditionnellement ceux de la logique. On a indiqué comment un grand nombre d'éléments, constituant autant d'aspects de la nature sémiotique du problème suivant lequel se développa l'Algèbre abstraite, contribuaient à ce rapprochement en le consolidant progressivement. À commencer par la question de la notation, sur laquelle s'ouvraient les réflexions des premiers algébristes. Car la différence de sens apparue au niveau strict de l'écriture, et non pas des objets, posait d'emblée le problème mathématique de l'Algèbre comme un problème avant tout d'expression et de langage. Et si tous les problèmes touchant au langage ne constituent pas par eux-mêmes et nécessairement une matière que la tradition logique aurait reconnue comme sienne, l'identification du domaine sémiotique spécifique de l'Algèbre avec celui des « termes généraux » dans un langage ou système expressif suffit pour enlever tout ce qu'un rapprochement de la logique pouvait avoir de fortuit. Aussi spécifique que la place des termes généraux puisse être dans le paysage des formes sémiotiques, c'est pourtant la région qu'elle définit qui prend en charge de façon directe la fonction par laquelle le langage exerce sa puissance de généralisation. C'est en ce sens que Woodhouse peut parler de l'Algèbre comme un langage général ou universel, qui n'est pourtant ni figuratif ni allusif[193], touchant ainsi l'une des déterminations essentielles de la logique telle qu'elle était alors comprise : *lingua universalis*. L'autre détermination fondamentale, celle qui a trait à la rigueur des raisonnements, ne saurait dès lors être absente. Car le problème du langage ne se pose à l'intérieur des mathématiques que pour faire face à leurs opérations et à leurs procédures (à

---

[191] C'est Woodhouse lui-même qui emploie tous ces termes contre le principe d'analogie dans ses premiers écrits portant sur l'Algèbre. Cf. Woodhouse (1801; 1802).

[192] Woodhouse, (1802, p. 92) : « since arguments have been invented, which, if they do not satisfy, yet afford the mind a glimpse and indistinct perception of the reason why certain processes lead to truth, it may be presumed possible to convert such probable arguments into certain proofs, and to discipline a vague, perilous, and irregular analogy, into a strict, sure, and formal demonstration. »

[193] Pour l'Algèbre comme langage universel, voir Woodhouse (1802, p. 87) ; pour l'Algèbre comme langage général sans être figuratif ou allusif, voir Woodhouse (1803, pp. vi-vii).

des « transformations », comme on disait souvent à cette époque). Autrement dit, à un principe dynamique qui, envisagé du point de vue de sa signification dans le cadre de l'approche langagière, se confond avec le raisonnement et la déduction dont la logique était traditionnellement censée établir les règles. Ce n'est donc pas les termes généraux eux-mêmes qui intéressent les algébristes de Cambridge, mais le raisonnement spécifique qui leur appartient. Il suffit de rappeler à ce sujet les mots de Woodhouse lorsque, après avoir signalé l'insuffisance du principe d'analogie pour le « raisonnement mathématique », il affirmait que les conclusions mathématiques devaient être obtenues par des opérations « conduites d'une manière similaire à celle par laquelle tout raisonnement avec des termes généraux est conduit » (1802, p. 85). Et encore plus clairement :

> …since *algebra is an universal language*, it ought surely to be competent to express the conditions belonging to any subject of inquiry; and, if adequate expressions be obtained, then there is no doubt that *with such, reasoning or deduction may be carried on*. (Woodhouse, 1802, p. 87, nous soulignons)

Ce lien entre les termes généraux du langage algébrique et le type de raisonnement à eux associé fut un leitmotiv des algébristes anglais. Babbage, comme on l'a vu, affirmait :

> …the advantage of employing letters for the known quantities, consists in their similarity to general terms in language, and the consequent extension of the reasoning from an individual case to a numerous species. (Babbage, 1826, p. 12)

Qui plus est, la différence fondamentale établie par Peacock entre Algèbre arithmétique et Algèbre symbolique y trouve sa justification. Car si les sciences physiques s'appuient sur des principes pour leurs raisonnements, ces principes sont pourtant assumés en rapport direct avec les faits ou les objets analysés de telle sorte que l'existence des conclusions ne pose pas de problèmes. Mais les principes de l'Algèbre, « en commun avec ceux des autres sciences de démonstration stricte » (1833, p. 186) , s'en distinguent, puisqu'en Algèbre

> …we found our reasonings equally upon assumed first principles, and we equally seek for logical accuracy in the deduction of our conclusions from them; but both in the principles themselves and in the conclusions from them, we look to the external world as furnishing by interpretation corresponding principles and corresponding conclusions… (Peacock, 1833, p. 187)

On voit que le caractère exclusivement démonstratif et sémiotique ou langagier de l'Algèbre débouche sur une reformulation précise du problème du sens des signes ; problème qui, de façon encore intuitive à propos des quantités impossibles, se trouvait à l'origine des préoccupations des mathématiciens de Cambridge. Les conditions d'une solution à ce problème exigent que les recherches algébriques soient indissociables de l'élaboration d'une théorie explicite du sens des signes, aussi simple et précaire soit-elle. Cette solution viendra, comme l'anticipe Peacock dans le passage que nous venons d'évoquer, du côté du concept d'interprétation en rapport avec celui de définition. En assumant cette exigence, la tâche des recherches algébriques se rapprochait encore davantage de celles de la pensée logique. Ce n'est donc pas un hasard si en spécifiant cette procédure d'attribution de sens aux signes capturée sous la forme de l'interprétation, De Morgan finira par proposer le nom d'*Algèbre logique*.

Exploration de propriétés strictement symboliques ; construction d'une dimension constituée par des termes généraux à la recherche d'un moyen universel d'expression ; régulation des raisonnements à partir de la détermination des lois de transformations supportées par de tels termes ; élaboration d'éléments théoriques offrant une intelligibilité aux mécanismes par lesquels les signes véhiculent du sens… Toutes ces tâches que les recherches algébriques ont dû affronter en conséquence de la nature et de la dynamique propres au problème qui était le leur à l'intérieur des mathématiques, débouchaient naturellement sur le territoire de la logique. Si ce rapprochement est « naturel », c'est dans la mesure où le problème dont l'Algèbre abstraite sera la solution est lui-même de nature sémiotique, c'est-à-dire, concerne de manière privilégiée et essentielle, voire exclusive, des propriétés du fonctionnement des signes en tant que signes. Mais aussi naturel qu'il puisse être en raison de la structure du problème qui l'anime, ce rapprochement n'est pas moins inattendu pour autant. C'est d'ailleurs la naturalité inattendue de ce rapprochement des sujets mathématiques et logiques qui explique peut-être le renouveau remarquable de l'intérêt pour la logique éprouvé à cette époque en Angleterre, après plus d'un siècle de critiques inspirées de Descartes et Locke[194]. Mais si les mathématiques, sous l'effet de l'édification de l'Algèbre abstraite, se penchèrent vers la logique, ce fut moins pour en emprunter des déterminations que pour en proposer de nouvelles, puisque comme nous l'avons montré dans le chapitre précédant, les algébristes anglais ont mené ces tâches de façon remarquablement autonome. C'est dire que ce sont les mathématiques qui se sont rapprochées de la logique, et non pas l'inverse. Dans le besoin d'une intelligibilité et d'un fondement, les mathématiques n'ont pas fait appel à la logique, à ses concepts et à ses techniques, mais *ont proposé une logique*, ou plus précisément ont proposé leurs propres concepts et techniques à une logique, c'est-à-dire à un langage à vocation universel et à un mode rigoureux de raisonnement, motivées par leurs propres problèmes, appuyées sur leurs propres pratiques et orientées par leurs propres fins.

[194] Cf. Panteki (2000, pp. 189-190). Pour une autre approche au contexte de réapparition de la logique en Angleterre sous l'effet des développements en mathématiques on pourra se reporter à l'article de Durand-Richard (2000).

II.2.2. La jeuneuse mathématique de Boole

Si l'œuvre de Boole s'enracine dans un contexte problématique, c'est donc dans l'ensemble de ces déterminations qu'il faut le reconnaître. Un simple regard jeté sur les travaux publiés par Boole avant la parution en 1847 de son premier ouvrage logique, *The Mathematical Analysis of Logic*, suffit pour s'en convaincre[195]. Cette première partie de l'œuvre de Boole commence vers 1840, alors qu'il avait vingt-cinq ans, et compte plus d'une quinzaine d'articles mathématiques, parus dans leur quasi-totalité dans le *Cambridge Mathematical Journal*, fondé et édité par le dernier des algébristes que nous avons considérés, Duncan Gregory, qui fut en même temps son collègue et son ami. L'ensemble de ces travaux porte sur divers aspects de l'Analyse, et de la Théorie des équations différentielles en particulier, allant du Calcul des variations jusqu'à la détermination de certaines intégrales ou des fonctions discontinues, en passant par des problèmes de Géométrie analytique et prenant souvent en compte des applications à la physique. Cette diversité d'objets n'est pourtant qu'apparente, elle recouvre une profonde unité de méthode. En effet, un motif général se dégage sans effort de la lecture de tous ces textes, à savoir l'application incessante des méthodes établies par les algébristes de Cambridge, et du calcul d'opérations notamment, dans le but de produire des effets de généralisation à partir de résultats particuliers de l'Analyse. Aussi, ces travaux gardent-ils la trace de la marche de l'Algèbre abstraite vers son accomplissement dans une logique.

Dans le premier de ces travaux, paru en 1840[196], Boole exprime une substitution de variables $x = f_1(x', y')$ et $y = f_2(x', y')$ dans une fonction à deux variables par l'équation générale $P = P'$. Cette expression peut paraître vide tant que les contenus de P et de P' ne sont pas explicités. Ce qui est exprimé par là, néanmoins, c'est que la substitution peut être traitée indépendamment des conditions particulières de la fonction en question, telles que $P = 0$, et du même coup, des interprétations qui y pourraient être associées (l'équation d'une courbe, par exemple). Comme le remarque Laita (2000, p. 47), P et P' fonctionnent ici comme des véritables opérateurs, fussent-ils de simples opérateurs de substitution. Ce qui importe, ce qu'au moyen de l'équation $P = P'$, un plan s'ouvre où tout un ensemble d'opérations (de différentiation, par exemple, mais pas uniquement) pourra être détaché des

[195] Pour un aperçu un peu plus détaillé que le nôtre sur certains aspects de cette période de l'œuvre de Boole, voir l'article de Laita (2000), ainsi que celui de Panteki (2000), portant plus spécifiquement sur *On a General Method in Analysis*. On pourra aussi consulter Koppelman (1971, pp. 197-200).

[196] Nous nous référerons ici aux dates de parution des numéros des journaux correspondants, et non pas des volumes les rassemblant.

déterminations spécifiques propres aux « points de vues » ou « interprétations » selon lesquels les fonctions originelles accepteraient d'être considérées (Boole, 1841a, pp. 64-65).

Dans le même esprit, le second travail publié par Boole (1841b), écrit pourtant vers 1838, s'occupe de résultats dus à Lagrange liés au Calcul des variations, pour essayer de les établir par des modes de démonstrations nouveaux, au moyen d'un nombre de symboles ($\int$, d, δ, $\frac{d}{dx}$), fonctionnant comme des opérateurs soumis à des règles de combinaison indépendantes des objets sur lesquels ils portent. La démonstration de Boole non seulement raccourcit celle de Lagrange, mais parvient à établir aussi une équation générale du mouvement à partir de laquelle différents principes mécaniques peuvent être déduits. Dans le troisième travail de cette série, la méthode de séparation des symboles est enfin appelée par son nom, et celui de Gregory est évoqué dès le début. En effet, Boole reprend un travail de Gregory dans le but d'en simplifier certaines opérations. Étant donné une équation différentielle à coefficients constants, dont on aurait séparé la variable y des signes d'opération de la forme suivante :

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \cdots + A_n\right) y = X,$$

Boole en exprime la partie opératoire de manière générale comme une fonction de $\frac{d}{dx}$, ce qui donne $f\left(\frac{d}{dx}\right) y = X$. Dès lors, par une opération algébrique simple on a :

$$y = \left\{f\left(\frac{d}{dx}\right)\right\}^{-1} X,$$

où $\left\{f\left(\frac{d}{dx}\right)\right\}^{-1}$ accepte d'être développé de la même manière que $\{f(z)\}^{-1}$, c'est-à-dire comme :

$$\{f(z)\}^{-1} = \frac{1}{z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \cdots + A_n},$$

en substituant le symbole $\frac{d}{dx}$ à z. Ceci évite de factoriser l'équation différentielle originelle en facteurs binomiaux simples, ce qui exigerait une lourde intégration par parties. Boole justifie la légitimité de cette procédure dans une « extension de l'application des principes sur lesquels est fondée toute la méthode de séparation des symboles » (1841c, p. 115). Ces principes sont précisément l'associativité, la commutativité et la loi des indices, « qui ont été montré, par M. Gregory […] comme étant communs au symbole $\frac{d}{dx}$, et aux symboles algébriques censées généralement représenter des nombres » (p. 115). Après résoudre de cette manière l'équation différentielle, il applique la même méthode à des équations de différences finies.

Boole publia ensuite un travail portant sur certains points de Géométrie analytique, notamment des problèmes de distances entre des lieux dans l'espace. La procédure est la même que dans des travaux précédents : à partir de résultats connus dans un domaine particulier, il cherche à établir une expression symbolique au moyen de laquelle on peut opérer une généralisation, non seulement vers d'autres cas, mais aussi vers d'autres domaines. En l'occurrence, à partir d'une formule D, permettant d'obtenir la valeur minimale d'une fonction de distance dans l'espace (donc, à trois dimensions : *x*, *y*, *z*), Boole parvient à établir l'équation $\mathrm{D} = \mathrm{D}' \cos\varphi$, où D' est une expression de distance composée des valeurs symbolisées respectivement par a, b et *c*, qui déterminent la fonction dont D cherche le minimum, et φ est l'inclinaison existante entre cette distance D′, et la distance minimale D cherchée (1841d, p. 180). La généralité ainsi gagnée permet de traiter des cas où les équations déterminant la fonction de distance sont d'un ordre plus grand que 1. Avec cette méthode, Boole s'applique à la résolution de certains problèmes de Géométrie, après quoi il l'étend vers des problèmes algébriques (élimination de variables), dont les problèmes géométriques ne sont que des cas, et même à des problèmes physiques (trajectoire de rayons de lumière) (1841d, pp. 183-184).

On retrouve cette même procédure appliquée aux transformations algébriques linéaires dans un travail en deux parties écrit entre 1841 et 1843. Boole reprend à nouveau des résultats précédents concernant la Théorie des transformations linéaires, depuis Lagrange et Laplace, jusqu'à Cauchy et De Morgan. En partant d'une substitution linéaire dans une fonction du second degré, exprimée soit par la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2$$

soit par l'équation

$$Q = A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + \cdots + A_m y_m^2,$$

Boole commence par considérer ces expressions comme des cas particuliers du système homogène

$$h_2(x_1, x_2, \dots x_m) = h'{}_2(y_1, y_2, \dots y_m),$$
$$H_2(x_1, x_2, \dots x_m) = H'{}_2(y_1, y_2, \dots y_m).$$

Le chiffre 2 en indice des symboles de fonction indiquant le second degré, Boole le généralise en $h_n, h'{}_n, H_n, H'{}_n$, et exprime ensuite le système par les « formes abréviées » :

$$q = r,$$
$$Q = R,$$

à l'aide de symboles d'opérations *q*, *r*, *Q*, *R*, pour lesquels il établit finalement une « forme générale » du type :

$$q = a_1 x_1^n + a_2 x_2^n + \cdots + a_m x_m^n + \sum a_i x_1^\alpha x_2^\beta \dots x_m^\mu,$$

(les coefficients a_n changeant en b_n, A_n et B_n pour *r*, Q et R, respectivement, et portant sur les variables correspondantes : x_i^n pour q et Q et y_i^n pour *r* et *R*) (1843a, pp. 1-3). Grâce à tout ce travail de réécriture, débouchant sur ce qu'il appelle des « formes symboliques » (par ex. pp. 10, 12...), Boole trouve le point de vue à partir duquel opérer ensuite les généralisations envisagées. Non seulement vers des ordres supérieurs et des équations différentielles, mais aussi en ouvrant de manière indéfinie la portée des interprétations possibles. Car au niveau de généralité atteint, il y a des conditions qui peuvent faire qu'une expression « cesse d'être interprétable » (Boole, 1843b, p. 109). Ce qui fait dire à Boole, avec un ton à la fois de reproche et de réparation :

> Linear transformations have hitherto been chiefly applied to the purpose of taking away from a proposed homogeneous function, those terms which involve the products of the variables. It may be observed that this problem resolves itself into two principal cases: the first is that in which the transformations, besides being linear, are understood to represent a geometrical change of axes, or are such as to involve an obvious extension of this analogy; the second case is when no other condition than that of linearity is introduced. It is to the former of the above cases, and to that only as developed in the first of the subjoined examples, that the efforts of analysts appear to have been hitherto directed. (Boole, 1843b, p. 116)

Même dessein de généralisation dans un ensemble d'articles autour des transformations et calcul d'intégrales écrits vers 1842. Dans l'un d'entre eux, par exemple, en empruntant aux *Exemples* de Gregory un résultat de Jacobi, Boole cherche à développer un principe d'Analyse capable non seulement d'être appliqué à d'autres questions, mais d'orienter la théorie d'une classe des transformations dont le résultat de Jacobi ne serait qu'un cas particulier (1843c, p. 216). Boole énonce ledit principe aussitôt :

> The principle on which our investigation will rest is simply this,—that the theorem (2)[197] remains equally true, whether *l*, *m*, *l'*, *m'*, represent constant quantities, or symbols of operation, combining according to the same laws, and admitting, under the particular conditions of the question, of the same interpretation. (Boole, 1843c, p. 216)

On reconnaîtra dans ce principe, que Boole assume de plus en plus consciemment au fur et à mesure que ses recherches évoluent, celui même que l'Algèbre abstraite avait su instaurer en rassemblant la série des instruments mathématiques et conceptuels qui, de Woodhouse à Gregory, avaient marqué l'histoire de son émergence. On comprend alors que le dessein de généralisation commun à toutes ces premières recherches de Boole ne relève pas du dessein

---

[197] Il s'agit d'une transformation connectant des intégrales d'Euler :

$$\int_0^1 z^{l-1}\,(1-z)^{m-1}dz = \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(l'+m')}{\Gamma(l')\Gamma(m')\Gamma(l+m)}\int_0^1 z^{l'-1}\,(1-z)^{m'-1}dz,$$

où *l*, *m*, *l'* et *m'* sont des constantes positives.

d'étendre la portée des résultats particuliers dans des domaines spécifiques, mais *de la méthode et du principe qui rendent possible une telle généralisation*. Boole le dit lui-même au moment de clore l'un de ces travaux sur le calcul d'intégrales définies : « À présent […] je n'ai pas le loisir de poursuivre cette investigation, et je ne tiens pas non plus à multiplier les résultats comme je tiens à établir des principes » (1845a, p. 87)[198].

Aussi, après ces premières années d'exploration locale dans différentes régions de l'Analyse, Boole s'occupa-t-il de manière directe de la question de la méthode sur laquelle s'appuyaient ses recherches et ses résultats. Il publia ainsi en 1844 un assez long article dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society* intitulé : « On a General Method in Analysis », qui lui valut la Médaille Royale en sciences mathématiques ainsi qu'une certaine célébrité[199]. Dans ce traité, sont abordées tour à tour la résolution d'équations différentielles linéaires, leur intégration en termes finis, la théorie des séries et des fonctions génératrices, l'évaluation de certaines intégrales définies et la résolution d'équations aux différences en séries. Mais l'important n'est évidemment pas dans les résultats spécifiques à ces champs de l'Analyse, mais dans la méthode générale suivant laquelle ils se laissent tous appréhender, et qui permet de lever les conditions particulières limitant jusqu'alors leur validité. Ainsi, si la méthode existante de résolution des équations différentielles linéaires s'appliquait uniquement lorsque les coefficients de l'équation étaient constants, la méthode proposée par Boole est libre de telles limitations. De la même manière, si la solution des équations différentielles en séries donnée par Euler cesse d'être valable lorsque la recherche de l'indice du premier terme donne des valeurs égales ou imaginaires, la méthode de Boole n'admet pas d'exceptions. Ses avantages ne se limitent d'ailleurs pas à la généralisation de résultats, mais comme l'indique Boole, les différents processus sont aussi simplifiés – comme dans le cas de la formation des équations différentielles à partir des séries ou des équations aux différences –, et les calculs sont parfois facilités – comme pour leur l'intégration (1844, pp. 226-228).

Tout comme dans ses travaux antérieurs, la méthode employée et développée par Boole n'est autre que celle pratiquée par les algébristes de Cambridge. Seulement, si jusque-là elle était demeurée implicite ou simplement évoquée, la volonté de présenter une méthode générale pour l'Analyse qui anime ces pages de 1844 ne peut que la placer au premier plan. Aussi Boole ouvre-t-il son mémoire par une référence directe à « une méthode en analyse connue comme le calcul d'opérations, ou comme la méthode de séparation de symboles » (p.

198 Bien que ce travail soit publié dans le volume de 1845 du *Cambridge Mathematical Journal*, il est daté du 26 octobre 1842.

199 Pour une étude détaillée de ce mémoire, voir Panteki (2000), qui non seulement analyse profondément le contenu du traité, mais le rapporte aussi à son contexte scientifique, et essaye de montrer l'influence qu'a eue pour sa réalisation le problème soulevé par l'équation décrivant la forme de la terre.

225). Les travaux de Gregory, Servois, Murphy[200] et De Morgan sont ensuite mentionnés. Mais c'est sans doute Gregory qui sur ce point occupe le devant de la scène, puisque ce sont précisément les principes qu'il avait enfin proposés comme fondements pour les opérations de l'Algèbre symbolique que Boole prendra comme cadre pour le déroulement de ses recherches. Au point que, au moment de présenter le principe fondamental de la méthode sur laquelle il s'appuiera, Boole laisse directement la parole à Gregory, en citant le passage suivant, appartenant au livre récent de Gregory, *Exemples of The Processes of The Differential and Integral Calculus* :

> There are a number of theorems in ordinary algebra, which, though apparently proved to be true only for symbols representing numbers, admit of a much more extended application. Such theorems depend only on the laws of combination to which the symbols are subject, and are therefore true for all symbols, whatever their nature may be, which are subject to the same laws of combination. (Gregory, 1841/1846, p. 237; cité dans Boole, 1844, p. 225)

Boole rapporte ensuite les trois lois combinatoires introduites par Gregory dans son ouvrage, à savoir la loi commutative, la loi distributive et la loi des indices. Avec cette différence pourtant, que Gregory ne retenait ces trois lois parmi toutes celles qu'il avait su définir que parce qu'elles étaient celles qui concernaient les théorèmes généraux du Calcul différentiel, dont il était question dans le chapitre correspondant dans cet ouvrage (Gregory, 1841/1846, p. 237). Boole, en revanche, les présente comme celles qui « ont jusqu'ici été reconnues » (1844, p. 225). Cette négligence du reste des lois précédemment établies par Gregory trahit certainement une méconnaissance de Boole par rapport aux travaux antérieurs de son collègue concernant l'Algèbre symbolique, voire à ceux des algébristes dans leur ensemble. D'autant plus que, à part De Morgan, qui était lui aussi son collègue et ami, les deux autres mathématiciens mentionnés par Boole dans ce texte, Servois et Murphy, sont précisément ceux à qui Gregory rapporte lui-même la méthode de séparation des symboles d'opération dans le chapitre en question[201]. En résulte une restriction du domaine de l'Algèbre symbolique à celui des opérations algébriques uniquement concernées par le calcul infinitésimal, qui ne sera sans doute pas sans conséquence lorsque Boole se vouera au projet d'une algébrisation de la logique, puisque comme on le verra, ce projet sera appuyé sur des versions immédiates de ces trois lois symboliques.

---

[200] Pour un bref aperçu des travaux de Murphy qui ont influencé Boole dans ce traité, voir Koppelman (1971, pp. 194-197).

[201] Voir Gregory (1841/1846, p. 239). Sur l'absence de rapport direct entre Boole et Peacock, Babbage, et même Leibniz et De Morgan, voir l'introduction de Grattan-Guinnes dans Boole (1997, pp. xliii-xlv). Les *Exemples* de Peacock sont cependant cités dans ce traité de 1844 (p. 242).

Toujours est-il que si, dans ce texte, Boole présente ces lois comme celles reconnues jusqu'alors, c'est aussi pour anticiper et pour accentuer à la fois la contribution qu'il est sur le point de réaliser. Car la méthode générale proposée pour l'Analyse repose précisément sur la reconnaissance et l'établissement d'une nouvelle loi combinatoire. Aussi, Boole continue-t-il à présenter la méthode symbolique en affirmant :

> The above laws are obviously satisfied when π and ϱ [les symboles d'opérations utilisés dans la définition des trois lois] are symbols of quantity. They are also satisfied when π and ϱ represent such symbols as $\frac{d}{dx}$, Δ, &c., in combination with each other, or with *constant* quantities. (Boole, 1844, p. 225)

Si Boole souligne le mot « constant », c'est pour attirer l'attention sur une restriction que sa méthode a précisément pour vertu de lever. La restriction à des quantités constantes est une conséquence de la commutativité supposée de tous les symboles d'opération. En effet, si l'on combine un symbole différentiel avec un symbole d'opération a, et que l'on cherche à interpréter a comme une quantité (ce qui est indispensable pour le traitement des coefficients des équations différentielles), l'exigence de commutativité entre eux, c'est-à-dire la loi

$$\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$$

n'est vraie que lorsque a est une quantité constante. L'interprétation de a comme une quantité variable, autrement dit, comme une fonction, requerra donc l'établissement d'une loi combinatoire capable de contrôler cette non-commutativité. L'idée de Boole est ainsi d'écrire « $f(\pi)$ » comme symbole de quantité variable, pour un symbole « π » associatif par rapport au symbole « ϱ », et d'établir ensuite la loi de combinaison suivante :

$$\varrho f(\pi)u = \lambda f(\pi)\varrho u,$$

où λ est un « symbole fonctionnel » opérant sur π de telle sorte que l'on ait

$$\lambda f(\pi) = f\big(\phi(\pi)\big)$$

(pp. 228-229). Ce faisant, Boole capture symboliquement par « λ » l'effet produit sur la quantité variable $f(\pi)$ lorsqu'elle commute avec ϱ. Cet effet est défini comme une fonction ϕ portant, non pas sur $f(\pi)$, mais sur π directement. Mais en le détachant du symbole de quantité variable au moyen du symbole « λ », suivant le geste typique du calcul d'opérations, Boole lui donne un statut strictement algébrique qui, purement symbolique, n'a pas moins une efficacité opératoire. En effet, « λ » n'est qu'un autre nom pour une fonction ϕ, qui demeure, pour le reste, entièrement indéfinie. Cependant, en tant que symbole pur, il est susceptible de recevoir les déterminations algébriques qui relèvent des lois de combinaison, telle, notamment, l'exponentiation par des indices. Ainsi, il est possible d'établir que

$$\varrho^m f(\pi)u = \lambda^m f(\pi)\varrho^m u,$$

où l'indice m exprime l'itération de l'opération m fois[202], et cela de façon entièrement indépendante de la fonction spécifique symbolisée par « ϕ ».

Par là, comme Boole ne manque pas de le remarquer, le calcul d'opérations se montre capable d'étendre le pouvoir l'Analyse, et pas seulement d'en simplifier les démarches (p. 226). Notamment, grâce à cette symbolisation de l'effet produit par la commutation d'opérateurs non commutatifs, Boole parvient à établir une formule générale pour la loi de formation des coefficients dans le développement d'une fonction $f(\pi + \varrho)$, à savoir :

$$f_m(\pi) = \frac{(\lambda - 1) f_{m-1}(\pi)}{(\lambda^m - 1)\pi},$$

(où l'on peut d'ailleurs démontrer que $f_0(\pi) = f(\pi)$) (pp. 228-229). La formule est parfaitement générale, et le théorème de Taylor s'en déduit comme le cas particulier où π et ϱ sont commutatifs et où $\lambda f(\pi) = f(\pi + d\pi)$, $d\pi$ étant l'incrément différentiel de π (pp. 229-230). D'autres interprétations pour « π » et « ϱ » sont ensuite explorées par Boole, dont $\pi =$ D et $\varrho = e^\theta$, où $e^\theta = x$ et $\mathrm{D} = \frac{d}{d\theta}$, à partir de laquelle Boole fournit une nouvelle manière d'écrire les équations différentielles linéaires, constituant ce qu'il appelle toujours leur « forme symbolique » :

$$f_0(\mathrm{D})u + f_1(\mathrm{D})e^\theta u + f_2(\mathrm{D})e^{2\theta}u + \cdots = \mathrm{U},$$

(les f_n étant des symboles fonctionnels, et U une fonction de e^θ). Cette forme symbolique permet dès lors de mettre en relief le plan algébrique sur lequel reposent les théorèmes analytiques, indépendamment des fonctions f_n (1844, p. 232 sq.; 1846, p. 11).

Avec l'ensemble de ces outils, relevant tous de la même méthode générale qui découle de l'extension du calcul d'opérations dans le cadre de l'Algèbre abstraite, Boole aborde successivement, dans le reste du traité, les différentes questions analytiques annoncées. Mais ces applications, bien qu'essentielles pour prouver l'effectivité de la méthode, ne font pas oublier ce qui fait le véritable objet de ces recherches, à savoir *la méthode elle-même*. Aussi, Boole clôt ce long mémoire par un rappel qui en restitue le sens :

> Fearful of extending this paper beyond its due limits, I have abstained from introducing any researches not essential to the development of that general method in analysis which it was proposed to exhibit. It may however be remarked that the principles on which the method is founded have a much wider range. […] The position which I am most anxious to establish is, that any great advance in the higher analysis must be sought for by an increased attention to the laws of the combinations of symbols. The value of this principle can scarcely be overrated; and I only regret that in the absence of books, and under circumstances

[202] En posant, par exemple, $\phi(\pi) = \pi + \Delta\pi$, on a que $\lambda^m f(\pi) = f\big(\phi^m(\pi)\big) = f(\pi + m\Delta\pi)$.

> unfavourable for mathematical investigation, I have not been able to do that justice to it in this essay which its importance demands. (Boole, 1844, p. 282)

La suite d'articles qui sépareront « On a General Method in Analysis » de *The Mathematical Analysis of Logic* sera de ce fait vouée, pour la plupart, à explorer différents aspects de la méthode générale mise en avant dans ce traité, auquel Boole renverra d'ailleurs fréquemment.

II.2.3. De la symbolisation algébrique des mathématiques à la logique formelle de l'abstraction

La production mathématique de Boole est loin de s'arrêter avec le début de sa production logique en 1847. Celle que nous venons de parcourir permet pourtant de disposer déjà le terrain particulier où prennent racine les éléments à partir desquels sera bâtie son œuvre logique. Ce terrain est, comme il apparaît clairement, celui de l'Algèbre abstraite ou symbolique, défini par les travaux des mathématiciens de Cambridge. Mais cela d'une manière très précise, qui ne se réduit aucunement à celle du « contexte » historique, sociologique ou scientifique. L'Algèbre abstraite anglaise est plus fondamentalement, pour l'œuvre de Boole, le cadre spécifiquement déterminé dans lequel les problèmes sont posés, les méthodes sont offertes et les résultats prennent sens. Au point que la singularité de l'œuvre booléenne se trouve moins dans la façon où celle-ci rompt avec ce cadre, que dans la manière où elle en assume les principes et les conséquences pour les développer davantage, quitte à ce que ce soit le cadre lui-même qui se voie forcé de rompre avec la tradition. De ce point de vue, la singularité de l'œuvre de Boole est certainement plus d'ordre logique que mathématique. Ou mieux, elle ne rompt avec la tradition logique qu'à force de prolonger aussi méticuleusement que possible les traits qui définissent le cadre algébrique dans lequel se développent ses recherches mathématiques.

Le point ouvrant le passage du cadre mathématique à la tradition logique se trouve sans doute ménagé par la place que Boole accorde à la méthode comme aspect crucial de la recherche mathématique. En effet, l'essentiel de la contribution mathématique de Boole dans ses premiers travaux consiste, comme nous venons de le voir, à reprendre des résultats déjà existants dans l'Analyse mathématique pour les aborder suivant une méthode différente. Ce changement méthodologique est pourtant beaucoup plus qu'une simple question de style, puisqu'il effectue un déplacement décisif ouvrant sur une perspective inédite depuis laquelle de nouvelles propriétés mathématiques se laissent capturer. *Il faudrait plutôt dire que le style* *s'avère être par là une dimension pleinement mathématique*. Laita (2000) a sans doute raison lorsqu'il caractérise les traits fondamentaux de la méthodologie booléenne à cette époque – de son *style* – comme « généralisation par symbolisation » (p. 50). La volonté de généralisation est suffisamment claire dans la série des traités que nous avons parcourue ; si elle se laisse convenablement caractériser de symbolique, c'est dans la mesure où la reprise des résultats particuliers en vue de leur généralisation se fait à chaque fois par la transformation des expressions écrites, ainsi que par la cristallisation en signes de type caractéristique, des opérations courantes portant sur ces expressions. Plus précisément, la généralisation s'appuie sur une série de gestes appartenant à des situations diverses, voire à des régions ou disciplines différentes, qui se laissent voir à travers le prisme d'un signe entièrement arbitraire obéissant à un système de règles unique. Cette sémiotisation spécifique permet dès lors d'accéder à un point de vue indépendant des objets mathématiques particuliers représentés par ces expressions, qu'il faudrait dès lors qualifier de proprement « symbolique ». Boole souligne lui-même ces traits constitutifs de sa propre méthode, lorsque dans un des travaux examinés ci-dessus, il conclut que l'analogie entre les différents cas qu'il vient de traiter…

> …is very remarkable, and unless we employed a method of solution common to both problems, it would not be easy to see the reason for so close a resemblance in the solution of two different kinds of equations. But the process which I have here exhibited shows, that the form of the solution depends solely on the method of decomposing the original operating factor; and this decomposition is effected by means of processes which are common to the two operations under consideration, being founded only on the common laws of the combinations of the symbols. (Boole, 1841c, p. 119)

Ces mots présentent d'ailleurs un autre aspect de la mise en valeur de la méthode comme élément proprement mathématique. Ce que les symboles capturent, ce sont précisément des opérations courantes effectuées sur les signes, autrement dit des gestes appartenant au savoir-faire des mathématiciens, et donc à leur méthode pratique, voire intuitive. À ces gestes méthodiques, la symbolisation offre un statut formel susceptible d'un traitement aussi rigoureux et efficace que celui des objets mathématiques sur lesquels ils portent. On ne s'étonnera pas dès lors si les propriétés mathématiques auxquelles le point de vue symbolique donne accès sont invariablement de l'ordre de la généralisation. Symboliser veut ici dire capturer un geste méthodique, donc général, puisque par définition applicable à une multiplicité de cas particuliers. D'autant plus général, d'ailleurs, que la multiplicité de cas est disparate. Toute propriété formelle ou mathématique susceptible d'être déterminée à ce niveau-là est nécessairement une propriété générale, parce que son essence même est d'être applicable à plusieurs objets. Mais de manière plus immédiate, toute symbolisation, dans la mesure où elle ne consiste pas dans la simple attribution d'un signe arbitraire à un geste ou opération, mais dans la définition et détermination de ce signe au moyen des lois strictes de combinaison, est d'elle-même déjà une généralisation. Introduire, comme le fait Boole, par exemple, le signe « λ » comme symbole opératoire des effets quantitatifs de la commutation d'opérateurs non-commutatifs, implique avoir déjà trouvé la loi permettant de comprendre une multiplicité de propriétés différentes (tenant, en l'occurrence, à la variation des quantités prenant la place de coefficients dans une équation) comme des cas particuliers d'une propriété générale (le caractère fonctionnel de cette variation, et les opérations dont cette fonction est susceptible). Et cela tout simplement parce que le symbole *λ n'est rien d'autre que cette loi même*.

On comprend ainsi pourquoi c'est par cette dimension méthodologique que finit par se réaliser de façon concrète la connexion entre mathématiques et logique dont la nature sémiotique, ou plus précisément symbolique, de l'Algèbre ne fournissait que les conditions et le pressentiment. Car si la méthodologie des sciences a toujours constitué la préoccupation d'une logique définie avant tout comme *organon*, l'Algèbre symbolique internalise, intègre ou incorpore, pour ainsi dire, cette dimension méthodologique à l'intérieur même des mathématiques. Et cela d'une façon double. D'une part, en associant à un changement de méthode des effets proprement mathématiques (non seulement de simplification mais, comme le remarquait Boole, aussi de création et découverte). De l'autre, en faisant de la méthode elle-même l'objet d'un traitement mathématique. Ce n'est donc pas un hasard si le travail mathématique le plus remarquable de l'auteur de *The Mathematical Analysis of Logic* avant une telle incursion dans le terrain de la logique porte de façon directe et exclusive sur la question d'une méthode générale en Analyse. Aussi peu contingent, d'ailleurs, est le fait que l'auteur de « On a General Method in Analysis » se voue trois ans plus tard à l'édification d'une analyse mathématique de la logique. Un premier regard jeté sur le début de l'ouvrage de 1847 suffit pour constater l'importance de cette dimension méthodologique comme pont effectif entre logique et mathématiques. En effet, si la spécificité de la logique en tant que science y est présentée à travers le fait que « la perfection de sa méthode est principalement précieuse comme une évidence de la vérité spéculative de ses principes » (Boole, 1847, p. 2), le « caractère définitif d'un vrai Calcul », au nom duquel un Calcul Logique admet d'être établi, c'est d'être « une méthode portant sur l'emploi de Symboles, dont les lois de combinaison sont connues et générales, et dont les résultats admettent une interprétation consistante » (p. 4). Et Boole ajoute aussitôt :

> It is upon the foundation of this general principle, that I purpose to establish the Calculus of Logic, and that I claim for it a place among the acknowledged forms of Mathematical

> Analysis, regardless that in its object and in its instruments it must at present stand alone. (Boole, 1847, p. 4)[203]

Et comme si cela ne suffisait pas, la question de la méthode symbolique fait l'objet d'un plaidoyer occupant une grande partie de l'introduction de cet ouvrage. Il est d'ailleurs facile de voir comment le double point de vue selon lequel Boole défend cette méthode répond à la façon double suivant laquelle la dimension méthodologique a été incorporée dans les mathématiques par l'Algèbre : d'une part comme moteur de découverte scientifique, de l'autre comme discipline pour l'intellect, « un exercice non pas uniquement de la raison, mais aussi de la faculté de généralisation » (pp. 9-10).

Au bout du compte, tout se passe comme si la question de la méthodologie, que Boole assume et développe dans ses aspects tant techniques que conceptuels, donnait une unité à la série d'éléments qui, à travers l'œuvre de l'École de Cambridge, contribuaient, comme on l'a vu, au rapprochement entre mathématique et logique : fonctionnement symbolique, termes généraux constituant un langage, raisonnements régulés par des lois de transformation, conceptualisation théorique des mécanismes de signification. C'est précisément par cette unité gagnée sous la forme de la méthode que les mathématiques arriveront enfin à toucher le cœur de la logique de façon durable. On peut voir, en effet, comment tous ces éléments se trouvent repris dans l'introduction du premier ouvrage logique de Boole, articulés autour de la promotion de la méthode symbolique. C'est en vertu d'une conception de l'esprit comme activité méthodique, à savoir comme opération mentale de sélection de collections d'objets soumises à des lois (les « Lois de la pensée »), que la prise des mathématiques sur la logique trouvera son point d'accroche, dans la mesure où ces lois élémentaires sont susceptibles d'« expression symbolique exacte » (1847, pp. 5-6).

Toutefois, si avec sa mise en avant de la dimension méthodologique Boole offre une unité pour l'ensemble de ces éléments, il ne les transforme guère pour autant. L'examen des premiers travaux mathématiques de Boole trahit de manière suffisamment claire l'inscription de ses préoccupations à l'intérieur des problèmes et des solutions de l'Algèbre abstraite anglaise. Mais il trahit plus profondément que ces problèmes et ces solutions ont atteint une stabilité suffisante pour fonctionner comme un véritable cadre pour la recherche mathématique. Comme on l'a vu, non seulement Boole utilise constamment les techniques établies par ses prédécesseurs de Cambridge, notamment celles liées au calcul d'opérations, mais il compte aussi sur la légitimité qu'ils ont laborieusement construit pour elles, et plus

[203] [C'est sur le fondement de ce principe général que je me propose d'établir le calcul logique et que je lui réclame une place parmi les formes reconnues de l'analyse mathématique, sans égard au fait qu'en son objet comme en ses instruments, il doive actuellement demeurer hors d'elle. (1969, p. 28)]

significativement encore, il s'appuie sur la conceptualité embryonnaire qui leur procure une intelligibilité. Ainsi, dans l'ouverture de son traité sur la méthode en Analyse, au moment d'envisager de manière directe la constitution de ce cadre, les mots de Boole se laissaient tout simplement relayer par ceux du dernier des algébristes de Cambridge. Dans son premier opuscule logique, en revanche, il semble avoir assumé intégralement ce cadre en tant que tel en son propre nom, sans que cette incorporation ne change rien à l'essentiel :

> They who are acquainted with the present state of the theory of Symbolical Algebra, are aware, that the validity of the processes of analysis does not depend upon the interpretation of the symbols which are employed, but solely upon the laws of their combination. Every system of interpretation which does not affect the truth of the relations supposed, is equally admissible, and it is thus that the same process may, under one scheme of interpretation, represent the solution of a question on the properties of numbers, under another, that of a geometrical problem, and under a third, that of a problem of dynamics or optics. This principle is indeed of fundamental importance; and it may with safety be affirmed, that the recent advances of pure analysis have been much assisted by the influence which it has exerted in directing the current of investigation. (Boole, 1847, p. 3)[204]

Ces mots d'ouverture du traité, qui fournissent la charpente problématique et conceptuelle sur laquelle le Calcul Logique sera bâti, pourraient passer pour un résumé parfait des acquis de l'École de Cambridge. Tout y est : la nature symbolique de l'Algèbre, l'existence d'un principe fondamental, la détermination des lois combinatoires, les concepts sémiotiques permettant de comprendre l'ensemble du processus (interprétation, représentation), le détachement de la Géométrie, et encore plus de l'Arithmétique, qui sous le refus de la conception des mathématiques comme science de la grandeur (*magnitude*), fera l'objet des lignes suivantes… Tous ces éléments que Boole concentre dans ce passage constituent le véritable point de départ d'une recherche logique d'un type nouveau. Ils sont très exactement ceux qui ont guidé ses premières recherches mathématiques. Ils n'en sont pourtant pas le résultat. En effet, on cherchera en vain dans ces travaux les réflexions, les remarques, la spontanéité conceptuelle, les argumentations risquées, les catégorisations transitoires, les illustrations fugaces, les analyses de cas, les thèses générales, bref, toutes ces problématisations d'ordre sémiotique qui caractérisaient les recherches des algébristes, de

---

[204] [Ceux qui sont au courant de l'état présent de la théorie de l'algèbre symbolique savent que la validité des démarches de l'analyse ne dépend pas de l'interprétation des symboles utilisés mais seulement des lois de leur combinaison. Tout système d'interprétation qui n'affecte pas la vérité des relations posées comme principes est également acceptable. C'est ainsi que le même procédé peut, selon tel schéma interprétatif, représenter la solution d'un problème portant sur les propriétés des nombres, selon un autre, celle d'un problème géométrique, selon un troisième, celle d'un problème de dynamique ou d'optique. Ce principe est évidemment d'une importance fondamentale et l'on peut affirmer sans risque que les développements récents de l'analyse pure ont été beaucoup favorisés par l'influence qu'il a exercé en orientant le courant de la recherche. (1969, p. 27)]

Woodhouse à Gregory. Et pourtant, tous ces éléments sont bien là, avec la présence sobre de tout point de repère. On comprend alors que ce que les recherches mathématiques de Boole montrent, au fond, c'est que l'Algèbre abstraite, de chemin incertain à emprunter est devenue guide fiable à utiliser, de problème est devenue solution, d'objet est devenue cadre. C'est dire que la mathématisation de la logique opérée par Boole, point de départ de la formalisation du sens dans laquelle la philosophie trouvera l'une de ses conditions fondamentales au seuil de sa contemporanéité, sera motivée, définie et soutenue par l'ensemble de ces déterminations sémiotiques directement issues des problématisations des pratiques mathématiques qui furent celles de l'Algèbre abstraite anglaise.

L'ensemble de ces déterminations ne fournit pas cependant une théorie achevée de la signification et du sens capable de justifier et d'assurer la mise en œuvre d'une logique mathématisée. Cette théorie, qui ne saurait faire l'économie d'une confrontation au langage courant, Boole se chargera de l'articuler lui-même, timidement d'abord dans son opuscule de 1847, de façon plus généreuse et solide ensuite lors de la composition de son grand ouvrage *The Laws of Thought*[205] en 1854. C'est alors que des notions nouvelles, comme celle d'abstraction contre laquelle Frege voudra construire sa logique, viendront ordonner le paysage d'une théorie formelle du sens. On le voit immédiatement dans *The mathematical*…, où dès l'introduction Boole énonce ouvertement la connexion intime entre théorie logique et théorie du langage[206]. Sans vouloir s'étendre néanmoins sur ce sujet, il se contente de citer le théologien espagnol Joseph Blanco White, proche de l'École d'Oxford et de Whately en particulier, pour qui la question du langage se pose en termes d'abstraction :

> The Syllogism is nothing but a result of the classification of things, which the mind naturally and necessarily forms, in forming a language. All abstract terms are classifications; or rather the labels of the classes which the mind has settled. (cité dans Boole, 1847, p. 5)

Mais le besoin de davantage de développements se fait sans doute sentir aussitôt, si bien que Boole ajoute dans un post-scriptum au moment de l'impression du livre :

> The remarks on the connexion between Logic and Language p. 5, are scarcely sufficiently explicit. Both the one and the other I hold to depend very materially upon our ability to form general notions by the faculty of abstraction. Language is an instrument of Logic, but not an indispensable instrument. (Boole, 1847, p. 81)

---

[205] Il convient de rappeler au moins une fois le titre complet de cet ouvrage majeur : *An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities.*

[206] Boole (1847, p. 5) : « That which renders Logic possible, is the existence in our minds of general notions,—our ability to conceive of a class, and to designate its individual members by a common name. The theory of Logic is thus intimately connected with that of Language. A successful attempt to express logical propositions by symbols, the laws of whose combinations should be founded upon the laws of the mental processes which they represent, would, so far, be a step toward a philosophical language. »

Les développements de ce type ne se limitent aucunement à ces remarques. Ils se poursuivent tout au long du livre[207], et feront, comme nous l'avons dit, l'objet d'une formulation étendue dans *The Laws of Thought*. Plus encore, c'est précisément à partir de telles formulations définissant les principes constituants d'une théorie du sens qu'une notion précise de « formel » sera enfin forgée. En effet, si Boole parle d'expressions, de propositions, d'énoncés « formels », tout comme d'analyses de problèmes, de raisonnements, d'inférences, de processus « formels » voire de résultats, de relations, d'aspects « formels », et finalement de « logique formelle », c'est pour signifier principalement le fait que toutes ces instances sont soumises à des lois formelles[208]. De façon comparable, dans son ouvrage *Formal Logic*, dont la parution est d'ailleurs contemporaine de celle du premier opuscule logique de Boole, De Morgan désigne les *noms* (*names*) comme étant l'objet de la logique formelle :

> In all assertions, however, it is to be noted, once for all, that *formal logic*, the object of this treatise, deals with *names* and not with either the *ideas* or *things* to which these names belong. We are concerned with the properties of 'A is B' and 'A is not B' so far as they present an idea independently of any specification of what A and B mean: with such ideas upon proportions as are presented by their *forms*, and are common to all forms of the same kind. (De Morgan, 1847a, pp. 42-43)

Que ce soit à travers le concept de loi sur lequel insiste Boole, ou à travers celui de nom définissant la forme des propositions pour De Morgan, la notion générale de « formel » renvoie directement aux mécanismes propres de l'Algèbre symbolique : les « lois » de Boole ne sont autres que les lois de combinaison symboliques mises en avant par les algébristes, les « noms » de De Morgan ne sont que les symboles définis par ces lois. Et si l'une et l'autre peuvent être appelés « formels », c'est dans la mesure où ils définissent et portent bien sur des « formes », dans le sens mathématique très précis que ce terme comportait vers le début du XIXe siècle, par exemple, lorsque Peacock parlait de « permanence des formes équivalentes »[209].

---

[207] Où, par exemple, la notion d'abstraction se trouve spécifiée : « It will not be necessary that we should here enter into the analysis of that mental operation which we have represented by the elective symbol. It is not an act of Abstraction according to the common acceptation of that term, because we never lose sight of the concrete, but it may probably be referred to an exercise of the faculties of Comparison and Attention. » Boole (1847, p. 16).

[208] Par exemple, lorsqu'il affirme : « Formal logic can only take account of relations which are formally expressed […]; and it may thus, in particular instances, become necessary to express, in a formal manner, some connexion among the premises which, without actual statement, is involved in the very meaning of the language employed. » (Boole, 1854, p. 204). « Exprimées formellement » veut dire à son tour : exprimées sous la forme d'une loi formelle de combinaison. Cf. Boole (1854, p. 96 sq.), où Boole renvoie dans ce passage, et (1854, p. 45), où il parle d' « expressions formelles ».

[209] Cf. *supra* p. 174.

Il reste qu'une extension aussi générale de la signification pourtant bien précise de la notion de « formel », non moins que sa mise en résonnance ou en opposition avec le réseau d'autres concepts (tels « abstrait », « matériel », « contenu », etc.) qui dessine la configuration que nous avions commencé dégager à partir de l'œuvre de Schröder[210], n'est possible que par la médiation d'une théorie générale de la signification ou du sens qui articule l'emprunt logique des déterminations mathématiques. Comment justifier sinon qu'une expression langagière, une proposition logique ou une analyse de problèmes puissent être appelées « formelles », et traitées en conséquence, *dans le même sens* où les lois de combinaison algébriques le sont ? Une théorie du sens est donc ce qui assurera ce passage selon lequel une expression, une proposition ou une analyse se laisse traiter comme le terme d'une équation algébrique (ou comme une « forme » dans une « équivalence »), parce que les équations algébriques se laissent elles-mêmes comprendre tour à tour comme des expressions langagières, des propositions logiques et d'analyses de problèmes.

[210] Cf. *supra* pp. 42 sqq.

II.3. La formalisation booléenne du sens

II.3.1. La configuration sémiologique de la logique booléenne

Malgré sa nature éminemment sémiotique, l'Algèbre développée par les mathématiciens anglais précédant Boole ne fournit donc pas une théorie du sens à proprement parler. Celle-ci n'apparaîtra comme telle que dans les travaux logiques de Boole. Ce qui veut dire que sa formulation aura lieu dans un espace *qui n'est plus celui des mathématiques*. Dès lors, la question se pose de savoir quel est le rôle précis joué finalement par l'Algèbre abstraite dans la constitution d'une telle théorie. Ce qui est une façon particulière de poser la question : quelle est la part proprement mathématique dans le processus historiquement déterminé de mathématisation de la logique ? Ou encore, plus précisément : quelle place revient aux mathématiques, représentées en l'occurrence par l'Algèbre symbolique, dans la genèse d'une théorie formelle du sens, destinée à irradier dans bien de domaines, et notamment, à travers la logique, dans celui de la philosophie ?

Ce que les mathématiques, sous la forme de l'Algèbre, offrent pour une théorie du sens, c'est *un ensemble positif de règles, procédures, mécanismes et dispositions définissant le fonctionnement des signes en tant que tels*. Appuyées sur des pratiques sémiotiques propres à la tradition du savoir mathématique et définies avec la précision correspondant à ses exigences internes, ces règles et procédures apparaissent néanmoins comme une dimension appartenant au signe en général. Elles n'en énoncent pas la nature pour autant ; elles se contentent d'exposer une manière de se comporter qui reste de l'ordre du pur fonctionnement. Ou plutôt, elles ne disent de la nature du signe en général que ce qui est strictement nécessaire pour expliciter aussi précisément que possible un ou plusieurs modes de fonctionnement pur. L'Algèbre abstraite, en tant que théorie mathématique, n'est à l'égard du sens ou de la signification qu'une proto-théorie, comme nous l'avons suggéré à plusieurs reprises. Mais de manière plus fondamentale, elle constitue comme un socle fonctionnel capable d'agir à la façon d'un *a priori sémiotique*. En tant que tel, elle ouvre la possibilité et détermine les conditions de l'édification d'une théorie du sens et de la signification, ayant pour vertu et pour impératif de pouvoir se traduire sans solution de continuité en logique. Sans doute lorsque Boole se livre à une réflexion sur le langage et la signification, développant la théorie du sens qui viendra donner une justification, voire un fondement, à sa logique, il se voit confronté à la tâche de déterminer ce qu'est un signe en général. Car c'est sur le fond de ce signe général que sera prélevé le signe proprement logique, ne serait-ce que pour montrer enfin, sinon la réductibilité, du moins la traductibilité raisonnable dans celui-ci de celui-là. Cette détermination d'une nature des signes en général sera cependant réalisée dans les limites, vastes mais définies, induites par l'ensemble de mécanismes qui prescrivent de manière anticipée leur fonctionnement. Ces limites, qui ne restreignent pas plus qu'elles n'habilitent, Boole les aura assimilées à l'occasion de ses premiers travaux mathématiques. Elles resteront par la suite présupposées, hors de portée de toute critique. Au point où même les concepts élémentaires de la proto-théorie algébrique du sens demeureront inchangés pour l'essentiel, comme en témoigne la définition générale du signe avancée dans *The Laws of Thought* :

> *Definition*.—A sign is an arbitrary mark, having a fixed interpretation, and susceptible of combination with other signs in subjection to fixed laws dependent upon their mutual interpretation. (Boole, 1854, p. 25)[211]

Cette surface sans guère d'épaisseur qui n'accueille que le pur fonctionnement des signes, distribuant avec autorité leurs places et organisant de manière minutieuse leurs déplacements et leurs fixités, leurs libertés et leurs interdictions, leurs identités et leurs métamorphoses, contraint donc la conception générale du signe, et avec lui de la signification, qui peut et doit soutenir l'émergence d'une logique de type nouveau. C'est cette contrainte, d'ailleurs, qui assure la possibilité d'une mathématisation effective de la logique. Car, d'une part, elle induit une notion de signe en adéquation avec des mécanismes sémiotiques proprement mathématiques, mais de l'autre elle prétend valoir tout de même comme conception générale, devant dès lors s'accorder avec le contenu d'autres régions signifiantes, et de la logique notamment. De la sorte, par l'intermédiaire d'une telle conception du signe, les emprunts de ces mécanismes dans d'autres territoires du sens se trouvent non seulement légitimés mais opérationnalisés. Qui plus est, c'est par ces contraintes particulières qu'un concept tout aussi particulier de formel pourra être proposé et prendre sa place à l'intérieur d'une théorie du sens, qui pourra être à son tour dite elle-même « formelle ». C'est pour cette

[211] [*Définition* : Un signe est une marque arbitraire dont l'interprétation est fixée et qui est susceptible d'être combiné à d'autres signes conformément à des lois déterminées dépendant de leurs interprétations respectives. (1992, p. 43)]

raison que le processus de mathématisation de la logique peut être compris plus généralement comme celui d'une *formalisation du sens*.

Nous avons dit que cet *a priori* sémiotique ne détermine pas la *nature* des signes mais uniquement des contraintes et des licences au niveau leur *fonctionnement*. Mais ce serait aller trop vite que de comprendre cette dimension où se joue le pur fonctionnement des signes comme un simple décalque des symboles de l'Algèbre anglaise, conçus comme *abstraits*, et définis uniquement comme des *opérations* à travers de lois combinatoires. Car « abstrait » est déjà une nature possible du signe en tant que tel, de la même façon qu' « opératoire », ou plus précisément « combinatoire », n'est qu'un type de fonctionnement sémiotique parmi d'autres. Plus exactement, abstraite peut être dite la nature d'un signe dont le fonctionnement est contraint par des règles combinatoires. Au début de nos recherches nous étions amenés à rendre compte de la configuration conceptuelle dans laquelle se développait la logique et la philosophie des Booléens, afin d'identifier le point autour duquel s'articulait la polémique pleine de malentendus entre Schröder et Frege[212]. On a pu voir ainsi que l'ensemble du système était organisé de manière globale autour de l'opposition forme-contenu. Mais cette opposition globale n'était pas simplement posée comme telle. Elle était le résultat d'une série d'articulations fines qui associaient la formalité à l'extensionalité, et opposaient celle-ci au contenu, par l'intermédiaire de la notion d'abstraction. Le caractère abstrait comme détermination première des éléments fondamentaux de la signification s'érigeait par là en clef de voûte de l'ensemble de ce système conceptuel : d'une part il assurait le passage, par l'intermédiaire de la notion de *classe*, vers le terrain d'une logique opératoire parce qu'extensionnelle, et de là vers un concept du formel en général ; de l'autre, il maintenait à distance tous les éléments individuels ou singuliers capables de menacer le bon fonctionnement de l'opérativité extensionnelle, en les reléguant à la place du contenu, creusant un écart que les notion de représentation, et plus concrètement d'interprétation, arrivait tout de même à mesurer (Figure 2).

[212] Cf. *supra* p. 41 sq.

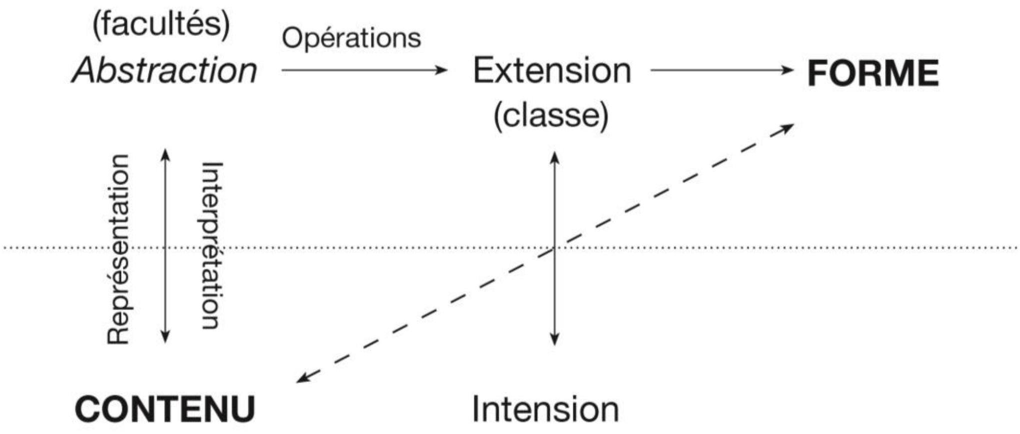


Figure 2

Ce que nous découvrons maintenant, c'est que ce dispositif conceptuel ordonnant sous un signe formel l'espace général de la signification repose sur un socle sémiotique précis qui contraint la distribution des places respectives. Ce support n'est pas constitué par de grands concepts métaphysiques, généraux et spéculatifs, mais il se présente plutôt comme une surface de fonctionnement pur. À la suite de notre parcours à travers le contexte problématique dans lequel émerge la logique booléenne, nous sommes en mesure d'en dégager des déterminations précises. En effet, cette surface nous est apparue comme peuplée par :

1) un certain nombre de *problèmes* dans le fonctionnement d'expressions, telles que e^x, lorsque $x = x\sqrt{-1}$ (c'est-à-dire $e^{x\sqrt{-1}}$), ou $\mathrm{X}_0 \frac{d^n u}{dx^n} + \mathrm{X}_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + \mathrm{X}_n u = \mathrm{X}$, (où X_i est une fonction de la variable libre *x*), où encore $\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$ lorsque a n'est pas une quantité constante ;

2) un faisceau ouvert de *techniques* efficaces, ou mieux, de *stratégies* « qui marchent », comme le développement $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$, la compréhension de $x - 6 = +\sqrt{-1}$ à partir de $x^2 - 12x + 36 = -1$, l'analogie entre

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

et

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

ou la réécriture de l'équation différentielle précédente sous la forme : $f_0(\mathrm{D})u + f_1(\mathrm{D})e^{\theta}u + f_2(\mathrm{D})e^{2\theta}u + \cdots = \mathrm{U}$; et

3) un ensemble de *solutions* partielles, à la fois particulières et connectées, communicant par des règles ou procédures communes explicitables, par exemple : la

détermination de $\left(e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}\right)$ à partir de la combinaison des développements respectifs des deux termes, selon une extension des règles algébriques par l'introduction des lois combinatoires portant sur le symbole « $\sqrt{-1}$ », et la possibilité en conséquence de déterminer analytiquement des propriétés trigonométriques ; ou l'établissement de l'expression $f_m(\pi) = \frac{(\lambda-1)f_{m-1}(\pi)}{(\lambda^m-1)\pi}$ comme formule pour la détermination des coefficients variables, suivant une extension de la commutativité des symboles à partir de la loi $\varrho^m f(\pi)u = \lambda^m f(\pi)\varrho^m u$, à laquelle l'équation différentielle peut être ramenée par l'intermédiaire de son écriture[213].

Le plan sans bords défini par ce faisceau de pratiques et de formes sémiotiques débouche pour l'essentiel, dans ce cas particulier, sur l'établissement de règles d'ordre combinatoire. On verra dès lors l'abstraction s'installer comme qualificatif privilégié des différentes procédures et éléments sémiotiques, correspondant aux exigences d'opérativité et d'interprétabilité selon lesquelles ces pratiques se donnent l'intelligibilité propre qui leur permet d'étayer l'établissement de leurs règles. Ainsi, les algébristes anglais parleront, tour à tour, par exemple, de l'abstraction de la partie numérique des coefficients (Woodhouse, 1803, p. 79), d'une considération abstraite « sans référence à des nombres spécifiques » (Woodhouse, 1803, p. 145), d'une représentation abstraite des nombres (Babbage, 1826, pp. 12-13), des signes et des termes abstraits leur correspondant (Babbage, 1826, p. 14), des quantités ou des nombres abstraits représentés par ces signes (Babbage, 1826, p. 18; Peacock, 1830, pp. ix, 1; 1826/1849, p. 369), et en général de la « science abstraite » par laquelle tous ces éléments reçoivent un traitement (Woodhouse, 1801, p. 89; 1802, p. 87; 1803, p. i) (Peacock, 1833, pp. 186-188). Si cette liste n'est pas exhaustive, elle est pourtant suffisamment représentative du fait que les mathématiciens de Cambridge font du qualificatif « abstrait » un usage à la fois dispersé et limité : cette notion vient chez eux qualifier des pratiques et des objets à des dimensions multiples, mais qui restent tout de même confinées dans l'espace des mathématiques ; qui plus est, elle se définit dans la plupart des cas de manière privilégiée en fonction de la notion de *nombre*. Ce qui fait que, dans l'ensemble disséminé de son effectivité, l'évocation de l'abstraction comme *faculté* ou *principe* soit après

---

[213] Sur le premier exemple, cf. Woodhouse (1801, pp. 93-100), où Woodhouse lui-même pose la question en termes de problèmes et de solutions : « In the present inquiry, it is immaterial how the symbol $\sqrt{-1}$ originated: I think its origin most probably accounted for thus. The determination of general rules for the combination of algebraic quantities, was probably posterior to the actual solution of many problems, effected by particular artifices. During the solutions, certain similar parcels of characters presented themselves, which it was necessary either to combine or separate; and, to obtain general rules for their combination and separation, the first algebraists feigned forms similar to what really presented themselves in specific cases » (1801, pp. 94-95). On pourra voir aussi la longue note de Woodhouse à ce passage, qui développe l'idée que « la détermination de règles générales pour les opérations algébriques fut postérieur à la solution effective des problèmes » (pp. 95-96). Sur le second exemple, on pourra se référer au détail du traité de Boole (1844) dont nous avons esquissé les idées principales dans le chapitre précédant.

tout rare[214], voire pratiquement inexistante en tant que nature du signe en général. Cette situation n'a rien d'étonnant : elle s'explique simplement par le fait que cet usage dispersé de la notion d'abstraction était sans doute suffisant pour l'organisation, la composition et la stabilisation de l'ensemble de pratiques définissant le plan algébrique à l'intérieur de l'espace mathématique. Au demeurant, par son enracinement intime dans ces fonctionnements pratiques à travers les concepts d'opération et d'interprétation, ainsi que par l'absence de recours à une instance extérieure à ces pratiques (et dont elle recevrait son sens), la notion d'abstraction, pour autant qu'elle a une effectivité proprement mathématique, ne comporte aucun trait de métaphoricité. Il reste que cette complexion particulière de pratiques et d'instruments, aussi chétive soit-elle dans sa configuration conceptuelle, constituera bien une base solide qui ne se limitera pas à supporter, mais induira aussi, une notion générale de signe au moment où celle-ci sera requise par la construction d'un calcul logique.

II.3.2. L'intégration de la notion d'abstraction

C'est à partir de ces fondations, de cette *archéologie*, que se mettra en place l'architecture conceptuelle définissant la théorie du sens booléenne. La dispersion dans l'usage de la notion d'abstraction sera intégrée autour d'une notion d'abstraction qui se présentera à première vue comme faculté ou principe fondamental de la pensée. En effet, une certaine théorie des facultés semble permettre à Boole de penser un principe unificateur pour la multiplicité d'usages de la notion d'abstraction dans l'Algèbre anglaise :

> …the analysis of the primary process which explains the genesis of the elements of Logic from the materials which experience supplies is an interesting branch of mental philosophy and to some extent it involves the consideration of the same faculties as are employed in the subsequent operations with which Logic is more especially concerned. Comparison by which we note some particular in which different objects of experience agree. Abstraction by which we fix the attention upon that point of agreement for the exclusion of all other considerations and Generalization by which we conceive of a class of things of which that property shall be the distinguishing mark or attribute seem to be the mental elements involved in the formation of concepts. Sometimes the term Abstraction is used singly and in a larger sense to designate the whole of the process above described. (Boole, 1856, pp. 67-68)

On voit ainsi que l'abstraction comme principe général réunit l'essentiel des procédures propres à la méthode algébrique : comparaison de formes, abstraction par réécriture

[214] Cf. par exemple Woodhouse (1802, pp. 104, 120).

symbolique, généralisation des propriétés à partir des nouvelles formes symboliques. Par cette unité assurée sous la forme d'un principe général, l'abstraction pourra occuper la place d'articulation au carrefour des notions d'interprétation et d'opération, qui deviennent ainsi, quant à elles, comme des axes structurant suivant une double dimension l'espace nouveau d'une formalisation du sens[215]. Si bien qu'en suivant l'axe de l'interprétation (ou de la notion complémentaire de représentation), le signe se trouve défini comme abstrait en opposition à tout contenu concret ou signification (*meaning*) substantielle, déterminant par cette opposition le noyau conceptuel spécifique d'une théorie du sens ou de la signification. Nous avons déjà évoqué l'indépendance des lois des signes par rapport aux contenus ou significations proclamée par Boole[216]. Or les ressorts de cette opposition entre un plan sémiotique abstrait et un contenu ou une signification matériels puisent dans les notions de représentation et d'interprétation façonnées par les algébristes anglais, moyennant l'abstraction comme principe articulateur général. Boole le dit explicitement dans un passage tardif de ses manuscrits :

> …every scientific development of Logic presupposes the possibility of separating by abstraction the material and the formal elements of language or to use a less technical phrase of distinguishing between the office of words and their special meaning. We are able for example to contemplate the noun substantive as such and to study the laws to which from its very office of representing *things* it is subject – laws which are independent of the nature of the things represented. As signs moreover are in their construction arbitrary we can replace words by letters, i.e. we can represent the things about which we reason by letters. […] The relations connecting the things about which we reason, whether our perception of those relations depends upon the faculty of Apprehension or of Judgment or upon any other, we are upon the same ground permitted to express either by symbols definite in their interpretation or by collocation or by the union of both means. (Boole, 1997, p. 186)

Ce que Boole appelle ici « *special meaning* » est associé aux aspects matériels du langage, entendant par là, non pas le support matériel des signes (sons, marques sur un papier, etc…), mais le contenu particulier représenté par lui. L'opposition forme-contenu vient ainsi recouvrir la vieille opposition forme-matière, et interprétation et signification se trouvent par là confondues[217]. Mais on aurait tort de croire qu'en appelant sens ou signification (*meaning*) ce contenu matériel, et en le dissociant par abstraction des « formes » linguistiques (mots, lettres, symboles), Boole sanctionne l'impossibilité d'une théorie formelle du sens. Bien au

[215] Cf. Figure 2, *supra* p. 211.

[216] *Supra*, p. 41.

[217] Encore dans ses manuscripts, Boole écrit (1997, p. 190) : « Here by interpretation is meant the putting for each symbol of its meaning ».

contraire, si Boole écarte cette « signification spéciale » associée à la matérialité, c'est pour montrer qu'il est possible d'identifier, dans la fonction de signification propre aux signes et au langage, *une dimension de détermination purement formelle, capable de renverser*, ne serait-ce que dans des cas précis mais décisifs, *la primauté de l'interprétation matérielle sur le fonctionnement formel des signes*. C'est pourquoi, partant du postulat qui affirme l'indépendance entre forme et signification matérielle sur laquelle ses prédécesseurs et contemporains asseyaient la validité des raisonnements logiques[218], Boole ne peut s'empêcher de leur reprocher de l'avoir mal compris, et en particulier, d'avoir négligé un fait pourtant remarquable, à savoir que :

> …the meaning of words is not always wholly independent of the form of the expression in which they occur. Thus the formula "Xs and Ys" does not express an intelligible concept unless the symbols connected by the conjunction *and* be interpreted to signify classes of things wholly distinct. Either symbol indeed taken by way of preference may be considered as arbitrary but when the meaning of one has been fixed that of the other is no longer wholly arbitrary. If by the term "Xs" we agree to mean "mammalia" we cannot interpret the term "s" [sic][219] by "marine animals" because cetacæ which are marine are included in the class of mammalia and the expression "mammalia and marine animals" taken in strictness would be unmeaning. (Boole, 1856, p. 72)

L'exemple donné par Boole n'est certainement pas le plus heureux, puisque nous savons que la logique formelle, à commencer par celle de Boole lui-même, sera capable de donner un sens rigoureux à la conjonction des classes non disjointes. Mais l'essentiel n'est pas là. Il est plutôt dans la possibilité de renverser le primat absolu de l'interprétation des signes sur leur fonctionnement. C'est ainsi que, après avoir évoqué l'existence possible d'autres cas de même nature, Boole conclue sans ambiguïtés :

> …the intellectual operations connected with the faculty of Conception do in certain cases impose conditions upon the otherwise arbitrary concepts which are submitted to them and hence it is that the forms of language which is but the outward expression of thought impose conditions of *interpretability* upon the symbols which they connect. (Boole, 1856, p. 72)

C'est dans les lignes qui suivent immédiatement cette affirmation que Boole assume une conception de la logique comme science noétique plutôt qu'ostensive, à l'égard de laquelle Frege cherchera, comme on l'a vu, à prendre ses distances par des moyens inédits[220]. Néanmoins, au moment où Boole l'énonce, ce postulat noétique a tout de même une valeur

---

[218] Boole évoque notamment la formulation de Whately dans *Elements of Logic* (Boole, 1856, pp. 71-72).

[219] Boole pense bien évidement à "Ys". Nous ignorons s'il s'agit d'une faute dans les manuscrits ou dans leur édition.

[220] Voir *supra* p. 96.

critique, qui permet à Boole de définir sa tâche, et avec elle, celle de la logique formelle tout court :

> I shall while investigating the laws of the intellectual operations determine at the same time the conditions of their interpretability and then shew that the application of the formal laws as a completed system does implicitly and in a very remarkable manner supply the place of that direct consideration of the conditions of interpretability which the ostensive view of the subject would render necessary. (Boole, 1856, pp. 72-73)

Formulé dans les termes spécifiques déterminés par la configuration conceptuelle que Boole est en train de disposer, cet énoncé comporte pourtant *un principe plus général qui reconnaît et institue l'existence d'une dimension purement formelle de la signification ou du sens lui-même, irréductible à sa dimension ostensive*. Les successeurs de Boole, à commencer par Frege, auront beau critiquer les ressorts fondamentaux du système booléen, ils ne sauront pourtant contester ce principe qui constitue la condition même du nouveau savoir logique. Non pas cependant à cause d'une quelconque évidence qu'il porterait en tant qu'énoncé métaphysique. Car dans le contexte de son énonciation comme principe, cet énoncé n'est pas premier, et ne cherche pas à l'être. Il n'est même pas formulé de manière générale, mais se trouve comme enveloppé dans les termes de cette solution particulière qui est celle de Boole, engageant toute une série de concepts comme celui d'interprétation, de représentation ou d'abstraction, agencés selon une disposition précise, que Boole fait jouer contre des formulations métaphysiques générales venant d'ailleurs, comme celle de Whately. C'est cela, au demeurant, qui fait sa nouveauté. Mis en lumière par les exigences systématiques de la logique booléenne, ce principe n'est que l'expression théorique ou philosophique des conditions à la fois formelles et pratiques, associées aux transformations de l'espace des mathématiques comme effet de l'émergence de l'Algèbre abstraite. De ce fait, il ne coïncide que superficiellement avec des énoncés semblables ou analogues le précédant. Mais il ne s'identifie pas davantage avec les termes spécifiques de la solution booléenne sous lesquels il a l'occasion de s'énoncer. Car rien n'empêche que l'irréductibilité de cette dimension formelle de la signification puisse être déterminée autrement que comme primauté de la forme sur le contenu, du fonctionnement sur l'interprétation, et qu'elle se trouve par là réinvestie par de nouvelles articulations. Seulement, les nouveaux investissements ne sauraient se contenter d'une postulation spéculative ; il leur sera exigé en revanche de proposer un réarrangement particulier, du moins aussi précis et efficace que celui de Boole, de l'espace qui mène des pratiques mathématiques jusqu'aux constituants d'une logique.

II.3.3. Opérations

Toujours est-il que l'ouverture problématique de cet espace s'effectue chez Boole sous la forme de l'axe « signe abstrait général–contenu concret individuel » tracé par la notion d'interprétation. Ainsi défini, le problème de la formalisation du sens sera posé comme celui de la récusation, ne serait-ce que sur certains points bien déterminés, du primat de l'interprétation sur le fonctionnement pur des signes. Comme le laissent voir les différents passages de Boole que nous venons d'évoquer dans les pages précédentes, c'est le concept d'*opération* qui viendra investir de façon particulière la fonctionnalité pure des signes, et constituer le second axe de cet espace, s'adjoignant à celui de l'interprétation. C'est en suivant cet axe qu'aura lieu le passage latéral qui mènera du territoire spécifique d'une théorie du sens articulé par la polarité « signe abstrait-contenu concret », au terrain propre d'une logique dès lors formelle. En effet, ce sont bien des opérations algébriques qu'il s'agit lorsque Boole parle, dans les passages que nous venons d'évoquer, des « symboles définis dans leur interprétation » ou des simples « collocations » de symboles (comme lorsque l'on exprime la multiplication entre *a* et *b* par « *ab* »). De même, si la « faculté de Conception » établit des conditions sur les concepts, et donc sur leur interprétabilité, elle ne le fait que par l'intermédiaire des « opérations intellectuelles » connectées à elle. Au point où c'est à ces opérations, et non pas aux facultés de l'esprit, que seront rapportées les lois formelles suivant lesquelles seront déterminées de manière directe les conditions logiques d'interprétabilité. C'est dire que l'abstraction comme faculté de l'esprit se verra proprement « opérationnalisée ».

L'opérationnalisation de l'abstraction signifie, d'abord, qu'elle sera conçue comme *opération* de l'intellect, plutôt que comme faculté ou puissance de l'esprit :

> …it is agreeable to common usage to say that […] the mind possesses certain powers or faculties by which the mental regard may be fixed upon some ideas, to the exclusion of others, or by which the given conceptions or ideas may, in various ways, be combined together. To those faculties or powers different names, as Attention, Simple Apprehension, Conception or Imagination, Abstraction, &c., have been given,—names which have not only furnished the titles of distinct divisions of the philosophy of the human mind, but passed into the common language of men. Whenever, then, occasion shall occur to use these terms, I shall do so without implying thereby that I accept the theory that the mind possesses such and such powers and faculties as distinct elements of its activity. Nor is it indeed necessary to inquire whether such powers of the understanding have a distinct existence or not. We may merge these different titles under the one generic name of *Operations* of the human

mind, define these operations so far as is necessary for the purposes of this work, and then seek to express their ultimate laws. (Boole, 1854, p. 41)[221]

Que l'abstraction soit une opération veut donc dire que les différentes facultés de l'esprit qui se groupaient vaguement sous ce terme, se trouvent projetées sur un même plan où leur distinction se laisse comprendre comme une distinction entre des lois qui seraient au fond de même nature. Mais ensuite, l'opérationnalisation de l'abstraction veut dire que, par cette compréhension en termes d'opération au lieu de faculté, ses modes de fonctionnement pourront être explicités et des règles pour leur manipulation établies, au point où l'abstraction se laissera traiter à travers ceux-ci sans reste (l'abstraction sera donc rendue « opératoire ») :

> Now let the system of representation thus adopted [représentation des choses par des lettres] be complete and thorough-going and the processes of reasoning assumes the character of a Grammar or a Calculus. The essential laws of thought become transformed into the laws of a symbolical language and the form and value of the possible science are determined accordingly. (Boole, 1997, pp. 186-187)[222]

L'opérationnalisation de l'abstraction ne comporte pas uniquement des effets sur la logique. La fin du passage de *The laws of thought* précédemment cité montre clairement que l'abstraction, pour autant qu'elle concerne la logique, *perd grâce à cette opérationnalisation son caractère éminemment psychologique*. Avant d'être un attribut et une puissance de l'esprit, elle se présente comme la nature générale du signe. Plus encore, elle ne devient l'attribut d'un esprit *que parce qu*'elle constitue la nature du signe en général. Les manuscrits de Boole abondent en considérations à propos de la primauté, sinon ontologique, du moins méthodologique ou épistémologique, des signes sur les facultés, du sémiotique sur le cognitif ou psychologique, que *The Laws of Thought* assumera entièrement face aux hésitations ou omissions éventuelles de *The Mathematical Analysis…* à ce sujet. Des notes postérieures à l'ouvrage de 1854 ne laissent aucun doute quant à la position de Boole à cet égard :

---

[221] […on s'accorde couramment à dire que […] pour toutes les idées ou notions particulières qui se présentent à lui, l'esprit possède certains pouvoirs ou facultés qui lui permettent de fixer le regard mental sur certaines idées à l'exclusion d'autres, et par lesquels les conceptions ou les idées données peuvent, de plusieurs façons, se combiner. A ces facultés ou pouvoirs l'on a donné différents noms tels que Attention, Appréhension simple, Conception ou Imagination, Abstraction, etc. – des noms qui, non seulement ont constitué autant de titres de chapitres en philosophie de l'esprit, mais sont passés dans le langage commun des hommes. Toutes les fois donc que l'occasion d'employer ces termes se présentera, je le ferai, sans que cela signifie cependant une adhésion à la théorie selon laquelle l'esprit possède tels et tels pouvoirs et facultés comme autant d'aspects de son activité. Et il n'est pas non plus vraiment nécessaire de se demander si ces facultés de l'entendement existent séparément ou non. Nous pouvons réunir ces différents titres sous l'unique terme générique d'*Opérations* de l'esprit humain, définir ces opérations autant qu'il est nécessaire pour les objectifs de cet ouvrage, avant de chercher à exprimer leurs lois ultimes. (1992, p. 48)]

[222] Cf. aussi Boole (1997, p. 107) : « General Question: How are the laws of thought to be determined? / Particular Question. How are they to be determined with relation to the particular faculty of conception. / 1. By considering the different operations involved in conception – 2ndly. By enquiring under what conditions these operations are possible. »

> Different Theories of Abstraction.
>
> 1st. That we form a general notion not accurately representing any particular individual.
>
> 2nd Berkeley's theory that we form the conception of an individual and make this stand for the genus.
>
> Both these theories contain an element of truth. The true doctrine is to be found in a consideration of the imperfection and vagueness of all sensual images whether as immediately given in perception or as reproduced by imagination. All that is needful is that they should serve the office of signs, should suffice to denote what we mean. Particular measures [are] unimportant. (Boole, 1997, p. 107)

Les signes. Voilà tout ce dont on a besoin. Et sans doute, d'un point de vue métaphysique, les signes dépendent des lois censées découler à son tour du fonctionnement de la pensée comme ensemble de facultés de l'esprit. Mais au niveau de la stricte construction du système booléen ce sont en fait ces facultés qui arrivent à la fin, déduites, ou plus précisément induites à partir des lois qui présupposent une notion à la fois générale et spécifique de signe pour pouvoir être empruntées aux mathématiques. Si bien que, malgré certaines présentations spéculatives, l'opérationnalisation porte en réalité, non pas sur l'abstraction comme ensemble de facultés, ni même sur les opérations intellectuelles, mais sur les signes ou les symboles en tant que tels, qui, conçus par là comme de véritables opérateurs, voient alors leur nature définie en termes d'abstraction. Devant eux, ou plutôt au-delà d'eux, les facultés de la pensée se dressent comme leur double stérile, prêtes à offrir à leur unité une garantie pour le moins douteuse, et ouvrant dans un geste austère à une métaphysique que l'ensemble du système saura au fond rendre inutile. Si, dans la première des propositions de la dérivation des lois dans *The Laws of Thought*, Boole affirme que les lois des symboles logiques sont déduites des opérations de l'esprit, il ne cache pas le fait que ces opérations sont « impliquées dans l'usage strict du langage comme un instrument de raisonnement » (Boole, 1854, p. 42). Le fait que Boole n'ait pas cessé de remanier sa liste de facultés de l'esprit[223], tandis que celle des lois symboliques est demeurée parfaitement stable depuis son tout premier traité de logique, prouve suffisamment pour le reste que les opérations intellectuelles sont déduites des lois et non pas inversement. C'est ainsi que les lois opératoires de l'Algèbre deviendront des opérations propres au signe en général, et que celles-ci seront à leur tour en correspondance

[223] Nous avons vu que dans *The Laws of Thought* Boole en offrait la liste ouverte : attention, simple appréhension, conception ou imagination, abstraction, etc. Nous avons vu également que dans des textes non publiés datant des années immédiatement postérieures il parlait de comparaison, d'abstraction et de généralisation. Dans des manuscrits de la même époque, il parle de présentation directe, comparaison et généralisation (Boole, 1997, p. 54).

avec les opérations intellectuelles associées aux facultés de l’esprit qui se laissent penser ensemble sous la forme de l’abstraction :

> Let letters be used to denote classes of things as subjects of conception and let the four elementary logical operations of Addition Subtraction Composition and Abstraction be expressed by the same signs as the respective arithmetical operations of Addition Subtraction Multiplication and Division. (Boole, 1856, p. 88)

II.3.4. Classe et langage

Mais en faisant des facultés d’abstraction un élément dérivé et externe du système, et en replaçant l’abstraction, comme instance d’articulation, au niveau même des signes, ne risque-t-on de perdre l’unité que l’abstraction comme faculté semblait offrir devant la dispersion qualitative selon laquelle les algébristes se contentaient de la concevoir ? Comment se fait-il, après tout, que l’ensemble du dispositif booléen rende inutile l’intervention unifiante d’une théorie psychologique des facultés ? La réponse apparaît déjà dans le passage que nous venons d’évoquer : c’est la notion de *classe*, en tant que « sujet » des conceptions ou des facultés de l’esprit, qui permettra d’assurer cette unité autrement que par des moyens psychologiques. À la différence des facultés, placées en appendice des signes abstraits qui les traduisent et les supportent, la notion de classe se loge au point même d’articulation entre la théorie du sens booléenne (axée elle-même selon l’opposition signe abstrait-contenu concret) et une logique à la recherche des fondements calculatoires qui lui permettront d’accéder au statut formel. Autrement dit, elle se place au même endroit que la notion d’opération, dont elle est comme la figure complémentaire et le corrélat. Tel que Boole le présente, la classe n’est que le « sujet » sur lequel les opérations s’exercent ; inversement, toute opération définit par son action une nouvelle classe, sur laquelle l’exercice de nouvelles opérations sera possible. Mais à la différence des opérations, déterminées par des lois multiples, la notion de classe demeure univoque, et pourvoit par cette univocité une assise fondamentale à la multiplicité opératoire. Qui plus est, *c’est cette univocité qui tient ensemble le caractère essentiel du langage en tant que régime de signes abstraits d’un côté, et le principe fondamental de la logique en tant que régime d’opérations formelles de l’autre*.

Pour ce qui est du langage, dès *The Mathematical Analysis of Logic* Boole identifie la possibilité même de la logique avec la capacité de concevoir un langage sous la forme d’un système de signes fonctionnant comme des noms communs, et correspondant à des notions générales définissant des classes comme des collections d’objets :

> That which renders Logic possible, is the existence in our minds of general notions,—our ability to conceive of a class, and to designate its individual members by a common name. The theory of Logic is thus intimately connected with that of Language. (Boole, 1847, pp. 4-5)[224]

La classe capture ainsi l'abstraction comme nature fondamentale des signes, dont les notions générales sont la marque dans le langage. C'est cette notion de classe qui permet dès lors de concevoir celle d'opération sous le régime de laquelle les signes d'un langage finiront par être entièrement déterminés. Comme Boole ajoute aussitôt :

> Assuming the notion of a class, we are able, from any conceivable collection of objects, to separate by a mental act, those which belong to the given class, and to contemplate them apart from the rest. Such, or a similar act of election, we may conceive to be repeated. The group of individuals left under consideration may be still further limited, by mentally selecting those among them which belong to some other recognised class, as well as to the one before contemplated. And this process may be repeated with other elements of distinction, until we arrive at an individual possessing all the distinctive characters which we have taken into account, and a member, at the same time, of every class which we have enumerated. It is in fact a method similar to this which we employ whenever, in common language, we accumulate descriptive epithets for the sake of more precise definition. (Boole, 1847, p. 5)[225]

Comme il a été déjà dit, on ne trouve guère plus de développement sur ces sujets dans ce premier opuscule logique de Boole. Notamment, le rapport entre la notion de classe et le langage comme constitué par des noms communs représentant des notions générales n'y est que mentionné. Ce rapport décisif sera pourtant l'objet de plus longs développements dans les manuscrits non publiés datant des années qui mènent de cet opuscule à *The Laws of Thought*. Dans ces écrits on voit apparaître, sous la condition de cette conception des signes à partir des classes, toute l'analyse du langage courant suivant laquelle les différentes catégories des mots (substantifs, adjectifs, articles…), à l'exception des verbes – toujours résolubles, d'ailleurs, en

---

[224] [Ce qui rend la logique possible, c'est l'existence en nos esprits de notions générales, notre faculté de concevoir une classe et de désigner les individus qui en sont membres par un même nom. La théorie de la logique est ainsi intimement liée à celle du langage. (1969, p. 28)]

[225] [Supposons le concept d'une classe : nous sommes à même, à partir de n'importe quelle collection concevable d'objets, de séparer mentalement ceux qui lui appartiennent et de les envisager à part de tout le reste. Nous pouvons concevoir la répétition d'un tel choix ou d'un acte similaire. Le groupe des individus qui reste ainsi soumis à notre considération peut, à son tour, être limité si nous distinguons mentalement ceux d'entre eux qui appartiennent à la fois à une autre classe reconnue et à la première classe considérée. Cette opération peut être répétée avec d'autres éléments de distinction jusqu'à ce que nous parvenions à un individu possédant tous les caractères distinctifs pris en considération, individu qui appartient en même temps à toutes les classes que nous avons énumérées. C'est en fait une semblable méthode que nous employons dans le langage commun toutes les fois que nous accumulons les épithètes descriptives pour obtenir une définition précise. (1969, p. 28)]

termes de la copule et d'un terme ordinaire[226] – ne font que représenter une seule opération fondamentale, à savoir, celle de choisir des individus dans une collection donnée, autrement dit celle de limiter une classe (1848b, pp. 4-5). Cette analyse informera les développements ultérieurs de Boole, et la pleine adoption du point de vue sémiotique dans *The Laws of Thought* animera la division des signes en trois types à partir de laquelle cet ouvrage sera structuré : signes littéraux (substantifs, adjectifs, phrases descriptives…), signes d'opérations (conjonctions du type « et », « ou », etc.), et le signe d'identité (verbe « être » comme copule) (1854, p. 27 sq).

La conception des classes, non moins que des rapports entre elles, à partir de la sélection comme geste purement opératoire est la clef de voute de l'intégration réalisée par Boole, permettant de franchir le seuil entre la consolidation d'un socle fonctionnel par l'Algèbre abstraite et l'édification d'un véritable système de formalisation général du sens. Car par cette définition de la classe comme résultat d'une opération de sélection d'individus, objets ou « choses », Boole parvient à offrir une structure simple mais générale innervant la totalité du langage, et lui conférant sa portée logique. Cela se traduit par un principe de reformulation des expressions langagières permettant (du moins en principe) de résoudre toute proposition du langage courant en une proposition susceptible d'un traitement entièrement logique :

> As Logic is concerned with *things* under the general notion of Class, we must in the analysis of the faculty of Conception resolve all elementary concepts into concepts of things. The proposition "Stones are heavy" must be contemplated under the form "Stones are heavy things" for thus and thus only it exhibits a relation between *things* viewed under the general notion of *Class.* (Boole, 1856, p. 74)

Ce principe de reformulation constitue une sorte de règle de réécriture opérant pourtant à une strate du fonctionnement sémiotique où une telle règle ne saurait être définie par un système logique. Et cela pour la simple raison que c'est par l'action d'un tel principe que les significations véhiculées par un système de signes ou un langage quelconque deviennent susceptibles d'être saisies par l'ensemble des règles qui constituent un système logique. Ce principe est donc comme la condition nécessaire pour qu'une formalisation logique du sens soit effective. La reformulation de « Les pierres sont lourdes » en « Les pierres sont des choses lourdes » proposée par Boole est de ce point de vue analogue à celle proposée par

[226] Sur cette conception du verbe, voir par exemple les manuscrits (1997, pp. 24, 48, 158), et toute particulièrement le passage dans *The Laws of Thought* où Boole donne l'exemple suivant : « "Caesar conquered the Gauls," may be resolved into "Caesar is he who conquered the Gauls." » (1854, pp. 24-25). Cet exemple reprend d'ailleurs de façon originale celui de Whately dont Boole se servait dans *The Mathematical Analysis…* : « "The Romans conquered"; the word conquered is both copula and predicate, being equivalent to "were (copula) victorious" (predicate) », (1847, p. 20).

Frege entre « Archimède périt lors de la prise de Syracuse » et « la mort violente d'Archimède lors de la prise de Syracuse est un fait »[227] ; elles occupent la même place et remplissent la même fonction dans leurs projets respectifs de formalisation du sens. Seulement, elles ne se valent pas. Car elles appartiennent à des configurations – à des *styles* – essentiellement hétérogènes, dont elles restent profondément tributaires. Ainsi, si la reformulation de Frege avait pour but de capturer les expressions significatives du langage des mots dans un système d'expression fonctionnelle informant une logique du contenu, celle de Boole cherche à les projeter sur une surface d'abstraction pure au moyen de son opérationnalisation en termes de classes.

Que la notion de classe sur laquelle s'appuient les opérations successives de sélection capture l'essentiel de la vieille notion générale d'abstraction par laquelle les formulations des algébristes se frayèrent un chemin vers la logique, Boole le dit explicitement vers la fin de *The Laws of Thought*, où il est question de penser la constitution de l'intellect :

> …if the process of reasoning be carefully analyzed, it will appear that abstraction is made of all peculiarities of the individual to which the conclusion refers, and the attention confined to those properties by which its membership of the class is defined. (Boole, 1854, p. 404)[228]

Mais cet ensemble des rapports qui déterminent la place décisive de la notion de classe dans le passage d'une théorie du sens à une logique formelle trouve sa formulation la plus explicite, précise et exhaustive dans des manuscrits succédant immédiatement *The Laws of Thought* :

> Whereas in our concepts of things under the general notion of Class, two distinct elements are involved, viz.: 1st.—The representative by which these concepts image forth things. 2nd.—The *noetic* by which such imagery or representation is made in subjection to the general notion of Class; the laws of the intellectual operations with which Logic is concerned are independent of the former and are dependent solely upon the latter or noetic element.
>
> Thus the concepts "men", "stars", "minerals", etc. refer to different classes of material objects but they are all formed by the same intellectual faculty of abstraction from materials furnished by experience and they all embody the same general notion of Class. They might in effect be regarded as different special determinations of that notion. Now the intellectual operations of Conception, Judgment and Reasoning as applied to the above concepts are independent of their special differences and are dependent only upon the general notion which underlies those differences. […]

---

[227] Cf. *supra* p. 58.

[228] […une analyse attentive de la démarche déductive fera apparaître que l'on y fait abstraction de toutes les particularités de l'individu sur lequel porte la conclusion, et que seules les propriétés qui définissent son appartenance à la classe sont prises en considération. (1992, p. 388)]

> The principle which has just been illustrated is of fundamental importance in the Science of Logic. But its full value can only be appreciated when through the instrumentality of language Logic is developed into a system of methods and processes which though embodied in signs have their ultimate ground and reason in the laws of the intellectual operations. (Boole, 1856, p. 69)

Voilà énoncée, de manière on ne peut plus explicite, la fonction de la notion de classe par rapport à la théorie booléenne du sens et du langage : elle assure l'univocité de l'abstraction face à la multiplicité des contenus ou objets matériels, mais uniquement par l'articulation entre langage et logique à travers les signes où s'incarnent concrètement les processus de pensée et auxquels les opérations intellectuelles ne servent que de fondement externe, dénué de toute efficacité. On voit ainsi que par la notion de classe, l'abstraction trouve une assise à la fois interne et immédiatement opératoire. Et c'est par là qu'elle fournit le principe fondamental qui confèrera à la logique le statut formel tant recherché.

Il nous est très tôt apparu dans notre parcours que la notion de formalité en logique était associée chez les Booléens au caractère extensionnel impliqué par la notion de classe. En effet, une classe, telle que Boole la conçoit, n'est rien d'autre qu'une collection d'individus pouvant être désignés par un même nom[229]. En tant que telle, elle est toujours associée à une extension, c'est-à-dire à l'ensemble des individus répondant à ce nom, même dans le cas où il n'y en aurait aucun. Et c'est sur cette extension que des opérations concrètes correspondant aux opérations algébriques pourront être effectivement exercées : l'addition ou la composition (c'est-à-dire la multiplication), ainsi que ses inverses, n'ont d'autre sens que d'être des sélections d'individus appartenant à des classes. Seulement, de manière surprenante, Boole n'opposera pas l'extension à l'intension ou à la compréhension comme il était d'usage de le faire parmi les logiciens de son époque, et comme d'autres, même à l'intérieur de la tradition qu'il inaugure, continueront à le faire après lui. Il fera, en revanche, de la classe un principe capable de capturer à la fois l'extension et l'intension, comme déterminations réciproques :

> In the mode of extension it might be said that the class "men" form a part of the class "mortal beings". In the mode of intension it might be said that "mortality is an attribute of humanity", and it is seen that the order of the terms is inverted. Now any system of notation which expresses terms by letters and at the same time explicitly assigns to those terms their implicit *quantity* enables us to read propositions either backward or forward and therefore […] to read it in intension as well as in extension. (Boole, 1854/60, p. 138)

---

[229] Cf. par exemple Boole (1847, pp. 15, 67) et surtout (1854, p. 28) : « By a class is usually meant a collection of individuals, to each of which a particular name or description may be applied; but in this work the meaning of the term will be extended so as to include the case in which but a single individual exists, answering to the required name or description, as well as the cases denoted by the terms "nothing" and "universe," which as "classes" should be understood to comprise respectively "no beings," "all beings." »

Husserl reprendra, on l'a vu, des propos analogues, pour dénoncer la conception schrödérienne identifiant contenu et intension[230]. Nous aurons l'occasion de montrer que ce n'est pas le seul point où les formulations singulières de Boole divergent par rapport à la vulgate booléenne, et nous verrons également que cela reste lié aux propriétés arithmétiques que Boole maintient ici derrière ces « quantités implicites ». Ce qui importe pour le moment, c'est que la notion de classe reste le garant effectif du caractère opératoire de la logique, tout comme elle était celui de l'unité de l'abstraction comme détermination principale des signes, occupant une position charnière qui libère les opérations de leur dépendance par rapport à un fondement psychologique.

Envers ontologique de la notion d'opération, la classe comporte non seulement la vertu de se rapporter au langage courant comme système éminent de signes, mais aussi celle de définir le ressort essentiel d'un calcul logique, assurant la circulation non métaphorique des opérations entre ces deux instances. L'importance conquise par les opérations dans leur rapport intime aux classes se trahit clairement dans l'évolution de l'appareil sémiotique du système de Boole. Ainsi, dans *The Mathematical Analysis…* Boole prévoyait une distinction entre des lettres majuscules comme des signes de classes d'individus, et des lettres minuscules comme des signes d'opérations de sélection liées à des opérations mentales. Il en résultait que les lettres majuscules, comme *X* ou *Y*, se voyaient envisagées alternativement comme la représentation de membres individuels (« un *X* », comme on dit « un cheval »), comme des noms (communs) (« les *X* » comme on dit « les chevaux ») et comme des classes (« la classe X » comme « la classe des chevaux ») (cf. Boole, 1847, pp. 15-19). Leur usage, au demeurant, restait presque entièrement limité à la simple traduction des résultats obtenus au moyen des signes d'opération dans le langage logique traditionnel, ce qui ne diffère guère de l'usage des lettres que l'on peut trouver déjà chez Aristote. Dans un article publié un an plus tard dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, intitulé « The Calculus of Logic », une identité formelle est introduite entre ces deux types de signes, manifestant l'ouverture d'une perspective nouvelle. Boole écrit :

> x 1 or x = the class X,
> y 1 or y = the class Y,
> xy 1 or xy = the class each member of which is both X and Y (Boole, 1848a, p. 185)

où « x 1 » représente l'opération de sélection x portant sur l'univers ou classe universelle, symbolisée par « 1 »[231]. Finalement, dans *The Laws of Thought*, la distinction entre des lettres

[230] Voir *supra* p. 47.

[231] Nous donnons un aperçu du fonctionnement du système booléen au chapitre suivant. Cf. *infra* p. 227.

majuscules et minuscules n'est plus présentée comme faisant partie du langage de la logique, et les classes sont directement représentées par des lettres minuscules[232].

Dans toute cette évolution, ce n'est pas que la classe se substitue aux opérations. D'abord, une telle substitution aurait exigé que les lettres majuscules remplacent les lettres minuscules, et non pas l'inverse. Mais ensuite, les équations logiques que l'on peut trouver d'un bout à l'autre de cette évolution demeurent les mêmes pour l'essentiel, tant du point de vue de leur matériel symbolique que de leur fonctionnement. Ce que l'assimilation de la notion de classe de la part des signes d'opérations, et la disparition en conséquence des signes spécifiques qui lui étaient réservés, montrent, en revanche, c'est que la classe constitue le véritable fondement interne des opérations. La notion de classe ne se substitue donc pas aux opérations, mais aux facultés de l'esprit *dans* les opérations comme leur fondement. Le fait que le fonctionnement élémentaire des opérations ne se voit en rien touché par leur compréhension en termes de classes, ainsi que le fait que rien ne soit perdu par l'abandon des signes spécifiques originairement prévus pour les classes témoigne de la stérilité propre à tout fondement. Décalque parfait des opérations multiples qui peuplent l'espace d'une théorie formelle du sens avant même que cet espace ne soit ouvert, la classe apporte pourtant un principe d'unité[233] qui permettra à la dispersion et hétérogénéité opératoires d'être intégrées dans un espace unique, habilitant les circulations et les emprunts entre une mathématique identifiée à une Algèbre et une logique au point de se reconstruire. Boole est le premier à être conscient de ces effets d'ensemble :

> Now the elements of Logic are not less definite than those of Algebra. We have but one kind of elementary concept viz. that of class — but four elementary operations by which concepts of class can be modified viz. Addition Subtraction Composition and Abstraction […]. If we express these elements by symbols of conception, operation and relation corresponding to the symbols of Algebra an equally definite system if not the same system of formal laws will govern their employment. (Boole, 1856, p. 88)

À travers l'ensemble de ce dispositif conceptuel, *la logique peut enfin acquérir le même statut que l'Algèbre*. Aux opérations de l'une viendront correspondre les opérations de l'autre, selon une corrélation qui n'a rien d'une vague analogie ou d'une habile métaphore, puisque le concept élémentaire de classe assure le maintien de la nature des lois lorsque celles-ci

---

[232] Boole (1854, p. 28) : « Let us then agree to represent the class of individuals to which a particular name or description is applicable, by a single letter, as *x*. If the name is "men," for instance, let *x* represent "all men," or the class "men." ». Des lettres majuscules sont d'ailleurs utilisées pour représenter des fonctions quelconques de ces symboles logiques (comme il était d'usage dans l'Analyse mathématique de l'époque), ainsi que des coefficients numériques, voire des noms génériques comme dans la tradition logique.

[233] Boole (1997, p. 116) : « …the idea of unity seems inseparable from that of a *class* of things contemplated as existing. »

traversent le vaste territoire d'une théorie générale de la signification et du langage pour arriver d'une rive à l'autre.

II.3.5. La logique mathématisée

Plusieurs ouvrages ont été consacrés à exposer, à un degré variable de détail, le système logique booléen ; il est ainsi inutile de le présenter de manière exhaustive dans le cadre de notre travail[234]. Nous nous limiterons donc à en présenter ici le dispositif élémentaire, tel qu'il résulte directement de l'espace de formalisation du sens amorcé à partir de l'agencement précis de pratiques, fonctionnements et concepts que nous venons de mettre en lumière.

Comme nous l'avons anticipé en examinant l'œuvre mathématique de Boole précédant *The Mathematical Analysis of Logic* de 1847, l'édification de son système logique s'appuie concrètement sur un nombre restreint de lois formelles issues de l'Algèbre symbolique, remarquablement stable à travers son évolution. Comme il a été dit, l'ensemble des éléments ordonnant l'espace d'une théorie des signes et du langage, capable d'assurer la continuité entre formalité mathématique et formalité logique, semble s'organiser lui-même autour de la fixité relative de ces lois prenant racine dans les premiers travaux mathématiques de Boole. Ainsi, dans son article majeur « On a General Method in Analysis », Boole présentait, suivant les formulations de Gregory, trois lois symboliques fondamentales de l'Analyse : la loi commutative, la loi distributive, et la loi des indices[235]. Les expressions respectives de ces lois étaient alors :

$$\pi\varrho u = \varrho\pi u,$$
$$\pi(u + v) = \pi u + \pi v,$$
$$\pi^m\pi^n u = \pi^{m+n}u,$$

où les lettres grecques π et ϱ expriment des opérations, et les lettres latines u et v tiennent lieu des « sujets » sur lesquels ces opérations portent.

Étant donné que ces lois portent elles-mêmes sur des opérations, Boole ne saurait les introduire dans le champ de la logique qu'en y trouvant l'équivalent de ces opérations. Le moyen choisi à cet effet dans l'opuscule de 1847 est de commencer par présenter le signe numérique « 1 » comme représentant de l'univers « pour représenter l'ensemble d'une classe

[234] Nous renvoyons à ces textes pour toute question concernant les aspects techniques généraux de la logique booléenne, et tout particulièrement à l'ouvrage déjà classique de Hailperin (1986), qui reste à notre avis l'étude la plus complète et la plus lucide sur ce point.

[235] Cf. *supra*, p. 197.

d'objets existant soit réellement soit virtuellement »[236] (1847, p. 15). On remarquera qu'ici l'univers n'est pas composé de tous les objets, mais de *toutes les classes d'objets* concevables. Cette définition, pleine de subtilité et de dangers, s'explique certainement par ce qu'elle annonce, à savoir la place ambigüe de la classe dans cette première formulation du système, dont témoigne l'équivocité des lettres majuscules indiquée dans notre précédente section[237]. En effet, les éléments individuels (*individuals*) sont immédiatement présentés au moyen des noms génériques nommant en même temps les classes, symbolisés par ces lettres majuscules. Dès lors, Boole peut introduire des symboles d'opération, exprimés par des lettres latines minuscules x, y, z, comme des « symboles électifs », ou symboles de sélection d'individus portant sur « n'importe quel sujet comprenant des individus ou des classes » (p. 15). Le fait que Boole présuppose de manière volontaire et explicite l'univers « 1 » comme sujet ultime (« x » voulant dire « $x1$ »), explique que les lettres majuscules soient dépourvues de toute efficacité : les lettres minuscules peuvent bien être utilisées à leur place, car $xY = xy1 = xy$. Par ce moyen, qui n'est pourtant pas, quant à lui, explicitement postulé en tant que tel par Boole, l'appariement conceptuel entre opération et classe trouve son assise technique.

L'introduction des opérations dans *The Laws of Thought* suit une autre stratégie, en accord avec la place centrale gagnée depuis par le signe ainsi qu'avec ce déplacement de la notion de classe. Le point de départ n'est dès lors plus les individus et les classes, mais les opérations du raisonnement telles qu'elles transparaissent dans le langage. Les symboles d'opération ne sont plus appelés symboles électifs comme avant, bien qu'ils continuent à fonctionner comme des sélections d'individus. Ainsi, les opérations du langage en tant qu'instrument de raisonnement peuvent être réduites à un système de signes divisé en trois types, dont le premier, comprenant les signes littéraux qui épuisaient le domaine des opérations en 1847, correspond aux noms (communs ou propres) et aux adjectifs. Si, dans le premier traité, les opérations, une fois définies en fonction des classes, permettaient de s'approprier des expressions du langage telles que celles-ci avaient été comprises logiquement, notamment par Whately[238], dans l'ouvrage de 1854, inversement, ce sont les éléments du langage eux-mêmes (noms, adjectifs, prépositions, verbes…) qui constituent des opérations, symbolisables directement par des lettres et autres signes.

---

[236] *…as comprehending every conceivable class of objects whether actually existing or not.*

[237] Aussi, dans *The Laws of Thought*, l'univers est-il censé être compris comme la classe de « tous les choses » (« *all beings* ») (1854, p. 28), en cohérence avec la nouvelle compréhension des opérations elles-mêmes en termes de classes.

[238] En effet, les trois chapitres qui suivent la présentation des premiers principes dans *The Mathematical Analysis…* commencent par un extrait du traité logique de Whately, *Elements of Logic*, qui se trouve ensuite réinterprété au moyen des outils formels établis par Boole. Cf. notamment Boole (1847, p. 20).

Que ce soit sous la forme d'une action possible sur des classes, ou comme nature véritable des éléments du langage, les opérations provenant de l'Algèbre trouvent leur droit de cité dans le domaine de la logique. Et avec elles, les lois formelles capables de les définir suivant la nature même de cette Algèbre. Ainsi, conçues comme sélection d'individus dans des classes, ces opérations acceptent d'être soumises aux lois distributive et commutative. Car d'une part, si l'on accepte d'exprimer l'unité de deux parties u et v par leur connexion au moyen du signe d'addition $(u + v)$, il est clair que l'on a :

$$x(u + v) = xu + xv,$$

ce qui exprime le fait que la sélection des Xs dans l'unité composée de u et de v parvient au même résultat que l'unité des sélections des Xs dans u et dans v. De la même façon, deux opérations de sélection étant données, l'ordre de leur exécution n'est pas censé modifier le résultat final, ce qui trahit leur commutativité, que l'on écrit :

$$xy = yx.$$

Loin d'altérer leur validité, l'interprétation linguistique des opérations propre à *The Laws of Thought* ne saurait que la reconfirmer. Seulement, dans l'absence d'une postulation préalable et indépendante des classes, l'addition impliquée par la distributivité exige d'être introduite autrement que comme unité des composantes. Elle devient alors une opération à part entière correspondant aux signes chargés de la fonction de collection dans le langage, typiquement les mots « et » et « ou »[239]. Aussi, la commutativité est-elle présentée d'abord, ne portant que sur des signes d'opération de la première classe, tandis que la distributivité n'est introduite qu'une fois introduite la deuxième classe de signes. De plus, la commutativité de l'addition $(x + y = y + x)$ est explicitement énoncée. On verra que le sens de ce redoublement ne se réduit nullement à la distinction conceptuelle entre des types de signes.

Arrêtons-nous à ces deux lois. Elles correspondent parfaitement aux deux premières lois relevées dans « On a General Method… ». On remarquera pourtant la disparition des « sujets » sur lesquels les opérations sont censées porter, ce qui entraine la disparition de la distinction sémiotique chargée de les exprimer (lettres grecques/lettres latines). Cela s'accorde entièrement avec le sens même de l'évolution de la pensée algébrique qui, déjà dans les travaux de Gregory, arrivait à se présenter comme un milieu de pure opérativité sans sujet. Ce que ces disparitions, et les mécanismes par lesquels elles se légitiment, traduisent dans le champ logique, ce n'est pourtant pas la disparition corrélative des individus et des collections d'individus (sujets des opérations de sélection), mais leur caractère *implicite*. En effet, classes

[239] Boole ne prend évidemment pas ici le mot « ou » (*or*) dans son usage disjonctif, mais dans le sens conjonctif utilisé souvent dans le langage courant, comme lorsque l'on dit « montagnes stériles, ou vallées fertiles ». Cf. Boole (1854, p. 32).

et individus continuent à subsister au niveau des opérations, pouvant toujours être explicités à partir des déterminations de celles-ci. Si bien que si, à ces deux lois, on ajoute le signe moins (« – ») pour symboliser l'opération inverse de l'addition ou collection, l'expression « $1 - x$ » pour signifier tout ce qui reste de l'univers lorsque l'on retire x (c'est-à-dire « non-X »), et le signe d'égalité comme troisième classe de signe pour exprimer la copule, on a déjà des éléments suffisants pour mettre en marche l'ensemble des déterminations logiques sous le fonctionnement d'un système formel. Ce qui dans *The mathematical…* est montré par la réduction de la Syllogistique classique, mise au point par Whately et l'école d'Oxford, à l'ensemble de ces instruments ; de même que dans *The Laws of Thought* c'est par la résolution du langage ordinaire à l'intérieur de ce système de signes qu'on montre qu'il est suffisant :

> The substantive, the adjective, and the verb, together with the particles *and*, *except*, we have already considered. The pronoun may be regarded as a particular form of the substantive or the adjective. The adverb modifies the meaning of the verb, but does not affect its nature. Prepositions contribute to the expression of circumstance or relation, and thus tend to give precision and detail to the meaning of the literal symbols. The conjunctions *if*, *either*, *or*, are used chiefly in the expression of relation among propositions, and it will hereafter be shown that the same relations can be completely expressed by elementary symbols analogous in interpretation, and identical in form and law with the symbols whose use and meaning have been explained in this Chapter. As to any remaining elements of speech, it will, upon examination, be found that they are used either to give a more definite significance to the terms of discourse, and thus enter into the interpretation of the literal symbols already considered, or to express some emotion or state of feeling accompanying the utterance of a proposition, and thus do not belong to the province of the understanding, with which alone our present concern lies. Experience of its use will testify to the sufficiency of the classification which has been adopted. (Boole, 1854, p. 38)[240]

[240] [Le substantif, l'adjectif et le verbe, ainsi que les particules *et*, *sauf* ont déjà été examinés. Le pronom peut être considéré comme une forme particulière du substantif ou de l'adjectif. L'adverbe modifie le sens du verbe sans en affecter la nature. Les prépositions contribuent à l'expression de la circonstance ou de la relation et tendent ainsi à préciser et à détailler le sens des symboles littéraux. Les conjonctions *si, ou bien, ou*, s'emploient principalement pour exprimer une relation entre propositions, et l'on montrera plus tard que les mêmes relations peuvent être exprimées complètement par des symboles élémentaires admettant une interprétation analogue, ainsi qu'une forme et des lois identiques à celles des symboles dont l'emploi et la signification ont été expliqués dans ce chapitre. Quant aux autres éléments du discours, l'examen montrera qu'ils sont employés, soit pour définir plus précisément le sens des termes du langage – qu'ils participent donc à l'interprétation des symboles littéraux déjà considérés –, soit pour exprimer une émotion ou un état d'âme accompagnant l'énonciation d'une proposition – qu'ils ne relèvent donc pas du domaine de l'entendement qui seul nous concerne ici. C'est à l'usage que s'avérera le caractère exhaustif de la classification adoptée ici. (1992, p. 55)]

Ainsi, une définition comme celle que Senior donne de la richesse, à savoir « La richesse consiste dans des choses transférables, de provision limitée, et capables soit de produire du plaisir, soit de prévenir la peine », se laisse exprimer de la manière suivante :

$$r = lc\{p + n(1 - p)\},$$

si l'on s'accorde pour symboliser les noms et les adjectifs « richesse », « choses transférables », « limitées en provision », « capables de produire du plaisir », et « capables de prévenir la peine », tour à tour par les signes opératoires *r*, *c*, *l*, *p*, et *n*, et interprétant la tournure « soit…soit… » comme « soit de produire du plaisir, et, si ce n'est pas de produire du plaisir, alors de prévenir la peine » (cf. Boole, 1854, p. 59). Qui plus est, ces symboles répondant aux mêmes lois que ceux de l'Algèbre, les questions logiques se laissent dès lors traiter suivant ses mêmes procédures.

Voilà le sens le plus strict de la mathématisation booléenne de la logique. Un exemple suffira à l'illustrer. Si l'on reprend la définition déjà évoquée des animaux purs comme ceux qui ont la patte fourchue et qui jouissent de la faculté de ruminer, on pourra maintenant l'exprimer par l'équation suivante :

$$x = yz,$$

où les symboles opératoires *x*, *y*, *z* représentent respectivement « animaux purs », « animaux qui ont la patte fourchue » et « animaux qui jouissent de la faculté de ruminer ». Si l'on se demande alors quels sont les animaux qui ont la patte fourchue sans être purs, on arrivera par les opérations *algébriques* successives suivantes :

$$y - x = y - zy = y(1 - z),$$

au résultat : les animaux qui ont la patte fourchue sans être purs $(y - x)$ sont les animaux qui ont la patte fourchue et qui ne jouissent pas de la faculté de ruminer ($y(1 - z)$). Cet exemple est volontairement simple, ne portant que sur des classes et n'engagent d'ailleurs que la loi distributive. Il n'est même pas considéré par Boole. Il concentre pourtant l'idée fondamentale d'un système logique fonctionnant sous la forme d'un système algébrique. La correspondance sera du reste élargie jusqu'à comprendre non seulement le calcul des classes (*primary propositions*), mais aussi celui des propositions (*secondary propositions*), capable de capturer l'ensemble de la Syllogistique.

Cependant, la généralité du système rencontrera un certain nombre d'obstacles, concernant essentiellement le caractère non logiquement interprétable du résultat de certaines opérations. Il n'est pas besoin d'aller recherche trop loin. Il suffit d'essayer de déterminer *z* en fonction de *x* et *y* dans notre exemple pour trouver :

$$z = \frac{x}{y}$$

Or le sens logique du second terme de cette équation n'a pas été déterminé dans le cadre du système booléen. Boole est bien conscient de l'ensemble de ces difficultés, au point qu'il dédie la plupart de ses recherches à trouver des moyens techniques de les contourner. Ces moyens, avec ces vertus et ses défauts, ont maintes fois été étudiés. Il n'est pas dans notre intention de revenir sur ces questions, d'autant plus que la présentation générale du fonctionnement formel de la logique booléenne est pour nous uniquement censée fournir les éléments indispensables pour la compréhension d'un point précis – bien que capital – concernant l'organisation de l'espace sémiotique qui mesure la distance entre mathématiques et logique parcourue par tout projet de formalisation du sens. Qu'il suffise donc ici de dire, avant de nous consacrer à l'étude de ce point singulier, que Boole prétend, de manière générale, surmonter ces difficultés par une double voie.

D'une part, il introduit une idée de *développement* d'une fonction logique comme procédure capable d'attribuer un sens logique à toute expression symbolique susceptible d'apparaître dans son système. Dans le cas d'une expression logique comportant un seul symbole d'opération (« x »), l'expression pourra être écrite comme une fonction de x (c'est-à-dire : « $f(x)$ »), et développée sous la forme suivante :

$$f(x) = ax + b(1 - x),$$

où a et b sont des coefficients qui dépendent de $f(x)$, et peuvent être remplacés par $f(1)$ et $f(0)$ respectivement[241]. Ce qui veut dire qu'une expression engageant une propriété particulière (symbolisée par « x »), peut toujours être résolue en une collection (une addition) d'une classe déterminée d'individus possédant cette propriété (ax), et d'une autre classe ne la possédant pas ($b(1 - x)$). La formule du développement peut d'ailleurs être étendue à des fonctions de plus d'un symbole logique, auquel cas le développement apparaîtra comme une réunion des classes correspondant à toutes les combinaisons possibles des propriétés en question et de leurs négations. Par ce moyen, toute expression logique trouve la condition de son interprétabilité.

D'autre part, Boole contourne la question de la non-interprétabilité par des moyens moins techniques, à savoir par la postulation d'une méthode générale qui reprend les termes de celle énoncée plus d'une trentaine d'années auparavant par Babbage :

> The conditions of valid reasoning, by the aid of symbols, are—
>
> 1st, That a fixed interpretation be assigned to the symbols employed in the expression of the data; and that the laws of the combination of those symbols be correctly determined from that interpretation.

[241] Sur les différentes justifications de cette propriété, voir *infra*, p. 277.

> 2nd, That the formal processes of solution or demonstration be conducted throughout in obedience to all the laws determined as above, without regard to the question of the interpretability of the particular results obtained.
>
> 3rd, That the final result be interpretable in form, and that it be actually interpreted in accordance with that system of interpretation which has been employed in the expression of the data. (Boole, 1854, p. 68)[242]

Autrement dit, des expressions non interprétables sont acceptées dans le calcul logique, à condition qu'elles apparaissent uniquement dans les étapes intermédiaires d'un calcul menant d'une expression interprétable à une autre, et conduit selon les lois formelles qui déterminent le sens des symboles. Le cas de l'utilisation du symbole « $\sqrt{-1}$ » en trigonométrie est explicitement évoqué par Boole comme illustration particulière de ces principes généraux (Boole, 1854, p. 69).

[242] [Les conditions d'un raisonnement valide, mené au moyen de symboles, sont les suivantes :

1°) Qu'une interprétation fixée soit assignée aux symboles employés pour exprimer les données ; et que les lois de combinaison de ces symboles soient correctement déterminées à partir de cette interprétation.

2°) Que les procédures formelles de résolution ou de démonstration soient constamment menées en conformité avec les lois ainsi déterminées, sans tenir compte de la question de l'interprétabilité des résultats partiels obtenus.

3°) Que le résultat final soit formellement interprétable et qu'il soit effectivement interprété conformément au système d'interprétation employé dans l'expression des données. (1992, p. 82)]

II.4. L'Abstraction symbolique

II.4.1. Le régime du symbole

Le régime général de signes initialement induit par les besoins d'intelligibilité l'Algèbre anglaise, et appuyé sur la positivité des fonctionnements institués par elle, inaugure au seuil de notre modernité un espace où les significations en général deviendront, sous la forme de la logique, susceptibles d'un traitement mathématique ; espace de formalisation du sens qui parvient jusqu'à nos jours, et dont les figures successives ne seront effacées que pour être dessinées à nouveau avec plus de force et de précision. Si les traits appartenant en propre à un tel espace s'avèrent pourtant difficiles à dégager, c'est dans la mesure où l'ouverture de cet espace en général a eu lieu sous le signe particulier de l'une de ses configurations possibles. Nous y avons suffisamment insisté : l'Algèbre anglaise, la logique booléenne et la théorie spécifique du langage et de la signification qui habilite, supporte et garantit leur engrenage, ne constituent qu'une configuration particulière suivant laquelle peut s'ordonner, et s'est de fait ordonné historiquement, l'espace ouvert entre les multiples pratiques mathématiques et la virtualité sans bords des systématisations logiques envisageables. Aussi, avons-nous voulu décrire les éléments essentiels de cette configuration, que nous avons découverte par contraste comme le fond, à la fois mouvant et discret, de l'émergence de la logique frégéenne.

Si l'on voulait nommer cette configuration spécifique, il ne suffirait pas de le faire uniquement en fonction de la logique à laquelle elle a fini par donner lieu : « Logique des classes », « Calcul propositionnel », « Algèbre booléenne »… ; pas plus que par les mathématiques qui l'informent de manière fondamentale, à savoir, l'Algèbre symbolique anglaise. Car cette logique et ces mathématiques ne constituent en elles-mêmes que des dimensions de l'espace stratifié de cette configuration complexe, et l'essentiel est qu'y soient articulés ces domaines somme toute hétérogènes (mathématiques, langage, logique). Une qualification de ce premier régime de formalisation du sens dans sa spécificité devrait alors capturer l'essentiel de cette mise en rapport.

C'est alors que le terme d'*abstraction*, utilisé par Frege pour qualifier la logique booléenne et marquer la distance qui l'en sépare, révèle toute sa justesse. En effet, le qualificatif « abstrait » couvrait chez les algébristes de Cambridge l'ensemble du domaine dispersé de l'appareillage sémiotique propre à leur démarche, et c'est par une notion unifiée et unifiante d' « abstraction » dans l'élément d'une théorie de la signification que Boole réussira à intégrer cette dispersion, assurant la circulation des déterminations dont il est ici question vers une logique qui en modifiait à son tour la nature. Le régime ainsi constitué donnait, par la distribution des places respectives ordonnant les différents domaines, un sens précis à la notion de « formel » en tant que nom générique pour cette circulation : formel et abstrait apparaissent dès lors comme indiscernables. C'est pourquoi Schröder aura beau faire l'économie de l'abstraction comme faculté de l'esprit, en opposant le contenu à l'extension au moyen d'une association entre contenu et intension[243], la nature de la logique booléenne ne demeurera pas moins abstraite. Car dans cette configuration, l'abstraction n'est un principe psychologique que de manière dérivée et épiphénoménale. Exigée par l'intégration de la multiplicité des propriétés sémiotiques associées à l'Algèbre naissante, dans le but de procurer un fondement à une logique générale informée par cette Algèbre, *l'abstraction se présente avant tout comme la propriété d'un signe*, et qualifie ainsi *la nature du régime sémiotique* que ce type de signe instaure et qui le soutient. Autrement dit, l'abstraction est un principe d'unité du champ des signes, qui distribue et organise d'une manière précise et singulière les places respectives des éléments nécessaires à la composition d'une théorie du sens susceptible d'être mathématisée ou formalisée. C'est pourquoi l'intervention de Schröder, bien qu'elle court-circuite tout argument d'ordre psychologique, laisse intacte la nature abstraite du système dans son ensemble et de la logique que celui-ci est capable d'engendrer. Bien plus, sa démarche est elle-même une possibilité ouverte par ce régime, et même prévue et encouragée par lui si l'on songe à la volonté de Boole lui-même de détacher le dispositif des facultés de l'esprit du fonctionnement du système. C'est aussi pourquoi toutes les discussions sur le psychologisme chez Boole ne relèvent au fond que d'un malentendu[244]. Elles disparaissent dès que le système booléen est abordé au niveau même de l'espace stratifié qui assure son effectivité. Qu'il suffise ici pour nous d'observer que Frege, critique profond de l'abstraction du système booléen, et sensible comme il l'était en ce qui concerne le psychologisme en logique, ne soupçonnera pourtant jamais Boole et les Booléens d'y avoir succombé.

En tant que qualification d'un régime sémiotique, l'abstraction fait du signe avant tout un *symbole*. Ce qui n'est rien d'autre que le nom pour un signe déterminé par l'ensemble

---

[243] Voir *supra* p. 42.

[244] La question du psychologisme chez Boole a fait l'objet de plusieurs débats. On pourra consulter Mugnai (1998), Vassallo (1998), Trinchero (1998), ainsi que Bornet (1997).

d'opérations que l'abstraction vient qualifier, tant mathématiquement (fonctionnement des formes algébriques selon des lois), que sémiotiquement (interprétation de l'abstrait par le concret, et représentation du concret par l'abstrait) et logiquement (opération sur des classes d'individus). Tout comme la notion d'abstraction, celle de symbole parcourt la totalité de l'espace couvert par les algébristes anglais, de Woodhouse à Boole et au-delà, nommant de façon diffuse mais insistante l'être sémiotique, le type de signe, auquel ces mathématiciens avaient affaire. Puisque les algébristes le reconnaissaient partout, l'être symbolique est fragile, car il convient à une multiplicité en apparence disparate de situations. Mais il gagne en solidité avec la précision acquise dans l'évolution des pratiques et des réflexions des algébristes. Aussi, le symbolisme, tel qu'il résulte de ce processus stratifié de détermination progressive du signe, se voit-il déterminé au croisement des trois strates qui sédimentent sa diffusion : être *symbolique* pour un signe veut dire être à la fois *caractéristique* (envisagé comme un caractère ou une lettre), *représentatif* (dans le sens de « non interprété ») et *opératoire* (défini par des lois régulant la façon de se combiner avec d'autres signes). Mais, du fait de l'indissociabilité du symbolique et du formel ainsi que de celui-ci et de l'abstrait, cette définition implique une spécification simultanée de la notion de formel elle-même. Ainsi, suivant cette détermination symbolique, « formel » veut dire à la fois : *algébrique* (c'est-à-dire, défini par des formes algébriques[245] douées d'une puissance de généralisation – les « formes symboliques » du jeune Boole) ; *abstrait* (en opposition au caractère concret des significations (*meaning*) particulières) ; et *extensionnel* (définissant des classes capables de correspondre aux opérations dont sont susceptibles les formes symboliques).

Abstraction et *symbolisme* capturent ainsi conjointement l'essentiel de cette configuration d'ensemble pourtant particulière suivant laquelle la notion de formel peut prendre un sens à la fois général et précis. Ce n'est pas par hasard, d'ailleurs si ce sont ces deux termes qui identifient alternativement dans leur généralité spécifique les pratiques mathématiques qui se trouvent à la base d'une telle configuration : Algèbre abstraite, Algèbre symbolique. Appliqués ensemble, ces deux termes semblent parfaitement adéquats pour désigner la globalité du dispositif constitué par l'articulation des domaines sur lesquels ces pratiques exercent leur action, le style particulier par lequel s'ouvre la formalisation du sens.

Abstraction symbolique. On ne dissimulera pas la résonance de cette appellation avec celles proposées généralement par l'histoire de l'art. Une chose est sûre : nous voudrions autant que possible éviter l'association de ces termes aux catégories habituelles de l'histoire et de la philosophie des mathématiques et de la logique (tels « platonisme », « réalisme », etc.),

---

[245] Au sens du principe de « permanence de formes équivalentes », de Peacock.

relevant d'une approche et de l'histoire, et des savoirs formels dont la nôtre prétend se distinguer avec force. Après tout, il faudrait pouvoir parler d'abstraction et de symbolisme en mathématiques et en logique comme on le fait en peinture, en poésie, ou en art en général : comme un régime prescrivant le fonctionnement général des signes, contraignant par là la théorie du sens susceptible d'être construite à partir d'eux. Non pas qu'il s'agisse ici de la même chose, ni qu'abstraction et symbolisme aient le même sens dans un cas comme dans l'autre[246]. Mais l'expression « Abstraction symbolique », attribuée à l'espace partagé de manière inédite par les mathématiques et la logique, devrait pouvoir être entendue au plus près de l'usage que l'on fait des expressions de ce type en histoire de l'art : indifférente à une délimitation stricte des frontières de ce qu'elle localise, elle renvoie pourtant de manière rigoureuse à la fois : à un *style* propre à des pratiques sémiotiques inscrites dans des domaines multiples et hétérogènes ; à un *régime* général de signification ou de sens appuyé sur ces pratiques des signes ; enfin, à la *période* plus ou moins précise pendant laquelle ce régime et ces pratiques ont émergé et déterminé de façon privilégiée les traits décisifs de l'univers qu'elles parcourent. On pourrait dès lors parler d' « *Abstraction symbolique* » pour nommer dans sa généralité cette configuration, à laquelle on ne saurait se référer du nom de « booléenne » que par une métonymie dont nous montrerons, sinon l'illégitimité, du moins les obstacles et les effets contre-productifs.

Cet univers que l'Abstraction symbolique vient saturer, c'est donc celui du *formel*, entendant derrière ce terme le problème d'une sémiotique formelle, c'est-à-dire d'une détermination purement formelle du sens ou de la signification véhiculés par des signes. Car ce qui est transféré dans la traversée du territoire d'une théorie générale de la signification et du langage, depuis l'Algèbre jusqu'à la logique, c'est une notion particulière de « forme », appartenant initialement au savoir algébrique, mais qui atteint maintenant le territoire nouvellement délimité de la logique, dans la mesure où les lois qui la régissent peuvent être dites aussi « formelles » que celles de l'Algèbre. De cette manière, une notion de « formel » peut enfin légitimement s'instituer pour qualifier l'espace sans solution de continuité qui fait communiquer mathématiques, langage et logique, à travers lequel ces formes circulent. Espace opératoire, respectivement algébrique, abstrait et extensionnel, identifiant sa continuité avec le formel tout court, et prenant ses distances par rapport à un ensemble dispersé de propriétés arithmétiques, géométriques, intuitives, concrètes, matérielles, significatives, voire intensionnelles, dont la seule unité consiste à être placées en dehors de l'identité solidement articulée du formel. Aussi, une notion générale de formel ne s'instaure-t-

[246] A vrai dire, une étude de cette sorte reste toujours à faire.

elle pas dans cette configuration sans instaurer du même coup une opposition entre forme et contenu (réabsorbant la série ouverte d'oppositions analogues que les algébristes mettent en avant dans leurs textes : forme et matière, forme et signification…). Mais cette opposition globale n'est que le recouvrement final et tardif de tout un faisceau de fines articulations à dimensions multiples, déterminant la nervure intime et effective d'un régime sémiotique agencé en sorte que mathématiques et logique puissent célébrer de manière durable leurs fiançailles.

Que l'univers *général* de la formalisation du sens ait été lui-même ouvert par l'Abstraction symbolique qui le qualifie de manière *spécifique* n'a cependant rien de contradictoire, et encore moins d'occasionnel. Car l'Algèbre abstraite ou symbolique n'a pas seulement mis en avant le caractère intrinsèquement sémiotique de ses déterminations, mais elle a fait porter en même temps toute l'efficacité de son entreprise sur le caractère parfaitement *général* de ses signes (à côté des signes géométriques, ou des significations arithmétiques, par exemple). Tout se passe donc comme s'il fallait que le signe mathématique non seulement se pense lui-même, mais se pense lui-même comme signe général, comme signe du général, pour qu'une formalité dont seules les mathématiques détiennent le secret s'ouvre vers d'autres domaines du sens, et avec eux, vers le sens tout court. D'autant plus que, au nom du caractère général de ses signes, l'Algèbre allait jusqu'à réclamer l'espace mathématique tout entier pour domaine propre, en s'appuyant positivement sur l'identification entre l'Algèbre et l'Analyse. Cette identification, introduite avec force par Woodhouse, et assumée de manière plus ambiguë par ses successeurs, se trouve réaffirmée dans l'œuvre de Boole, qui utilise souvent les deux termes de façon indistincte, et en énonce parfois une certaine équivalence[247]. C'est d'ailleurs en raison de l'adhésion à cette algébrisation de l'Analyse que Boole porte tout son intérêt sur la généralisation comme tâche privilégiée de la recherche mathématique. De fait, cette généralisation se compte parmi les effets les plus directs de la nature générale des symboles de l'Algèbre. Autrement dit, la généralisation comme démarche traversant toutes les régions mathématiques est indissociable de la généralité comme propriété sémiotique des symboles algébriques. Au point qu'il n'est pas tout à fait exact de dire, suivant une conception très répandue qui a son origine chez Boole

[247] Voir par exemple Boole (1855, p. 170) où Boole parle de « toutes ces parties des mathématiques, y compris l'Algèbre commune, qui sont connues sous le nom d'Analyse… » ; et (1849, p. 41), où il ressort le fait que cette alliance entre l'Analyse et l'Algèbre contre la Géométrie est faite au nom du symbolique : « That Geometry is nothing more than an application of ordinary reasoning to the particular subjects of which it treats is sufficiently manifest. In Algebra however and in all those applications of analysis in which symbols are made use of, another element is introduced the nature of which it remains to investigate. ».

lui-même[248], que Boole généralise l'Algèbre abstraite par son application au champ de la logique. Car la logique n'est pas un champ comme les autres pour le fonctionnement des signes de l'Algèbre[249]. Ses énoncés ne sont pas censés constituer une application ou interprétation possible des énoncés algébriques, mais capturer l'interprétabilité comme telle. Un énoncé logique, tel que Boole le conçoit et le construit, est lui-même susceptible d'interprétation, ce qui le place au même niveau qu'un énoncé de l'Algèbre abstraite. Le passage à la logique constitue de cette manière moins une application habilitée par le caractère général de l'Algèbre, qu'une prise en charge philosophique et logique de cette généralité des signes impliquée dans la méthode algébrique de généralisation mathématique. Par cette prise en charge, la généralité est reconnue pour ce qu'elle est, à savoir une propriété sémiotique, et investie d'un statut philosophique en même temps que d'une portée logique. Mais par là aussi, elle est disséminée sur toute la surface du champ sémio-logique. Marquée par cette dissémination homogène, la généralité des signes est tenue pour acquise, au point de devenir invisible. De ce fait, elle ne saurait être un élément logique comme un autre, et à la différence du système frégéen, avec son « signe de généralité », aucun instrument particulier de l'appareillage logique ne saurait être prévu pour la capturer. Dans son inefficacité opératoire, la généralité n'agit que comme la condition même sous laquelle le logique peut se déployer et opérer en tant que tel.

Toutefois, si par la généralité de ses signes l'Algèbre abstraite ouvre une surface *générale* des fonctionnements sémiotiques servant de socle pour l'ensemble des opérations conceptuelles et des instrumentations techniques que nous appelons formalisation du sens, ce n'est pas par elle que l'espace de cette formalisation se stabilise et se perpétue. Car, après tout, comme nous l'avons déjà souligné, la généralité est une propriété sémiotique assez *particulière*. Et cela dans un sens très précis qui n'a aucun besoin de faire appel à des tours de passe-passe dialectiques. La preuve en est que, autant la logique booléenne, construite à partir de la généralité de l'Algèbre abstraite, est capable de manipuler avec adresse la forme de concepts généraux, autant elle est très mal armée pour exprimer des concepts particuliers (au moyen du fameux symbole « *v* »[250]), et demeure, pour le reste, profondément impuissante à exprimer l'individualité. On pourra voir dans l'impossibilité d'un signe spécifique exprimant

---

[248] Voir, par exemple, Baker et Hacker (1984, pp. 13-14). Quant à Boole, dans l'introduction à *The Mathematical Analysis…*, par exemple, il parle lui-même de « application of Mathematical forms to the science of Logic » (1847, p. 2).

[249] Boole attribue à la logique cette place privilégiée dans la même introduction dans laquelle il parlait de la logique comme une application des mathématiques (1847, p. 13). Sur cette place de la Logique on pourra voir aussi Koppelman (1971, p. 253 sq.) et Laita (2000, p. 54).

[250] Pour une explication du symbole « *v* », capturant le sens de « quelques », et pour les problèmes qu'il soulève, voir Hailperin (1986, pp. 108-112).

la généralité, non moins que dans cette impuissance à exprimer l'individualité, des manifestations de l'incapacité constitutive de l'Abstraction symbolique à informer une logique du contenu (l'individu étant, comme nous l'avons vu, une figure du contenu, la généralité, une expression de contenu). C'est pourquoi l'émergence avec Frege d'une logique formelle du contenu viendra dénoncer la particularité de cette logique abstraite de la généralité.

Toutefois, si l'espace où se développe le problème des déterminations formelles de la signification était assuré par ce caractère particulier qui est la généralité des signes de l'Algèbre abstraite, cet espace se serait clos avec l'abandon de la logique booléenne moins d'un demi-siècle plus tard, un peu à la façon dont il s'est clos à chaque fois avec l'épuisement de chaque projet de formalisation antérieur, de Raymond Lulle à Leibniz. Pourtant, la logique booléenne ne sera abandonnée qu'au nom d'autres logiques qui la poursuivent, et le renouvellement des ressources qui justifie leur adoption ainsi que leurs effets conceptuels éventuels, prendront appui sur le même système stratifié de positivité qui s'est constitué avec l'émergence de l'Algèbre abstraite. Ce qui veut dire que l'émergence de l'Algèbre abstraite a bien impliqué l'ouverture de cet espace où la formalisation du langage et du sens pouvait se poser de manière durable, ainsi que la constitution de la surface de pur fonctionnement sémiotique dont cet espace pouvait recevoir ses *a priori* positifs. Cela ne tient pas tant à la particulière généralité de ses signes, *qu'au fait de la sémiotisation générale de l'espace des mathématiques,* dont la généralité proprement algébrique n'est qu'un épisode.

Certes, dans cet espace sémiotisé des mathématiques, l'Algèbre avait su se tailler une place privilégiée, allant jusqu'à se poser comme mathématique universelle. Mais il n'en reste pas moins que les autres régions des mathématiques sont demeurées actives comme autant de régimes sémiotiques (fût-ce problématiques, comme dans le cas de l'Arithmétique) particuliers et irréductibles, pour ce qui est de la façon de signifier. Autrement dit, l'Algèbre n'est arrivée à assujettir la Géométrie et l'Arithmétique *mathématiquement* qu'en les dotant en retour d'une indépendance *sémiotique*. Cela veut dire que ces autres domaines constitueront, malgré leur asservissement proprement mathématique, des sources de règles, de procédures, de mécanismes, de protocoles, d'assemblages, de dispositif, bref de pratiques « formelles », sur lesquelles va appuyer, aussi légitimement que sur l'Algèbre, le fonctionnement des signes en tant que tels. Se produit ainsi, par le mouvement même qui érige l'Algèbre en souveraine de l'espace mathématique, une mise à disposition virtuelle de formes alternatives qui continueront à hanter la configuration de l'espace général de la signification par leur puissance inhérente de problématisation.

L'Abstraction symbolique n'a donc ouvert l'espace général de la formalisation du sens qu'en le peuplant, sans doute malgré elle, de figures et de fonctionnements mathématiques capables de contester la légitimité de son identification avec cet espace lui-même. De telle sorte que, lorsque ces figures et ces fonctionnements arriveront à se rassembler avec consistance d'une façon inédite par rapport à la configuration de l'Abstraction symbolique, elles n'institueront pas seulement une configuration nouvelle dans l'espace d'une sémiotique formelle : elles feront ressortir aussi le sol stratifié mais instable où les différents régimes de formalité, comme autant de styles de détermination positive des signes, peuvent se succéder, se superposer, se complémenter et s'empiéter les uns les autres.

Il faudra sans doute attendre les formulations de Frege pour qu'un tel événement ait lieu dans la brève histoire de la pensée formelle moderne. Pourtant, des symptômes de cet événement à venir pouvaient déjà être détectées dans les strates profondes de cet espace. Mieux encore, celui qui avait déjà essayé de faire remonter ces failles à la surface de la logique, n'était autre que *Boole lui-même*.

II.4.2. L'expulsion de l'Arithmétique

On a pu voir que l'émergence de l'Algèbre abstraite se confondait avec le processus d'identification et de dégagement d'une dimension sémiotique spécifique, c'est-à-dire d'un fonctionnement particulier au niveau des signes, lié fondamentalement à la reconnaissance et l'établissement de règles combinatoires, jusqu'à trouver la consistance capable de faire de ces règles les seules déterminations du sens des signes. Ce processus apparaissait donc comme un travail progressif d'analyse d'expressions mathématiques du type « $a + x = b$ » (dans le cas le plus simple), en ce qui concerne le fonctionnement de chacun des symboles ou signes impliqués. Si bien que le processus de constitution de l'Algèbre abstraite parvient à son accomplissement lorsque chacun de ces signes devient susceptible de recevoir une nature purement algébrique. Comme on l'a vu, ce moment a lieu lorsque Gregory réussit à effacer toute distinction dans la nature sémiotique des symboles en question : à la suite de ses travaux, le sens de tout symbole admet d'être déterminé sans reste par les lois combinatoires qui le régissent, et les symboles ne se distinguent que par la différence entre ces règles de combinaison. Étant donné que c'est sur cette surface définie par les propriétés sémiotiques des mathématiques que l'espace général de la formalisation du sens prend appui, c'est aussi sur elle, c'est-à-dire au niveau même de la forme propre à ce type d'expressions, que la spécificité du régime instauré par l'Abstraction symbolique doit trouver ses conditions, non moins que les principes de ses alternatives. Or, aussi générales que les algébristes anglais aient voulu les considérer, et aussi homogènes que l'établissement final de l'Algèbre s'évertue à les faire apparaître, ces expressions ne peuvent être vues comme purement algébriques, dans le sens de

Gregory, qu'à condition de laisser hors de portée un type de signe qui rendrait tant leur généralité que leur homogénéité hautement problématique, à savoir les *signes arithmétiques*.

On objectera immédiatement que les signes graphiques ou diagrammatiques de la Géométrie ne se voient pas moins exclus dans ce processus. Mais le sens même de l'Analyse, dans la perspective algébrique que les mathématiciens anglais empruntent à Lagrange, implique de façon nécessaire que l'ensemble des propriétés mathématiques véhiculées par ces signes se trouve parfaitement conservé dans la traduction dans les symboles de l'Algèbre, au point où les signes géométriques pourraient être restitués à tout moment si besoin était. C'est ce que Babbage voulait dire lorsqu'il postulait la généralité du contenu de ces deux disciplines. Les signes arithmétiques, indissociables aux yeux des algébristes des objets singuliers dont ils ne sont que la marque immédiate, doivent en revanche entièrement disparaître du plan symbolique dans lequel l'Algèbre se reconnaît, et sur lequel elle projette son intelligibilité globale de l'espace des mathématiques. Cette exclusion n'est pourtant pas un oubli, encore moins un manque d'intérêt. L'un des buts fondamentaux de la conceptualité sémiologique élaborée au cours de ce processus, et en même temps l'un de ses effets les plus efficaces, a été précisément d'expulser l'Arithmétique du territoire des signes sur lesquelles l'analyse peut porter. Depuis Woodhouse et sa façon de parler de « signes » algébriques en face des « objets » arithmétiques, jusqu'à Peacock et l' « Algèbre arithmétique » articulée par la distinction entre définition et interprétation, la conceptualité déployée par les mathématiciens de Cambridge a eu l'expulsion de l'Arithmétique hors de la sémiotique pour effet délibéré principal. Même dans le cas de Gregory, l'effacement final de toute distinction de nature entre les symboles, qui pourrait faire croire que l'on devient ainsi capable d'embrasser la totalité des signes disponibles dans l'écriture mathématique, n'est possible qu'à condition d'exclure les signes de l'Arithmétique. Car, comme il l'avoue lui-même, l'homogénéité algébrique des signes est « indépendante de toute théorie sauf de celle-ci : qu'il y a une Algèbre Symbolique différente de l'Algèbre Arithmétique, dans laquelle on s'occupe des lois de la combinaison des symboles » (Gregory, 1843/1865, p. 236). Ce qui veut dire que seule l'exclusion des signes arithmétiques exercée par la célèbre distinction introduite par Peacock permet d'atteindre l'homogénéité en question.

L'exclusion des signes de l'Arithmétique prend fondamentalement dans ce contexte la forme d'une réinterprétation ou réassignation de sens : requalification des signes d'opérations, des lettres fonctionnant comme des inconnues, voire du signe d'égalité. Les concepts sémiologiques n'ont été créés et utilisés que pour exercer cette fonction de requalification. Or la dynamique de création et d'aménagement de ces concepts était donnée par le fait que des propriétés sémiotiques toujours inhérentes à l'Arithmétique trouvaient la manière de ressurgir malgré tout au milieu du plan requalifié des symboles algébriques. Nous avons indiqué deux formes sous lesquelles ces réapparitions avaient lieu : l'asymétrie ontologique, occasionnée par le signe d'égalité, et l'asymétrie logique, pouvant se manifester entre les signes littéraux. En regardant l'ensemble du processus allant de Woodhouse à Gregory, on comprend que la stratégie sémiologique privilégiée des algébristes anglais a été d'assumer fondamentalement le défi posé par le second de ces problèmes, et de développer autour de lui une conceptualité capable d'en faire un principe de délimitation. Autrement dit, de capturer la distinction entre deux types de signes littéraux, à signification rigide et à signification variable, et de ne traiter comme purement algébriques que les seconds, dont les premiers ne seraient qu'une forme appauvrie. La distinction entre Algèbre arithmétique et Algèbre symbolique en est certainement le résultat le plus accompli, servant comme seule condition pour la constitution finale de l'Algèbre avec Gregory. Dans ce sens, les nouvelles distinctions de De Morgan ne doivent pas être vues comme une critique de celles de Peacock, mais au contraire, comme une naturalisation de celles-ci qui les fait passer à l'arrière-plan propre à toute condition générale, les vidant de tout enjeu autre que technique. Par l'homogénéisation que ces distinctions habilitent dans la nature des symboles à partir des travaux de Gregory, l'asymétrie ontologique liée au signe d'égalité se trouve, sinon résolue, du moins neutralisée, car à l'intérieur du cadre défini par ces conditions, l'égalité ne peut mettre en relation que des symboles représentant des opérations, autrement dit, uniquement des signes algébriques.

Or, parmi les différents types de signes arithmétiques, il en est un qui s'est avéré résolument réfractaire à toute réinterprétation algébrique. Il s'agit bien évidemment des *signes proprement numériques ou chiffres*. En effet, les chiffres n'ont jamais fait partie des expressions mathématiques à partir desquelles s'est développée la pensée menant à l'établissement de l'Algèbre abstraite. Ces signes, au moyen desquels s'effectue typiquement la représentation des nombres, ont été systématiquement exclus du paysage ouvert de la signification mathématique. Ce qui pourrait paraître compréhensible dans un premier moment ; mais lorsque, après presque un demi-siècle de développement, le projet d'algébrisation devient aussi radical qu'il s'est voulu alors, cette absence ne peut que troubler. D'autant plus que, malgré ce rejet tenace, des manifestations du problème des signes numériques continueront à hanter les expressions algébriques, même dans le cadre de l'algébrisation totale proposée par Gregory.

En effet, il suffit de considérer les indices « m » et « n » affectant un signe algébrique dans le cas de la seconde des classes d'opérations conçues par Gregory, nommées précisément « opérations d'indice » (*index-operations*), et répondant aux lois suivantes :

$$1)\ f_m(a) \cdot f_n(a) = f_{m+n}(a)$$

$$2)\ f_m(a) f_n(a) = f_{mn}(a).$$

Cette classe capture, entre autres, la loi des exponentielles arithmétiques, soit :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Cependant le symbole d'opération qui est ici en train d'être défini n'est pas « m » ou « n », mais « f », ou plus précisément, ce symbole lorsqu'il est affecté d'un indice de type « m », c'est-à-dire « f_m ». Il est évident que les signes « m » et « n » fonctionnent en différenciant cette opération ; ils sont en ce sens des opérateurs de second degré, des opérateurs de différenciation d'un opérateur (« f » en l'occurrence). Ainsi, si les lois symboliques définissant les opérations d'indice portent sur le symbole d'opération « f », elles agissent cependant par une mise en rapport du principe de différenciation véhiculé par les signes de différenciation « m » et « n » (mise en rapport qui se laisse exprimer comme « $m + n$ » et « mn »). *Toute la question est dès lors de savoir de quelle nature est la différenciation que les signes en indice exercent sur le symbole d'opération* « f ». Gregory indique seulement que « f_m » et « f_n », « sont des espèces différentes du même genre d'opérations » (1838/1865, p. 4). La différenciation véhiculée par les signes de type « m » serait donc de l'ordre de la différence *spécifique*. Mais il se trouve que Gregory ne peut accorder un sens à ces signes que lorsque l'on suppose que « m » et « n » sont des *nombres*[251]. En particulier, lorsqu'il s'agit de nombres entiers, ces symboles se laissent interpréter par :

$$f_1(a) = a,$$

et (bien que Gregory ne donne pas cette écriture explicite) :

$$f_m(a) = f\left(f\big(f(\ldots(a)\ldots)\big)\right),$$

avec un nombre *m* de répétitions de l'opération f sur a. Cette interprétation reste valable sur le fond, même lorsque les indices sont des nombres négatifs ou fractionnaires (cf. 1838/1865, pp. 4-5).

On voit bien que l'interprétation des indices « *m* » et « *n* » en termes d'itération pourrait bien constituer la définition même de ces signes, au point que les nombres exprimés par les signes numériques pourraient être conçus et déterminés à partir des règles algébriques. On sait d'ailleurs que cette conception orientera de façon déterminante les recherches mathématiques et logiques sur le Continent dans la seconde moitié du XIX[e] siècle, dans le cadre de l'arithmétisation de l'Analyse à partir de la célèbre fonction « successeur ». Mais au sein même de la constitution de l'Algèbre symbolique, rien de cela n'a lieu[252]. On peut en

---

[251] On remarquera d'ailleurs que Gregory ne dit pas que ces signes « représentent », « expriment » ou « dénotent » des nombres, mais qu'ils « *sont* » des nombres. Cf. par exemple Gregory (1838/1865, p. 4).

[252] Ceci est non seulement le cas pour Gregory, mais également pour Peacock, qui avait lui aussi donné quelques années auparavant une interprétation des indices en termes d'itération opératoire (cf. 1830, pp. xvi-xvii et ch. VI). Son interprétation étant encore trop attachée aux formes de l'Arithmétique et de ce fait, loin de la

imaginer la raison : envisagés sous la seule forme symbolique, ces signes n'expriment pas des nombres, mais *représentent* des nombres, ce qui dans le contexte de l'Abstraction symbolique naissante veut dire qu'ils doivent pouvoir représenter une série indéfinie d'autres choses. Ainsi, si les nombres étaient *définis* à travers l'opération itérative, ils ne sauraient être écartés de chacune des interprétations que l'on doit pouvoir donner par principe de ces symboles d'itération. Au demeurant, Gregory avoue ne pas arriver pas à montrer de quelles autres interprétations ces signes seraient capables. À la seule exception du cas où la notation « indique » l'opération de différentiation, « représentée » par le symbole « d »[253]. L'itération reste d'ailleurs valable dans cette situation. Comment la distinction exercée par les indices sur l'opérateur (« d » en l'occurrence) pourrait-elle alors dans ce cas ne pas être *numérique* ? Et si l'itération qui interprète les nombres dans le cadre des opérations d'indice n'était plus valable, comment deux opérations pourraient-elles différer seulement par l'indice ? De quelles espèces du même genre d'opérations pourrait-il s'agir ? Les mêmes questions pourraient d'ailleurs se poser par rapport aux expressions « $(+)^{\frac{d}{dx}}$ », « $(-)^{\frac{d}{dx}}$ » ou « $(+)^{\log}$ », que Gregory imagine pour ouvrir l'horizon des interprétations possibles, mais auxquelles il reconnait ne pouvoir donner aucune interprétation. D'autre part, si l'on parvient à définir des rapports pour des « espèces » différentes marquées par ces indices de telle sorte que l'on pourrait attribuer un sens à « $m + n$ » et à « mn », sans que « m » et « n » ne deviennent des opérations d'itération pour autant, quel serait alors le rôle de « f » dans ce contexte, et dans quelle mesure la classe d'opérations définie par ces lois symboliques ne se confondrait-elle pas ainsi avec d'autres, telles l'associative ou la logarithmique, par exemple ? Malgré l'insouciance de Gregory vis-à-vis de ces problèmes[254], tout se passe comme si, alors que tout élément arithmétique semblait définitivement éradiqué du plan symbolique de l'Algèbre (soit par symbolisation, soit par exclusion), les signes d'indice nécessités par les lois mêmes de l'Algèbre étaient *intrinsèquement numériques*.

Et pourtant, aucun droit de cité n'est accordé au nombre dans l'enceinte ouverte de l'Algèbre. Rien ne peut expliquer autrement cette incapacité à assumer son insistance sur la

---

définition des purs symboles opératoires, la possibilité de *définir* les nombres à partir de l'opération d'itération était encore plus faible.

[253] Gregory s'appuie pour cette interprétation sur le théorème de Taylor (cf. 1838/1865, p. 5). Voir aussi Gregory (1841/1846, pp. 239-240).

[254] Cette insouciance ne rencontre qu'une exception peut-être. Il s'agit d'une remarque faite au moment de l'introduction des trois lois symboliques de la différentiation dans les *Examples*, dont l'importance tient moins à ce qu'elle trahit une certaine prise de conscience du problème par Gregory qu'au fait qu'elle intervient dans les lignes mêmes d'où Boole empruntera directement ses lois symboliques : « The third law [$a^m \cdot a^n \cdot u = a^{m+n} \cdot u$] is not so much a law of combination of the operation denoted by a, but rather of the operation performed on a, which is indicated by the index affixed to a. It may be conveniently called the law of repetition, since the most obvious and important case of it is that in which m and n are integers, and am therefore indicates the repetition m times of the operation a. » (Gregory, 1841/1846, pp. 237-238).

surface sémiotique des lois algébriques, même lorsque celles-ci offrent les instruments suffisants pour son incorporation consistante à l'empire du symbolique. Exclu par principe du domaine de l'Algèbre, le nombre se trouve expulsé du domaine des signes tout court, dont l'Algèbre s'érige, suivant les prétentions de l'école anglaise, en théorie générale. Il en découle que, relégué aux territoires de l'existence nue, *le problème du statut proprement sémiotique du nombre ne s'est jamais posé dans le contexte d'émergence de l'Algèbre abstraite*, ou du moins, pas d'une façon qui pourrait se rapporter aux réflexions autour de la nature des signes qui se développaient au rythme de ce contexte. Si les conséquences strictement mathématiques de cette circonstance ne sont pas faciles à évaluer, les conséquences pour la logique mathématisée qui est sur le point de naître à partir de ces développements sont plus évidentes. Du moins dans ses contrecoups négatifs, puisque suite à cette exclusion première et structurante, les signes numériques n'ont pu devenir l'occasion de la création d'aucun concept sémiologique, ce qui contraindra le fonctionnement particulier des signes numériques, et les fonctions sémiotiques spécifiques qui pourraient leur être associées, à ne jouer aucun rôle dans la logique formelle que ce cadre conceptuel rendra possible.

Nous l'avons déjà dit : cette attitude envers les signes numériques ne relève aucunement d'une négligence ou d'un désintérêt, et les algébristes de Cambridge n'étaient certainement pas ignorants des développements passés et présents de l'Arithmétique. Les conditions intrinsèques du problème du développement d'une Algèbre abstraite tel qu'il s'est énoncé dans le contexte de l'école anglaise ont exigé que les connaissances et les dernières recherches en cours en Arithmétique ne fussent pas intégrées aux recherches algébriques et à leur réflexion sémiotique. Le cas de De Morgan est à cet égard remarquable : il est l'auteur d'un manuel d'Arithmétique publié en 1830, qui comptait 5 éditions en 1846, d'un long essai en 1836 portant sur le rapport entre nombre et grandeur chez Euclide, et même d'un très impressionnant catalogue commenté d'œuvres arithmétiques depuis l'invention de l'imprimerie[255]. Ces ouvrages s'en tiennent néanmoins à une volonté fondamentalement pédagogique ou de divulgation qui contraste nettement avec le caractère novateur des recherches sur l'Algèbre. Malgré la contemporanéité de ces travaux, les deux voies demeurent profondément déconnectées.

Plus intéressant néanmoins est le cas de Peacock, à qui le catalogue d'œuvres arithmétiques de De Morgan est d'ailleurs dédié, comme étant « le seul anglais vivant dont on sait, par la preuve de la publication, qui a enquêté sur l'histoire tant scientifique que bibliographique de l'Arithmétique » (De Morgan, 1847b, p. i). En effet, en 1826, bien avant

[255] Cf. (respectivement) De Morgan (1830/46; 1836; 1847b).

son rapport de 1833, et même de la première version de son célèbre *Treatise on Algebra*, publié en 1830, Peacock avait écrit un très long article sur l'Arithmétique, publié dans l'*Encylopaedia Metropolitana*[256]. Dans ce texte, où Peacock s'occupe avec une minutie remarquable des aspects historiques et culturels, l'Arithmétique est définie dès le premier paragraphe comme « la science des nombres et de leur notation, et des différentes opérations auxquelles ils sont sujets » (1826/1849, p. 369). Curieusement, Peacock remarque aussitôt qu'il n'inclura pas dans son traité rien de ce qui relève de la « Théorie des nombres », qui se trouve être l'objet d'un traitement séparé dans la même encyclopédie. Dans ce traité évoqué par Peacock, dû au mathématicien et physicien Peter Barlow, la Théorie des nombres est, quant à elle, définie comme « une branche de l'Analyse par laquelle on recherche les propriétés, les dépendances et les relations des nombres entiers » et dans laquelle « les nombres sont distingués en classes, d'après la nature et la dépendance des parties entières dont ils sont composés » (Barlow, 1849, p. 642)[257]. Or la raison que Peacock allègue pour ne pas traiter les questions appartenant à la Théorie des nombres, n'est pas que celle-ci forme une branche distincte de l'Arithmétique, mais que *son traitement nécessiterait des connaissances très étendues en Algèbre*. Comme si l'Algèbre, présente comme un principe toujours virtuel au milieu des mathématiques, pouvait encore détenir la vérité de l'Arithmétique dont elle aura à se détacher radicalement pour trouver son indépendance.

Toujours est-il que Peacock s'occupe dans ce texte de la notion de nombre, et des opérations numériques communes qui ne nécessitent pas de l'intervention de l'Algèbre. Et malgré son approche souvent psychologique, *la question de l'essence des nombres est directement rapportée à celle du langage*. Ainsi, réfléchissant sur le difficile passage de l' « idée vague de multitude » à celle de nombre, Peacock affirme :

> Abstraction is the creature of language, and without the aid of language he [a child] will never separate the idea of any number from the qualities of the objects with which it is associated. (Peacock, 1826/1849, p. 369)

Suivant son exemple, sans l'aide du langage, l'idée de quatre vaches aura du mal à communiquer avec celle de quatre chevaux. Pour cela il faudra capturer l'idée du nombre quatre au moyen d'un mot en tant que « symbole général », indépendamment des objets auxquels elle peut être attachée. Une distinction est donc à faire entre deux types de nombres :

---

[256] Pour une analyse détaillée de ce texte, on pourra consulter Durand-Richard (2011).

[257] Autrement dit, la Théorie des nombres renvoie à ce qu'on appelait « Arithmétique supérieure », ou encore de nos jours « Arithmétique modulaire », articulée autour de la théorie des congruences entre des entiers, dont les fondements et les développements les plus modernes et systématiques avaient été posés par Gauss dans ses *Disquisitiones Arithmeticae* de 1801. Le nom de Gauss n'apparait pas dans cet article de Barlow de 1848, mais il occupe bien une place centrale dans son assez célèbre *Elementary Investigation of the Theory of Numbers*, de 1811. Cf. Barlow (1811, pp. viii-ix).

> We are thus lead to the distinction of numbers into abstract and concrete, though the abstraction exist merely in the word by which any number is designated, or in the equivalent symbol by which it is represented in different arithmetical systems. (Peacock, 1826/1849, p. 369)

Aussi commune qu'elle ait pu être à l'époque[258], cette distinction doit étonner sous la plume l' « Euclide de l'Algèbre » – comme Peacock a été parfois appelé par les historiens des mathématiques. Car par elle la nature même du nombre (et non pas des termes généraux censés le représenter dans le contexte de l'Algèbre arithmétique) est placée au niveau même des signes, à l'encontre de la présupposition originelle des algébristes anglais, pour qui les nombres constituent des objets, présupposition sur laquelle prenait appui le premier élan d'indépendance de l'Algèbre. Peacock, en se plaçant, à son insu peut-être, à l'extrême opposé de ce point de départ, affirme donc que l'Arithmétique, dans la mesure où elle fait partie des mathématiques pures, se trouve être profondément tributaire des ressorts inhérents à la généralité des signes d'un langage.

Cette seule circonstance aurait pu être l'occasion de l'apparition de tout un ensemble de problèmes féconds pour la pensée générale du signe, qui était en train de se fabriquer en phase avec la constitution de l'Algèbre. Car le caractère général des symboles a du mal à s'accorder à la singularité propre à tout nombre, à laquelle l'abstraction ne saurait porter atteinte, sans porter atteinte du même coup à la notion de nombre tout court. Peacock pose le problème à sa manière :

> We might suppose this process for the formation of abstract numbers, to be completely effected by attaching names to the series of natural numbers, beginning from unity; but if such names were perfectly arbitrary and independent of each other, our progress in numeration would be extremely limited, as the memory would be overwhelmed with a multitude of disconnected words; and the performance of the most simple operations of addition, subtraction, multiplication, or division, would require an insight into the constitution of numbers, to which the mind, particularly in the infancy of society, would be altogether unequal… (Peacock, 1826/1849, p. 370)

Malgré le cadre psychologisant dans lequel Peacock présente son argument, un problème fondamental concernant le rapport entre nombre et langage n'en est pas moins soulevé, à savoir celui de *la généralité d'un être dont l'essence est d'être singulier*. Car d'une part les nombres abstraits semblent se laisser réduire à une suite infinie (ou du moins indéfinie) des noms singuliers et déconnectés ; mais de l'autre, une telle nature sémiotique

[258] En effet, Babbage (1826, p. 19) cite Lagrange faisant cette distinction ; De Morgan l'utilise également, par exemple dans De Morgan (1830/46, p. 8), (1836, p. 2), (1847b, p. 86).

rend impraticable, voire impossible, les opérations élémentaires qui définissent également la nature des nombres, au moins dans l'extension illimitée qui constitue l'essence et l'intérêt même de l'Arithmétique. Peacock signale aussitôt (p. 370) que l'examen des « mots numériques » des différents langages montre l'existence de principes réguliers dans l'attribution des noms individuels aux nombres. Pourtant, la considération de la constitution des nombres, et la production des mots numériques en fonction de principes réguliers qui en découle, contredissent la singularité présumée du nombre abstrait comme tel que la suite des noms strictement singuliers était censée exprimer. Et sans doute ne s'agit-il pour Peacock que d'un problème *de fait*, suscité par les limitations de l'esprit, auquel des techniques langagières viendraient donner une solution, elle aussi de fait. Mais si l'on prend au sérieux l'affirmation faite par Peacock lui-même que les nombres abstraits n'existent que par les mots qui les effectuent et dont ils reçoivent leur caractère abstrait et général, alors les techniques linguistiques de numération recèlent plus que l'apparence de vérité du nombre lui-même. Il suffirait alors de suivre l'examen du langage, non plus comme un simple fait historique, mais en lui-même ainsi que dans ses conditions de possibilité, pour s'apercevoir que l'impossibilité d'un système numérique constitué de noms singuliers, indépendants et entièrement déconnectés n'est pas de fait, mais *de droit*. Les caractères communs ou invariants dans les pratiques de numération des différentes langues devraient dès lors être envisagés comme bien plus que des curiosités anthropologiques, et suggéreraient les principes formels qui constituent la nature même du nombre.

À ce sujet, Peacock identifie dans le système de notation décimale un fonctionnement à l'œuvre dans d'autres systèmes à différente échelle, à savoir le groupement des nombres en classes dont les unités augmentent en proportion égale (par dizaines dans le système décimal), selon la pratique de comptage sur abaque ou boulier (p. 370 sq). Or, la nature des nombres dans la mesure où elle résulte de la distribution en classes, *c'est précisément la Théorie des nombres qui s'en occupe*. En effet, si dans l'article de Barlow de l'*Encyclopaedia Metropolitana* cette question ne figure pas, dans son traité de 1811 elle occupe un chapitre entier, qui s'ouvre sur la démonstration du théorème qui énonce que tout nombre N peut être réduit à la forme polynomiale :

$$N = ar^n + br^{n-1} + cr^{n-2} + etc.\ pr^2 + qr + w$$

où r, la base (*radix*), peut être un nombre quelconque, et a, b, c, etc. des entiers plus petits que r. La preuve est constructive et consiste dans la division de N et de ses restes par les puissances successives de r par ordre décroissant (Barlow, 1811, p. 220). Ainsi, les chiffres au moyen desquels on écrit les nombres en notation décimale correspondent aux coefficients a, b, c… lorsque $r = 10$. Barlow donne l'exemple :

$$76034 = 7 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4$$

après quoi il remarque que les différentes valeurs de la base *r* déterminent différentes échelles de notation : binaire, ternaire, etc., chacune constituée par autant de chiffres ou signes élémentaires que le nombre *r* (pp. 21-22).

Il en résulte que *l'identité d'un nombre, autant que sa singularité, dépend entièrement du système à l'intérieur duquel cette identité et cette singularité sont exprimées. Système dont la nature et le fonctionnement sont éminemment algébriques*. Sans un tel système de référence ou une telle structure, il est strictement impossible de déterminer quel élément singulier, quel nombre, est celui représenté, par exemple, par le signe numérique « 1534 ». Mieux, il se pourrait qu'un seul système de référence ne suffise pas à une telle détermination, mais que soit nécessaire la correspondance entre au moins deux de ces systèmes (« 1534 » en système sénaire est « 418 » en système décimal – ce que Barlow note avec une expression qui laisserait Woodhouse perplexe : « 1534 = 418 »), fut-ce le système « unaire » l'un d'entre eux : « 8 = 11111111 »…

La prise en compte de ces considérations dans le cadre des réflexions des mathématiciens de Cambridge autour de la nature sémiotique de l'Algèbre aurait pu obliger à repenser la raison même de la distinction entre Algèbre et Arithmétique, ainsi que le secret de leur lien intime. Car ce que ces analyses de la sémiotique du nombre suggèrent, c'est que la fonction de particularité ou de singularité incarnée par les nombres devient une affaire algébrique, et se trouve donc soumise aux règles propres des termes généraux et abstraits et de leur combinaison, lorsque les nombres sont envisagés du point de vue du langage et des signes. Les unités arithmétiques concrètes que l'Algèbre croira devoir exclure pour se constituer au milieu des seules abstractions pourraient en réalité être engendrées par le fonctionnement même de ses propres règles ; à la limite, ces unités singulières pourraient n'être rien d'autre qu'un effet de la structure dont l'Algèbre est le nom.

Pourtant, cette possibilité d'assumer la singularité arithmétique comme une puissance inhérente à l'Algèbre, déjà manquée par Gregory, aura été manquée une première fois avant lui par Peacock. L'examen de son premier traité d'Algèbre, paru en 1830, montre que cette dimension sémiotique des nombres qu'il avait su reconnaître quatre ans auparavant a été subrepticement laissée de côté, et ne joue aucun rôle dans la conceptualité qui entoure et justifie l'émergence de l'Algèbre. Ainsi, dans les mêmes pages qui présentent dans ce traité la distinction entre Algèbre arithmétique et symbolique, célèbre à partir de son rapport de 1833, Peacock ne considère pas convenable de s'engager dans la discussion des différentes notations conventionnelles des nombres, tout en reconnaissant que cela constitue une partie essentielle de l' « Analyse Combinationnelle [*Combinational*], qui a été si abondamment cultivée en Allemagne » (1830, p. xxiv). On ne s'étonnera pas donc si dans le chapitre VII de ce même traité, lorsque Peacock s'occupera de la possibilité pour tout nombre d'être exprimé sous une forme algébrique, seules les puissances de 10 seront considérées, évitant de cette façon toute confrontation avec la question des multiples expressions d'un même nombre selon l'échelle de notation[259]. La forme algébrique du nombre apparaît donc comme une simple façon dont l'Algèbre peut s' « appliquer » à l'Arithmétique et faciliter la détermination de ses propriétés intrinsèques, sans les définir pour autant.

Ce rapport d' « application » de l'Algèbre à l'Arithmétique sera précisément celui qui permettra à Peacock d'incorporer plus tard des éléments de la Théorie des nombres dans le contexte des recherches algébriques. En effet, en 1842 Peacock présentera le premier volume d'une nouvelle version de son célèbre traité, où notamment la question des formes algébriques des nombres sera traitée dans toute sa généralité. Les aspects sémiotiques de l'Arithmétique ne tardent pas à apparaître. Dès le début, Peacock explique que les nombres « dénotés » (*denote*) par les signes littéraux de l'Algèbre arithmétique sont exprimés au moyen des dix chiffres « à l'aide de la notation arithmétique ordinaire », en rapportant, dans une note en bas de page, cette notation à la décomposition en puissances de 10 qu'il avait traitée dans son ouvrage de 1830 (1842, p. 1). Mais plus fondamentalement encore, cette dimension sémiotique ressort dans le dernier chapitre, intitulé « Sur les représentations et propriétés symboliques des nombres ». Dans ces pages, Peacock reconnaît la différence entre les notations arithmétique et algébrique, qui « amènent à des règles différentes dans ces sciences pour exécuter les opérations fondamentales, et à des formes des résultats aussi très différents » (p. 361). Deux traits caractérisent de manière constitutive cette différence : l'utilisation d'un nombre fini de signes en Arithmétique (les dix chiffres) face au nombre illimité des signes algébriques, restreints dans leur représentation uniquement par les opérations dans lesquelles ils sont engagés ; et deuxièmement, la valeur locale des positions des signes arithmétiques lorsque les chiffres sont écrits consécutivement, absente dans l'écriture consécutive des signes algébriques, qui exprime le produit continu entre eux (p. 361). Peacock en conclut :

> These and other distinctions make it extremely difficult in enquiries relating immediately to the forms of arithmetical notation, to transfer the conclusions of algebra to arithmetic and conversely, except through the medium of ordinary language, and deprive us of many of those advantages which are derived, in other cases, from the use of general symbols. (Peacock, 1842, p. 361)

[259] Peacock (1830, p. 160) : « Any number may be expressed in an algebraical form, by multiplying each digit into a power of 10 equal to the number of digits which succeed it, and connecting the results together with the sign + ».

Les recherches de ce chapitre s'ouvrent ainsi sur la possibilité d'exprimer un même nombre dans des bases différentes, ce qui mène au théorème déjà évoqué chez Barlow, et démontré par Peacock de la même façon. Les différentes échelles de notation sont explorées, non moins que la règle de transposition entre elles. Cependant, ce fonctionnement des signes proprement arithmétiques n'est pas rapporté par Peacock à l'essence du nombre comme tel, mais uniquement à leur expression ou notation, ce qui d'après lui rend ces considérations inutiles pour les recherches des propriétés strictement arithmétiques, qui sont quant à elles indépendantes de la notation. Dans ces dernières, en revanche :

> …numbers are represented symbolically with reference to their form, character or composition, and not with reference to the digits and radix of the scale by which they are expressed arithmetically. (Peacock, 1842, p. 368)

Peacock introduit ainsi le traitement de l'Arithmétique modulaire, où tout nombre est classé selon un module et un reste, et développe la Théorie des congruences, avec des références explicites aux *Disquisitiones* de Gauss (p. 369 sqq.).

Mais qu'est-ce qu'alors que cette double possibilité de représentation du nombre ? Quels sont les ressorts qui rapportent l'une à l'autre ? Et quelle est la place spécifique de l'Algèbre dans chacune d'elles ? Toutes ces questions auraient pu soulever des problèmes décisifs pour les réflexions autour de la nature des signes qui donnait à la fois intelligibilité et abri à la naissance de l'Algèbre abstraite. Qui plus est, ces questions auraient pu avoir des effets décisifs sur la constitution de la logique formelle qui se cristallisera à la surface de l'espace ouvert par le régime de l'Abstraction symbolique. Mais en dépit de la puissance qu'elles recèlent pour le sens même qui était en jeu dans cet espace, ces questions ne se sont jamais présentées véritablement dans le contexte des algébristes anglais. Dans son ouvrage de 1811 sur la Théorie des nombres, Barlow se plaignait déjà du manque d'intérêt que cette dimension des mathématiques suscitait en Angleterre[260]. Exclus par principe de la scène où Algèbre et sémiotique célébraient leurs noces glorieuses, les développements les plus pointus de l'Arithmétique n'y feront leur apparition que lorsque la pièce sera déjà finie. L'efficacité de la distinction sémiotiquement établie entre Algèbre arithmétique et Algèbre symbolique a partagé l'espace des mathématiques de telle sorte qu'elle a ôté toute effectivité sémiotique à l'Arithmétique. Car dans le premier traité d'Algèbre de Peacock, Arithmétique et Algèbre étaient présentées ensemble dans une continuité de sens pour laquelle des lignes de partage ne pouvaient qu'être suggérées par des concepts sémiologiques, qui se déterminaient eux-mêmes

[260] Barlow (1811, pp. ix-x) : « …there is no branch of analysis that furnishes a greater variety of interesting truths than the theory of numbers, and it is therefore singular that it should have been so little attended to by English mathematicians. With the exception of what is contained in vol. ii. of Euler's Algebra, and the notes added to the second English edition of that work, there is nothing on this subject to be found in our language. »

plastiquement dans le même mouvement. Une douzaine d'années plus tard, en revanche, ces concepts structurent la réflexion et distribuent les places par rapport auxquelles ils demeurent hors d'atteinte. Ainsi que Peacock le dit lui-même dans la préface de l'ouvrage de 1842, divisé, à la différence de celui de 1830, en deux volumes correspondant à l'Algèbre arithmétique et symbolique respectivement :

> In the preface to my former Treatise I have given a general exposition of my reasons for distinguishing arithmetical from symbolical algebra, and of my views of the just relations which their principles bear to each other, though I did not then consider it necessary to separate the exposition of one science altogether from the other. A more matured consideration of the subject, however, has convinced me of the expediency of this separation; for it is extremely difficult, when the two sciences are treated simultaneously, to keep their principles and results apart from each other, and to obviate the confusion, obscurity and false reasoning which thence arises: a short statement of the distinct and proper provinces of these two sciences will make this difficulty sufficiently manifest. (Peacock, 1842, pp. iii-iv)

S'ensuit une explication des propriétés sémiotiques sur lesquelles s'appuie cette distinction : « généralisation de raisonnement » dans le cas de l'Algèbre arithmétique, « généralisation de forme » dans celui de l'Algèbre symbolique, permanence des formes équivalentes comme principe de transition entre les deux, notions de définition et d'interprétation… Ce n'est donc qu'à l'intérieur de ce cadre devenu fixe que la Théorie des nombres pourra être incorporée : elle trouvera sa place comme simple sujet appartenant à l'Algèbre arithmétique, « qui ne peut être considéré comme étant aussi nécessaire que préliminaire à l'étude de l'algèbre symbolique », d'après l' « ordre philosophique de dépendance » (pp. ix-x). Rangée au fin fond du non symbolique, cette dimension algébrique du nombre comme tel ne se laisse concevoir que comme une application trop spécifique d'une Algèbre qui s'est construite par son exclusion, et ses implications concernant la nature des signes ne cessent pas d'être une simple curiosité. Au point que Peacock va jusqu'à suggérer au lecteur de sauter les chapitres en question, car cela peut se faire « sans aucun sacrifice sérieux » (1842, p. xiii).

Toutes ces observations montrent que l'exclusion de l'Arithmétique n'est pas un avatar dans la dialectique entre mathématiques et sémiotique qui s'est nouée dans le cadre des recherches mathématiques de l'école des algébristes anglais. Tout se passe comme si une sorte d'objectivité du problème de l'Algèbre dans les mathématiques rendait les réflexions autour du signe réfractaires à l'incorporation du fonctionnement sémiotique de l'Arithmétique. Dans la mesure où ces réflexions ont accompagné, et permis d'une certaine façon, l'invention ou la découverte de l'Algèbre abstraite à l'intérieur des mathématiques, on pourrait penser que cette objectivité problématique se trouve fondée et justifiée par les règles mêmes du savoir mathématique. Mais lorsque la conceptualité issue de ces réflexions servira de cadre pour la constitution d'une nouvelle logique, cette exclusion ne sera pas sans conséquences. Ces conséquences pourtant, l'effectivité des recherches mathématiques ne suffiront sans doute pas à les justifier. La logique mathématisée que le génie de Boole saura édifier sur ces bases, incapable de la réparer malgré ses efforts inattendus, héritera contre son gré de cette absence par le fait d'être appuyée sur une Algèbre devenue abstraite et symbolique à force maintenir l'Arithmétique bien à l'écart. Qui plus est, la cristallisation de la tradition issue des travaux de Boole l'assumera comme condition et lui offrira les lois strictes susceptibles de prendre la place de leur fondement.

Mais avant que son exclusion de l'espace sémio-logique ne soit scellée par la clôture d'une logique qui confondra son caractère formel avec son caractère abstrait, dans l'attente des conditions et de la volonté capables de la faire ressurgir, l'Arithmétique résistera une dernière fois au cœur même de l'œuvre de Boole. Étonnamment, on pourra voir dans cette résistance le signe de la singularité de l'œuvre de Boole, mais y reconnaître aussi la résistance même du contenu dans la logique, de ce même contenu que Frege revendiquera de réintroduire, confirmant ainsi le lien intime, dans le cadre de la formalisation du sens, entre les aspects sémiotiques de l'Arithmétique et une logique formelle du contenu.

III. Troisième Partie
Les dualités
de l'Arithmétique

III.1. Le retour du nombre

III.1.1. La loi des indices

La brève exposition des ressorts techniques de la logique booléenne que nous avons réalisée dans la partie précédente est de toute évidence incomplète. Non seulement à cause de son caractère sommaire et simplifié, mais avant tout parce que nous nous sommes arrêtés à la seconde des lois empruntées à l'Algèbre. Cet arrêt est volontaire et s'explique par le fait que, dans le cadre de nos recherches, la troisième loi formelle mise en œuvre par Boole, la loi des indices, suscite un intérêt particulier et mérite par là un traitement spécial et séparé, à l'écart des problèmes concernant la cohérence générale de son système à partir desquels on a l'habitude de l'étudier. C'est à partir de cette loi des indices, dont nous avons entrevu la gravité pour notre problème, qu'on pourra mieux mettre en évidence la singularité de l'œuvre de Boole par rapport tant aux algébristes anglais qu'aux logiciens booléens.

La loi des indices est remarquable à un double titre. D'abord, cette loi est la seule qui, inscrite dans le terrain de la logique, suppose une modification par rapport à sa définition algébrique courante. On peut donc penser qu'elle concentre l'essentiel de ce qui fait la spécificité de la logique (booléenne) en tant que système formel par rapport aux mathématiques dont elle emprunte la forme. Autrement dit, elle détient en un certain sens l'essence même de la logique formelle sous le régime de l'Abstraction symbolique. Mais en même temps, et peut-être pour les mêmes raisons, c'est précisément cette loi des indices qui recèle, d'une manière que nous n'avons pour l'instant que suggérée, le sens toujours farouche de l'Arithmétique et du nombre. En effet, comme nous l'avons vu, la loi des indices s'annonçait à la fin de la période de constitution de l'Algèbre symbolique comme le dernier refuge pour l'insistance du nombre au sein d'un régime sémiotique qui se constituait sur son exclusion. Gregory pressentait déjà la spécificité de cette loi lorsqu'il remarquait qu'elle ne portait pas sur les signes d'opérations, mais sur une opération portant sur ces signes, et elle-même exprimée par les indices dont on marquait les symboles d'opération. Il remarque en outre que l'espèce d'indices la plus importante est celle où ils représentent des nombres entiers mais cela ne semble curieusement mériter pour lui aucune considération supplémentaire. Au demeurant, comme nous l'avons remarqué, Gregory ne parle pas de « représenter » des nombres, mais tout simplement d'en « être », ce qui est cohérent avec le refus si enraciné dans la tradition même de l'Algèbre anglaise d'accorder un statut sémiotique aux nombres.

Or, à la suite de la présentation des trois lois symboliques dans « On a General Method… », Boole ne peut pas s'empêcher d'ajouter la remarque suivante :

> Perhaps it might be worth while to consider whether the third law [the index law: $\pi^m\pi^n u = \pi^{m+n}u$] does not rather express a necessity of notation, arising from the use of general indices, than any property of the symbol π. (Boole, 1844, p. 225).

Inspirée sans doute par la remarque de Gregory dans les *Examples*[261] (d'où Boole extrait directement ses lois), cette réflexion de Boole ne se contente pourtant pas de la répéter. Invoquant une nécessité de notation, elle *élève cette opération sur les signes d'opération à l'existence symbolique*. Cela n'aurait pas de conséquence majeure si Boole n'assumait en même temps *la nature essentiellement numérique de cette opération*. En effet, que dans cette nécessité de nature strictement symbolique, ce ne soit de rien d'autre que du nombre qu'il s'agit, Boole le voit et l'affirme comme peut-être aucun autre algébriste de l'école de Cambridge n'était prêt à le faire, ainsi qu'il ressort de ses notes à l'époque postérieures à *The Mathématical Analysis…* :

> The laws $x(y+z) = xy + xz$ and $xy = yx$ are the only laws of algebraic symbols devoid from the conception of quantity. The law $x^m x^n = x^{m+n}$ merely implies that if the results of the operation *x* be performed *n* times, and then *m* times upon the result, the final result is the same as if it were employed $m + n$ times. In full it merely expresses a law of *number*…[262] (Boole, 1997, p. 42)

Voilà donc que le nombre, qui avait été si longtemps exclu de l'espace sémiotique des mathématiques au nom de sa nature essentiellement concrète et extra-symbolique, semble enfin reconnu dans son statut sémiotique à force de voir ses signes spécifiques se reconstituer au sein même du milieu purement abstrait et symbolique qui prétendait l'exclure. Car si le nombre est déterminé par la marque d'une opération effectuée sur des sujets susceptibles d'être considérés à terme eux aussi comme des opérations, force est bien de reconnaître que sa nature appartient à cette sémiotique formelle que l'Algèbre était arrivée à caractériser précisément grâce aux formulations de Gregory.

---

[261] Cf. *supra* p. 245, note 254.

[262] L'accent mis par Boole sur le mot « nombre » indique d'ailleurs que l'affirmation de ce caractère numérique était loin d'être trivial.

Mais de quoi les signes du nombre sont-ils alors la marque ? Quelle est l'opération qui les nécessite comme sa notation propre ? Gregory avançait déjà une réponse dans ses *Examples* :

> It [the index law] may be conveniently called the law of repetition, since the most obvious and important case of it is that in which *m* and *n* are integers, and a^m therefore indicates the repetition *m* times of the operation *a*. (Gregory, 1841/1846, p. 238)

Dans le régime de l'Abstraction symbolique, *le signe numérique apparaît donc comme la trace de la répétition*. Cette interprétation des indices en termes de répétition sera celle-là même que Boole adoptera lui aussi. Cependant, si pour Gregory elle n'était que le cas « le plus évident et important », Boole, lui, ne laisse la place à aucun autre[263]. Dès lors, la loi des indices instaure chez lui une correspondance nécessaire entre répétition et nombre. Seulement, cette correspondance est présentée comme appartenant à l'ordre de la notation, ce qui, dans le contexte de l'Abstraction symbolique, n'a rien d'anodin : c'est dire que la correspondance entre répétition et nombre, bien que nécessaire, est de nature *symbolique*. Ce qui implique une détermination par des lois *arbitraires*, indépendantes des objets dans lesquelles elles pourraient être interprétées. Cette circonstance prévient dès le départ contre toute détermination simple et immédiate du nombre par la répétition, et inversement. C'est précisément cela qu'il faut comprendre par l'existence d'une *loi* des indices. Cette loi nomme très exactement la règle qui, à la charnière entre une opération de répétition et une notation intimement numérique, instaure entre l'une et l'autre une correspondance à la fois rigoureuse et non nécessaire. Aussi, si loi des indices énoncée par Gregory et reprise par Boole dans ses premiers travaux mathématiques est bien une régulation de la répétition, elle est, d'une façon plus complexe, une détermination réciproque entre répétition et opération sur des entiers, entre répétition et opération arithmétique. Ainsi, dans l'expression

$$\pi^m\pi^n u = \pi^{m+n}u,$$

ce n'est pas seulement « $\pi^m\pi^n u$ » comme expression de la répétition de l'opération « π » qui se trouve défini, mais aussi, et fondamentalement peut-être, « m », « n », et « $m+n$ ». Avec cette complication supplémentaire que « m » et « n » ne sauraient être définis que par rapport et en même temps que « $m+n$ ».

On pourrait donc imaginer que c'est l'ensemble de ces questions, soulevées par la prise en charge du problème du statut sémiotique du nombre incarné dans la loi des indices, qui a procuré à Boole la perspective nécessaire pour l'établissement d'une loi des indices d'un type

[263] Cf. par exemple Boole (1845b, p. 215), (1846, p. 215), (1997, pp. 42-43), (1851, p. 141).

nouveau, à l'écart de celle qui semblait s'imposer en Algèbre. En voici la forme, telle que Boole la conçoit comme expression de la spécificité des déterminations proprement logiques :

$$xx = x,$$

ce que Boole réécrit comme :

$$x^2 = x,$$

ou encore, lorsque l'opération est supposée répétée *n* fois :

$$x^n = x$$

Cette loi constitue pour Boole la loi fondamentale de la logique. Elle est censée structurer la pensée logique d'une manière à la fois précise et générale. De la même façon que les deux autres, cette loi ne se verra pas modifiée avec l'évolution de l'œuvre de Boole. Il faut seulement signaler la disparition, dans *The Laws of Thought*, de la formulation générale, « $x^n = x$ », qui figurait dans *The Mathematical Analysis…* et dans d'autres écrits de la même époque, sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir. Sa justification, en revanche, changera, sinon de nature, au moins d'accent, en accord avec les déplacements déjà analysés. Aussi, dans l'opuscule de 1847, cette loi est-elle censée exprimer une propriété des fonctions électives :

> The result of a given act of abstraction performed twice, or any number of times in succession, is the result of the same act performed once.
>
> If from a group of objects we select the Xs, we obtain a class of which all the members are Xs. If we repeat the operation on this class no further change will ensue: in selecting the Xs we take the whole. (Boole, 1847, p. 17)[264]

Et comme si le principe de sélection par abstraction ne suffisait pas entièrement à assurer la légitimité de cette forme, Boole ajoute en note deux arguments formels supplémentaires. Le premier appuyé sur la forme $xy = y$, vraie pour tout y lorsque la classe déterminée par x comprend tout l'univers d'éléments. De cette manière, la loi $xx = x$ en est déduite comme le cas particulier où $y = x$. Le second argument consiste dans l'évocation de l'existence en Algèbre d'au moins un cas de symboles ou opérations soumis à cette loi, à savoir celui de l'itération du signe « $+$ » dans la règle des signes, que Boole écrit : « $+^n = +$ », et qui prend sans doute racine dans l'énoncé des règles définissant la classe circulante ou reproductive établie par Gregory, où on peut lire, entre autres : « $FF(a) = F(a)$ » (Gregory, 1838/1865, p. 3).

---

[264] [Le résultat d'un acte d'abstraction donné, accompli deux ou plusieurs fois de suite, est équivalent au même acte accompli une seule fois.

Si, à partir d'un groupe d'objets, nous choisissons les X, nous obtenons une classe dont tous les individus sont les X. Si nous répétons la même opération sur cette classe, aucune chose nouvelle n'apparaîtra. En choisissant les X, nous considérons la totalité. (1962, p. 17)] Nous corrigeons sur plusieurs points la citation.

C’est précisément sur une version du premier de ces deux arguments supplémentaires que Boole s’appuiera dans *The Laws of Thought* pour introduire la loi logique des indices, à savoir la déduction de $xx = x$ à partir de $xy = x$. La justification première en est pourtant modifiée : en accord avec l’évolution de la pensée de Boole telle que nous l’avons restituée, « $xy = y$ » n’exprime plus directement une propriété des fonctions électives, *mais des signes du langage* lorsque *x* et *y* sont des synonymes :

> As the combination of two literal symbols in the form xy expresses the whole of that class of objects to which the names or qualities represented by x and y are together applicable, it follows that if the two symbols have exactly the same signification, their combination expresses no more than either of the symbols taken alone would do. (Boole, 1854, p. 31)[265]

La justification en termes d’opérations de sélection n’est pas à proprement parler contredite. Elle n’est d’ailleurs pas absente dans cet ouvrage, mais elle est comme relayée dans sa place intermédiaire par un jeu de détermination réciproque entre signes et classes : c’est parce que deux termes ont la même signification qu’ils correspondent à la même classe ; c’est parce qu’ils correspondent à la même classe que deux termes ont la même signification.

Depuis ce point de vue, la loi des indices $xx = x$ apparaît comme un cas particulier de correspondance réciproque entre nombre et écriture. De ce fait, la notation des indices par des entiers abandonne toute apparence de naturalité : si l’on est autorisé à écrire « $x^2 = x$ » à l’instar de l’usage en Algèbre, sans qu’il n’y ait aucune raison intrinsèque aux signes *logiques* « x » et « y », c’est parce que cette notation n’est pas moins conventionnelle ou arbitraire en mathématiques qu’en logique :

> …in common Algebra the combination xx is more briefly represented by x^2. Let us adopt the same principle of notation here; for the mode of expressing a particular succession of mental operations is a thing in itself quite as arbitrary as the mode of expressing a single idea or operation. (Boole, 1854, p. 31)[266]

Les signes numériques seront dès lors la marque ou de la structure spécifique de correspondance instaurée par la loi qui les fonde. Non pas de toute structure de correspondance, pourtant. Aucun signe numérique n’est rendu nécessaire au niveau de $xy = x$. Les signes numériques ne surgissent que dans le cas spécifique où $y = x$, et qu’une

---

[265] [Puisque la composition de deux symboles littéraux sous la forme xy exprime la totalité de la classe des objets auxquels les noms ou qualités représentés par x et y peuvent s’appliquer ensemble, il en découle que si les deux symboles ont exactement la même signification, leur composition n’exprime rien de plus que ce que l’un ou l’autre exprimait séparément. (1992, p. 49)]

[266] [Or dans l’algèbre ordinaire, la combinaison xx est représentée plus brièvement par x^2. Adoptons ici le même principe de notation ; car la manière dont on exprime une succession particulière d’opérations mentales est une chose en elle-même tout aussi arbitraire que la manière d’exprimer une seule idée ou opération (1992, p. 49)]

répétition d'un type particulier se met dès lors en place, à savoir « xx ». Cette répétition n'est cependant pas triviale ou quelconque. Boole la présente notamment comme le *cas limite de la synonymie* exprimée par $xy = x$:

> …although the symbols x and y […] received significations distinct from each other, nothing prevents us from attributing to them precisely the same signification. It is evident that the more nearly their actual significations approach to each other, the more nearly does the class of things denoted by the combination xy approach to identity with the class denoted by x, as well as with that denoted by y. The case supposed in the demonstration of the equation (2) [$x^2 = x$] is that of *absolute* identity of meaning. (Boole, 1854, p. 32)[267]

Ainsi, *identité de signification, répétition et nombre s'avèrent nouer une solidarité complexe à l'ombre de la loi des indices*. Ce nouage s'établit dès que le statut sémiotique du nombre est assumé comme tel, et suggère que les déterminations du nombre en tant que signe ne sont peut-être pas étrangères à son essence, ni à celle de l'Arithmétique. Les raisons en restent pourtant opaques à ce niveau, et le resteront peut-être pour Boole lui-même. Ce qui importe pour le moment, c'est que la théorie de la signification et la logique formelles rencontrent par ce biais, dans les nervures mêmes de sa propre architecture, le nombre et l'Arithmétique, alors que c'était en les excluant que s'était constitué le régime sémiotique dont elles ont émergé. C'est donc dans la perspective d'une théorie de la signification et d'une logique formelles que le nouage entre identité, répétition et nombre comme principe sémiotique de l'Arithmétique mérite ici d'être interrogé.

De ce point de vue, nous voyons que l'établissement de la loi logique des indices comporte des effets immédiats sur les principes déterminant une théorie du sens du langage naturel. Ainsi, Boole évoque le cas de répétition d'un adjectif, par exemple l'adjectif « blanc », pour montrer l'insignifiance de la répétition linguistique : « fleurs blanches blanches » (*white white flowers*) n'est pour lui qu'un pléonasme encombrant et inutile pour dire « fleurs blanches », qui signifie exactement la même chose[268]. Et sans doute Boole prévoit-il l'objection qui rappellerait la fonction d'emphase éventuellement exercée par de telles répétitions. Mais cette fonction n'est pour lui que purement secondaire et

---

[267] [même si les symboles x et y, dans les exemples que nous avons précédemment proposés, ont reçu des significations différentes, rien ne nous empêche de leur assigner exactement la même. Il est évident que plus leurs significations effectives sont proches, plus la classe des choses désignée par la combinaison xy est près de s'identifier à la classe désignée par x aussi bien que celle désignée par y. Dans la déduction de l'équation (2) [$x^2 = x$], on suppose le cas d'une identité *absolue* de signification. (1992, p. 49)]

[268] Dans *The Laws of Thought* Boole donne l'exemple analogue « *good good men* » (1854, p. 32). Celui des fleurs blanches, plus adéquat à la traduction française, est utilisé dans des manuscrits immédiatement postérieurs à *The Laws of Thought*, où le même argument est repris en donnant cependant un rôle privilégié à l'opération de sélection. Dans cette occasion, la loi en question est dite « exemplifiée dans le langage » (1856, p. 79).

conventionnelle et ne touche pas à l'essence du rapport du langage à la pensée (Boole, 1854, p. 32).

Pourtant, même en supposant que Boole ait raison quant à cette fonction d'emphase, il n'est pas difficile d'imaginer une multiplicité indéfinie de cas de répétition linguistique dont la puissance signifiante se manifeste par d'autres effets. Il suffit d'évoquer le vers célèbre de Gertrude Stein :

Rose is a rose is a rose is a rose.

pour s'apercevoir que la puissance signifiante de la répétition dans le langage est loin de s'épuiser dans le simple renforcement emphatique. D'autant plus que Stein elle-même affirme : « Je pense que dans cette ligne-là, la rose est rouge pour la première fois dans la poésie anglaise depuis une centaine d'années »[269]. Certes, on pourrait étendre à l'ensemble ouvert de ces cas de répétition significative l'argument booléen (et logiciste en général) selon lequel dans aucune de ces situations les significations véhiculées ou produites par le langage n'ont un rapport avec le raisonnement strict, le discours exact, ou la pensée déductive. Mais cela ne ferait que trahir encore plus l'opération de forçage que le dispositif formel constitué par les lois symboliques exerce ainsi sur les ressources signifiantes d'un langage – ne serait-ce qu'en raison de l'impossibilité essentielle de dresser de manière définitive la liste exhaustive des fonctions signifiantes de la répétition dans le langage. Nous voyons donc que par ce moyen le critère de la pensée stricte et déductive qui semble déterminer l'insignifiance de la répétition linguistique n'est pas en train d'être appliqué mais *décidé et défini en fonction de cette insignifiance même.*

On pourrait encore arguer de la légitimité d'un tel forçage en invoquant le sens de la répétition des opérations électives qui justifiait la loi des indices lors de sa première introduction, et qu'après tout Boole n'abandonnera jamais complètement. Ce serait alors en tant qu'expression d'opérations de sélection que la signification linguistique serait amenée à obéir à la loi des indices. Mais cette justification en termes d'opérations électives n'en

[269] Gertrude Stein (1947, p. vi). À cet égard, nous aurions voulu prendre comme exemple particulièrement significatif une observation faite par un mathématicien chilien, dont le sens est malheureusement difficile à transmettre par écrit. Selon ledit mathématicien, dans la pratique spécifiquement chilienne de la langue espagnole, on peut construire une phrase ne consistant que de la quadruple répétition d'un mot, dont le sens reste cependant parfaitement déterminé pour les sujets pratiquant cet idiome. La phrase en question est :

Huevón huevón huevón huevón !

Ou plus fidèlement,

weón weón weón weón !

« *weón* » étant la translitération approximative de la prononciation courante [weɔ̃] du mot « huevón » (qu'on traudirait littéralement en français par « couillon »). Les différents sens de ce mot sont actualisés dans cette phrase au moyen d'une variation d'intonation, pour donner la signification suivante :

Eh toi ! (= *weón*), ce type-là (= *weón*) est un couillon (= *weón*), quoi ! (= *weón !*).

suppose pas moins un forçage. Non pas sur le langage cette fois-ci, mais sur la nature des opérations et plus profondément, sur les êtres du monde susceptibles d'être l'objet d'un traitement logique. Il n'y a pas besoin dans ce cas non plus d'élaborer des contrexemples farfelus pour le montrer. Il suffit de reprendre les fleurs de Boole ou les roses de Stein, et sélectionner parmi elles celles qui ne sont pas fanées. On voit très bien que la répétition de cette opération à des moments différents ne déterminera pas la même extension pour les classes résultantes, rendant ainsi la loi des indices fausse. Et sans doute dira-t-on que le temps n'est pas une propriété pertinente, soit des opérations logiques, soit de leurs objets. Mais ce ne sera pas là encore qu'une nouvelle manière de décider ce qu'il faut comprendre par opération et par objet logiques.

Ces deux forçages, celui du langage, et celui des opérations/objets, ne sont certainement pas les mêmes. Dans la justification en termes d'opérations, le forçage agit sur la répétition de l'opération elle-même, c'est-à-dire de la répétition d'un acte, même mental, de sélection, de tri ou de choix, qui se voit d'ailleurs doublée de la répétition des apparitions successives des objets sur lesquels portent les actes consécutifs de sélection, et déterminent l'identité d'une collection ou classe. Dans l'autre cas, le forçage à lieu en revanche au niveau de la répétition pure du langage, comme cas limite de la répétition synonymique. Toutefois, les deux forçages se trouvent à tel point liés qu'il serait difficile que l'un ait lieu sans l'autre. Cette liaison s'explique par la complémentarité entre opérations et classes telles qu'elles sont définies dans le cadre de l'Abstraction symbolique. Ce qui veut dire que son effectuation est le résultat des lois symboliques qui définissent à la fois le fonctionnement de ces opérations et la structure de ces classes. De ce point de vue, le propre des lois symboliques (en tant que lois à la fois mathématiques et logiques) est de rapporter l'un à l'autre ces deux forçages, de façon à ce qu'une correspondance puisse être établie entre eux malgré leur hétérogénéité. C'est dire que les lois symboliques n'expriment pas l'essence des actes de pensée, pas plus que l'essence du langage. Ou plutôt, elles n'expriment l'essence de la pensée et du langage que dans la mesure où elle se joue dans la possibilité de leur réduction à la fois respective et réciproque (de l'un à l'autre et de l'autre à l'un), au moyen d'un principe de correspondance réglée. Sorte de schématisme à la fois libre et contraint, ces lois réalisent de façon simultanée et corrélative la possibilité d'injecter dans le langage naturel une structure formelle sur laquelle ses significations pourront être projetées, ainsi que la possibilité de fournir une régulation générale des opérations de l'esprit et des objets qui leur correspondent.

C'est notamment le cas de la loi $x^2 = x$, à laquelle Boole ne donne pas fortuitement la place de loi fondamentale parmi les lois de la pensée. Car si les forçages agissent tant sur la pensée et ses objets que sur le langage, ils ne le font qu'au moyen de la régulation de la *répétition* dans chacun de ces deux domaines, dont la loi des indices détient l'effectivité et le secret. Si bien qu'à la surface logique qui se constitue en bordure de l'espace de l'Abstraction symbolique, ces deux forçages se trouvent corrélés l'un à l'autre par l'action de cette loi, dont les mécanismes internes sont loin d'être triviaux. Dès l'instant où son effectivité est invoquée dans l'espace de la formalisation du sens, la loi des indices, mais avec elle aussi le reste des lois avec lesquelles elle fait système, entraîne une détermination *double*. Une telle dualité était absente des lois commutative et distributive, qui semblaient ainsi bénéficier d'une homogénéité naturelle. La loi des indices, en revanche, devra payer d'un clivage interne l'ajustement problématique des deux faces de la détermination qu'elle a pour tâche d'assurer dans le cadre d'un système logique, la détermination du langage d'un côté et de la pensée et des pensables de l'autre.

III.1.2. Les signes numériques

La particularité de la loi logique des indices induit donc une dualité dans l'espace de son effectivité : $x^2 = x$ détermine à la fois la sélection des objets, et la structuration conceptuelle du langage. Cette dualité, que la loi est censée, sinon réduire, du moins régler, viendra pourtant dessiner comme une fêlure au niveau du système déterminé par l'ensemble des lois symboliques, fêlure à travers laquelle se trahira la nature problématique de l'Arithmétique en tant que système de signes.

Le sens et les conséquences de cette faille sont décisifs pour l'histoire du devenir logique des mathématiques, ainsi que pour les effets de ce devenir sur la philosophie. Cependant, les formulations de Boole sur ce point n'ont suscité chez les historiens et philosophes de la logique que des jugements réprobateurs, mettant l'accent sur les inconsistances de son système, et témoignant de leur part d'une attitude plus normative que critique. Le grand effort d'interprétation formel de Theodor Hailperin[270] fait ici sans doute exception. De même, nous devons mentionner le travail de Maria Panteki autour des manuscrits de Boole[271], qui attire l'attention – pour la première fois, comme le remarquent les éditeurs des manuscrits (Boole, 1997, p. 209) – sur les textes portant sur cette question. Il nous semble pourtant que la rigoureuse profondeur technique de l'un et la féconde compétence documentaire de l'autre, tout en étant précieuses pour nos recherches, n'ont pas épuisé la question des implications philosophiques attachées à ce point.

[270] Voir fondamentalement Hailperin (1981) et (1986).

[271] Voir Panteki (1991), spécialement le chapitre 8.

Pour essayer de comprendre ce qui s'y joue, il nous faut revenir aux toutes premières définitions dans *The Mathematical Analysis…* On pourra dès lors remarquer que, dans la détermination des symboles par des lois purement algébriques, ce qui se trouve fondamentalement défini, c'est la *multiplication* en tant qu'opération logique. C'est elle en effet qui incarne l'opération logique fondamentale de sélection, et c'est dans la mesure où les symboles lui sont soumis, qu'ils deviennent des symboles électifs, et donc de véritables termes logiques. Mais qu'en est-il de l'*addition* ? A bien y regarder, le statut logique de l'addition ne s'y trouve guère défini. Son sens est introduit de façon purement informelle à l'occasion de la définition de la loi distributive qui l'exige et sans laquelle la puissance calculatoire du système booléen, voire son caractère de calcul tout court, serait profondément compromise. Voici la formulation de Boole :

> 1st. The result of an act of election is independent of the grouping or classification of the subject.
>
> Thus it is indifferent whether from a group of objects considered as a whole, we select the class X, or whether we divide the group into two parts, select the Xs from them separately, and then connect the results in one aggregate conception. We may express this law mathematically by the equation
>
> $$x(u+v) = xu + xv$$
>
> $u+v$ representing the undivided subject, and u and v the component parts of it. (Boole, 1847, pp. 16-17)[272]

On voit donc que la distributivité ne détermine que le sens de la multiplication comme opération logique de sélection. Et cela en fonction d'une circonstance exprimée par l'addition, mais dont le sens est donné en totale indépendance des déterminations symboliques. L'addition représente la composition des parties des sujets sur lesquels portent les opérations de sélection. Autrement dit, elle ne constitue pas une opération logique, mais exprime *une propriété des objets*, à savoir le fait d'être composés de parties. Que ce soit sous cette forme extra-logique que Boole envisage l'addition dans son premier opuscule, cela est entièrement confirmé par le fait qu'aucune loi symbolique ne lui est strictement dédiée. De même, si la soustraction, introduite tardivement et uniquement sous la forme $1-x$, exprime bien quant à

---

[272] [1° Le résultat d'un choix est indépendant du groupement ou de la classification auquel appartient le sujet. Par exemple, si à partir d'un groupe d'objets considéré comme un ensemble, nous choisissons la classe X, ou bien si nous divisons le même groupe en plusieurs sous-groupes au sein desquels nous choisissons encore les objets appartement à la même classe X, et que finalement nous réunissions les objets résultants, nous accomplissons dans les deux cas une opération théoriquement identique. Nous pouvons exprimer cette loi mathématique par l'équation

$$x(u+v) = xu + xv$$

$u+v$ représentant l'ensemble et u et v les sous-groupes composants. (1962, p. 17)]. Nous corrigeons.

elle l'opération logique de négation, elle n'est nullement définie comme l'opération inverse de l'addition, bien que Boole ne puisse s'empêcher de la traiter comme telle au fur et à mesure que son traité avance[273]. Si bien que dans sa première version, le système booléen recèle, sous l'apparente unité de ses opérations formelles, une dualité dans la nature même de ses signes, animant par là même une dualité dans la nature de ses opérations : la multiplication comme expression à la fois des opérations et des classes, soumise à des lois symboliques définissant des termes logiques ; l'addition comme représentation d'une structure ontologique donnée, et dont le statut sémiotique ne saurait être symbolique.

On peut voir que cette dualité est tributaire de la configuration conceptuelle particulière propre à l'Abstraction symbolique. En effet, c'est par l'opposition fondamentale entre objets concrets occupant la place du contenu et termes abstraits incarnant l'action de la forme que la disparité entre addition et multiplication se laisse d'abord capturer. Si cette disparité s'épuisait dans sa caractérisation simplement conceptuelle, elle n'aurait de conséquences que pour la philosophie ou la métaphysique que l'on pourrait construire après-coup à partir du système booléen. Pourtant, une telle différence dans l'établissement de ses opérations fondamentales comportera des effets décisifs pour la constitution du système dans son ensemble. Notamment, *l'itération de l'addition ne saurait être réduite symboliquement*. Comment pourrait-elle l'être si, telle qu'elle est présentée dans *The Mathematical Analysis…*, elle ne symbolise pas une opération de l'esprit, mais représente une propriété des objets ? En tant que composition des parties d'un objet, la réitération de l'addition représente le rassemblement d'autant de parties distinctes qui, même dans le cas d'une identité parfaite de leur « noms » ($a + a + a$), ne sauraient se confondre les unes avec les autres sans porter définitivement atteinte, sinon aux notions intuitives d'objet et de partie, du moins à la notion même de classe telle que Boole l'envisage.

On devinera les conséquences critiques d'une telle situation pour le problème qui est ici le nôtre : dans l'impossibilité d'établir pour l'addition une loi des indices analogue à celle de la multiplication, *on ne pourra pas empêcher les signes numériques de s'engendrer à nouveau à l'intérieur du système symbolique*. Ce qui arrive de fait à plusieurs reprises dans l'opuscule de Boole, par exemple dans le chapitre sur les propositions hypothétiques, où la somme de trois expressions électives :

$$x(1-y)(1-z),$$
$$y(1-z)(1-x),$$
$$z(1-x)(1-y),$$

[273] Voir par exemple Boole (1847, pp. 43-47).

conduit à l'expression suivante (p. 54) :

$$x + y + z - 2(xy + yz + zx) + 3xyz$$

Une fois de plus dans l'histoire de l'émergence de l'Algèbre abstraite et de son devenir logique, les signes numériques qui indiquaient son point précis d'impossibilité se reconstituent et reposent le problème de leur interprétation, et avec lui, celui de la consistance du système tout entier. Et cela alors même que Boole semblait avoir résolu le problème des signes numériques en situation d'indices. Car par le fait d'accorder, au moins implicitement, un statut sémiotique au nombre, il parvenait à empêcher son surgissement au moyen des règles mêmes qui régissent l'espace des signes mathématiques. En effet, grâce à la compréhension de la nécessité des nombres en position d'indices comme une pure exigence de notation, Boole ouvrait la possibilité de réduire cette nécessité par l'établissement des règles opératoires ; autrement dit, il donnait à l'Algèbre abstraite, avec l'établissement de ses lois symboliques, la clé pour maîtriser l'Arithmétique. Ainsi, au moyen de la prescription $x^2 = x$, l'engendrement des signes numériques est symboliquement bridé : aucun chiffre autre que « 2 » n'a droit de cité dans ce système, puisque la première répétition ou répétition simple (*first or mere repetition*), comme l'appelle Boole parfois, est immédiatement rabattue sur l'identité. Or, en raison de la dualité ou du clivage que la loi des indices recèle, les signes numériques resurgissent renouvelés et inattendus au sein des expressions du système, là où nul instrument n'a été prévu pour les interpréter ou les proscrire. Car, effectivement, qu'est-ce que des expressions comme « $2(xy + yz + zx)$ » ou « $3xyz$ » peuvent bien vouloir dire dans le cadre du système booléen ? Et de quel droit les signes « 2 » et « 3 » sont-ils susceptibles de se combiner suivant des opérations dans un contexte où celles-ci ne sont pas censées être arithmétiques ?

C'est précisément la question que le mathématicien Arthur Cayley adressa à Boole dans une correspondance que les deux algébristes tinrent à la suite de la réception par le premier de *The Mathematical Analysis…*, que Boole lui avait envoyé dès sa parution. Après une remarque concernant la généralité de la division dans le système de Boole, Cayley ajoute une deuxième objection :

> There seems to me a *prima facie* objection not to the principles so much as to the developability of the system: Your symbols are not combinable with numerical quantities or at any rate such combinations are uninterpretable. Has $\frac{1}{2}x$ any meaning, and if so, how does it come to be so. (Cayley à Boole, 2 décembre 1847, dans Boole, 1997, p. 191)

Le choix du coefficient $\frac{1}{2}$ pour la formulation de cette question est intéressant. Il s'explique sans doute par le fait que Cayley pense au recours par Boole au théorème de Maclaurin au moment d'établir sa célèbre expansion $f(x) = ax + b(1-x)$[274]. En effet, pour obtenir cette expansion, Boole doit passer par le fameux théorème, qu'il écrit de la manière suivante (1847, p. 60) :

$$\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + \frac{\phi''(0)}{1 \cdot 2}x^2 + \&c.,$$

où $\frac{1}{2}$ apparaît en coefficient du terme x^2, censé être un terme logique. Cela montre aussi à quel point l'addition comme source de l'engendrement des signes numériques dans le système de Boole était plus un effet secondaire qu'un principe évident, car ici les signes numériques ne sont pas directement l'effet de l'opération d'addition. Mais on aurait tort de croire que c'est un autre problème qui est ainsi soulevé par Cayley. Bien au contraire, on verra à quel point la question de la place des signes numériques est liée à la méthode de développement de Boole. Qui plus est, l'objection de Cayley arrive ainsi à soulever le problème des signes numériques dans toute sa complexité, c'est-à-dire, non seulement en posant la question de leur simple présence, mais aussi de leur soumission à des opérations symboliques de même nature que les termes logiques. Car le signe « $\frac{1}{2}$ » se laisse comprendre comme le résultat de l'application sur le signe « 2 » de l'opération inverse à la multiplication. Ce sera d'ailleurs l'explication que donnera Boole plus tard.

Pour l'instant, Boole se limite à répondre à Cayley en essayant de minimiser le problème. On peut identifier dans la position de Boole dans cet échange deux arguments fondamentaux. Le premier consiste à rendre ces coefficients numériques entièrement dépendants des termes logiques qu'ils affectent. Ainsi, après avoir reproché à Cayley d'avoir oublié que x n'est pas une quantité, mais la représentation d'une opération mentale, il affirme : « L'équation $\frac{x}{2} = 0$ est la même que $x = 0$ […] et indique la proposition [qui']il n'y a pas de Xs. »[275]. Autrement dit, les signes numériques sont des simples annexes des termes logiques, qui n'ajoutent rien aux propriétés essentielles qui les définissent.

Le second argument, qui développe le premier, consiste à dire que la nature des signes numériques est analogue à celle du symbole $\sqrt{-1}$ ou *i* en arithmétique : « Demander comment se fait-il que $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$ dans mon système est la même chose que demander comment $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ dans un système de pure quantité, car bien que l'on puisse interpréter $\sqrt{-1}$ en

[274] Voir *supra*, p. 232.

[275] Lettre de Boole à Cayley, 6 décembre 1847, dans Boole (1997, p. 192).

géométrie, on ne peut pas [le faire] en arithmétique » (p. 192). Interprétable en Géométrie comme expression d'une *direction*, le nombre imaginaire n'a aucune interprétation possible en tant que *quantité*. Il est pourtant accepté en Arithmétique pure, non pas à cause de son interprétation géométrique, mais de sa soumission à la loi $i^2 = -1$, qui permet de résoudre sans ambiguïté toutes les situations nécessaires à l'Arithmétique sans laisser des traces sur les résultats finaux.

Ces deux arguments ne sont au bout des comptes que deux figures d'un argument plus général, à savoir : « ça marche ». Autrement dit, bien que le système engendre en son sein tout un ensemble d'éléments auxquels il ne peut pas donner de signification déterminée de l'intérieur, il est légitime d'accepter cette excroissance pourvu qu'elle contribue au fonctionnement du système et ne nuise pas aux significations accessibles. Boole le dit ouvertement dans l'une de ses lettres, en réponse à l'insistance de Cayley sur ce sujet :

> As to $\frac{x}{2}$ it is quite sufficient to say that its interpretation is not required. *It never occurs except in an equation* and *all equations* are interpretable in logic. I wish you would just consider this question. Can anything more be required than the *expression of any proposition the interpretation of any equation and the derivation of any results that exist?* (Boole à Cayley, 8 décembre 1847, dans Boole, 1997, p. 193)

Or, même dans le cas d'un argument aussi souple en apparence que celui qui fait appel à l'effectivité du système (« ça marche »), cette compréhension de la place de l'Arithmétique à l'intérieur d'un système sémiotique et logique comporte des enjeux formels et théoriques non négligeables, auxquels le système de Boole dans sa version initiale n'est pas nécessairement en mesure de répondre. Car, concernant le premier point, au nom de quoi peut-on dire que $\frac{x}{2} = 0$ implique $x = 0$? Cette implication est vraie lorsque *x* renvoie à un nombre, à cause de la multiplication[276]. Mais cette opération de multiplication *arithmétique* ne coïncide pas forcément avec l'opération de multiplication *logique* telle qu'elle est définie par les lois fondamentales du système. En effet, en Arithmétique on a par exemple : $3 + 3 + 3 = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9$, ce qui contredit la loi des indices $x^2 = x$ qui définit la multiplication logique. Dans l'enchaînement de ces égalités, la continuité se trouve quelque part brisée, *précisément là où l'addition s'articule avec la multiplication*. C'est dire que les termes *x* et 2 n'étant pas de même nature dans l'expression « $\frac{x}{2} = 0$ », ils ne sauraient être soumis à la même loi de multiplication, qui semblerait pourtant nécessaire pour réduire cette expression à $x = 0$. Si bien que, si Boole veut éviter l'ambiguïté, voire la contradiction, au niveau de l'opération de

[276] En effet, $\frac{x}{2} = 0$ implique $\frac{x}{2} \cdot 2 = 0 \cdot 2$, d'où $\frac{x}{2} = x = 0$.

multiplication, force lui sera bien de trouver des moyens de réduction de l'excroissance numérique qui ne fassent pas appel aux propriétés arithmétiques de la multiplication.

D'autre part, si les signes numériques sont à associer aux symboles « $\sqrt{-1}$ » ou « i », de telle sorte que $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$ soit parfaitement analogue à $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$, ce qu'il faudra trouver alors, c'est la nature symbolique des signes numériques produits par l'addition. Car l'effectivité invoquée de $\sqrt{-1}$ en Arithmétique tient entièrement, comme le remarque Boole, à sa soumission à la loi $i^2 = -1$, autrement dit, à sa nature strictement symbolique. C'est d'ailleurs le problème posé par ces symboles mêmes qui a constitué l'occasion privilégiée permettant aux algébristes de Cambridge d'élaborer leur notion de « symbolique ». Mais comme nous l'avons vu, l'opération d'addition qui est la responsable ultime de l'engendrement des signes numériques dans le système n'était pas présentée dans *The Mathematical Analysis…* comme une opération logique définie par des lois symboliques. Nulle part on n'y trouve des expressions comme « $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$ », et encore moins qui fonctionneraient comme des *définitions*. De ce fait, les nombres qui en découlent se laissent difficilement comprendre comme des *symboles* ; ils apparaissent plutôt comme des *marques* d'une certaine propriété des objets, dont l'addition semble être l'expression simple. D'où peut-être le rapport simplement illustratif et analogique que Boole invoque par rapport au symbole imaginaire[277]. Quoi qu'il en soit, une réflexion autour de la nature symbolique de l'opération d'addition et des signes numériques qu'elle produit semble s'imposer.

Ces questions, dont quelques-unes commençaient déjà à trouver une réponse dans le premier opuscule de Boole, occuperont une certaine place dans les réflexions qui mèneront à *The Laws of Thought*, et elles prendront une part importante dans le remaniement de la configuration conceptuelle de l'Abstraction symbolique que cet ouvrage accomplit. Mais plus profondément, ces exigences, issues des difficultés que la présence quelque peu dérangeante des signes numériques occasionne dans le système symbolique, dessineront le noyau problématique, à la fois urticant et fécond, de l'articulation complexe entre mathématiques, sémiotique et logique qui se noue avec de Boole et qui, parvenant jusqu'à Frege, s'étend peut-être jusqu'à nous. Et cela parce que la réduction de l'Arithmétique réclame, suivant les conditions particulières que nous venons d'analyser, qu'on la détermine en même temps selon deux directions incompatibles (incompatibles du moins à l'intérieur du régime de l'Abstraction symbolique) : d'une part, les nombres, tout comme les opérations qui les

[277] Lettre de Boole à Cayley, 10 décembre 1847 (dans Boole, 1997, p. 195) : « I contend for analogy in the nature of the things themselves and I only give this as an illustration which does not at all affect the truth of my system. »

engendrent et les régulent, doivent être investis d'une nature symbolique ; de l'autre, ils doivent être réduits entièrement pour que leur existence ne laisse aucune trace sur l'ensemble des significations produites par le système. Autrement dit, il s'agit de cristalliser dans l'intimité du système *une dimension à la fois sémiotique* (c'est-à-dire, de l'ordre des signes) *et non signifiante* (parce qu'elle ne s'accorde pas avec les principes symboliques qui définissent la forme de la signification dans ce contexte).

Le premier pas fait par Boole pour répondre à l'exigence de « symbolisation » de l'addition peut être trouvé dans l'un de ses manuscrits datant de 1848, peu après la publication de son opuscule et l'échange avec Cayley. Dans ce manuscrit, l'opération d'agrégation des parties n'est plus rapportée aux objets en tant que tels ; elle est présentée comme une opération de l'esprit :

> From the conceptions of two distinct classes of things it is able to form the conception of another class as a whole of which those two are parts and it has the power of expressing this aggregation of parts into a whole in Language. Thus from the two distinct conceptions of the class *oxen* and the class *horses* we can form a conception of the aggregate class *oxen and horses* and we can reason upon this aggregate class just as we can reason upon the distinct classes of which it is formed. (Boole, 1848b, p. 3)

On voit que le rôle joué par le langage dans cette opération d'agrégation est décisif, au point où l'on pourrait dire que celle-ci exprime une loi du langage en même temps que de l'esprit. Cette correspondance immédiate entre lois de la pensée et lois des signes ou du langage, qui sera, comme nous l'avons déjà vu, l'une des évolutions conceptuelles fondamentales de *The Laws of Thought* par rapport à *The Mathematical Analysis…*, permettra d'arracher le rapport tout-parties aux objets et de l'inscrire dans un milieu strictement symbolique, puisque c'est aux lois des symboles que les lois de la pensée se laisseront réduire. Cependant, cela a un prix. Si la compréhension ordinaire des objets assurait la disjonction des parties se combinant dans un tout, cela n'est plus vrai dans le cas du langage, et cette disjonction doit être ajoutée comme condition expresse, comme Boole le fait au début du passage que nous venons de citer. La question de la disjonction exclusive (au lieu d'inclusive) sera ainsi, dans le système de Boole, intimement liée à ce problème du statut symbolique de l'opération d'addition.

Conçue comme loi du langage, l'opération d'addition devient susceptible de recevoir une définition symbolique, c'est-à-dire, d'être soumise à une loi combinatoire déterminant son sens. C'est d'ailleurs ce que Boole fait aussitôt dans ces pages manuscrites de 1848 :

> In forming the conception of this aggregate class [oxen *and* horses] it is indifferent whether we add the conception of the class oxen to that of the class horses or whether we add the conception of the class horses to that of the class oxen. The resulting whole is independent of

> the order of the component parts. This is a Law of Thought and it is the basis of a corresponding law of Language. Thus as a particular illustration of that law it is indifferent whether we say "horses and oxen" or "oxen and horses". And for the general expression of that law it is obvious that when words relating to different classes of things are connected by the copulative conjunction it is indifferent in what order they are placed. (Boole, 1848b, p. 6)

C'est ainsi que, en remarquant que le signe « $+$ » était originalement la contraction du latin « *et* », Boole énonce la loi symbolique de commutativité pour l'addition :

$$x + y = y + x.$$

Tout dans ce travail de Boole témoigne de sa volonté d'attribuer un statut symbolique à l'addition : la réunion des parties dans un tout comme formation d'une conception ou d'un concept, la soumission de cette formation à des règles du langage, l'association du signe « $+$ » à un terme linguistique (« et »), et enfin l'établissement d'une loi symbolique. Boole témoigne directement de cette préoccupation dans les notes d'un cahier datant de la même époque, où, après avoir rappelé les trois lois symboliques établies dans *The Mathematical Analysis…*, il ajoute : « Aux lois ci-dessus il paraîtrait que nous devons ajouter la loi dont l'expression est $x + y = y + x$ » (Boole, 1997, p. 43).

Le statut symbolique nouvellement gagné par l'addition permet dès lors de l'intégrer naturellement à l'ensemble du système. Aussi, après avoir énoncé la loi commutative pour l'addition dans le manuscrit de 1848, Boole énonce-t-il aussitôt la commutativité de la multiplication, et présente la distributivité de celle-ci par rapport à celle-là comme une loi mettant en rapport deux lois symboliques. Aussitôt, la soustraction sur deux termes quelconques est introduite dans le contexte de la distributivité de manière symétrique à l'addition (1848b, pp. 6-7).

L'ensemble de ces reformulations, qui contrastent avec les intuitions originalement cristallisées dans *The Mathematical Analysis…*, sera entièrement repris lors de l'introduction des signes et des lois dans le chapitre II de *The Laws of Thought*. En effet, dans son ouvrage de 1854, Boole présentera d'abord la commutativité de la multiplication, ensuite celle de l'addition, en fonction de quoi il pourra enfin introduire la distributivité comme une façon de mettre en rapport ces deux lois. Des enrichissements sont pourtant apportés concernant la soustraction, qui est maintenant présentée ouvertement comme l'opération « opposée » ou « négative » par rapport à l'addition, ce que Boole justifie en affirmant que « nous ne saurions concevoir de réunir des parties en un tout, sans concevoir également la possibilité de séparer une partie d'un tout » (p. 33). Dès lors, la soustraction en tant que loi logique reçoit deux déterminations supplémentaires. D'une part, la condition symétrique à la disjonction des termes pour l'addition est établie : la soustraction n'est possible que si « les choses exclues forment une partie des choses dont elles sont exclues » (p. 33) ; d'autre part, sa soumission à une loi commutative exprimée de la manière suivante :

$$x - y = -y + x.$$

La distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction est dès lors déterminée sur ces bases[278].

Le procès d'incorporation de l'addition au régime symbolique semble ainsi achevé. Mais au bout de toutes ces opérations de symbolisation, on ne peut qu'être étonné par une absence : malgré son nouveau statut sémiotique, *aucune loi des indices n'est explicitement établie pour l'addition.* En effet, si la validité de l'expression « $x + x = 2x$ » était originalement l'effet de l'association de l'addition aux propriétés des objets (ou des significations « objectales »), sa reconstruction comme loi symbolique de l'esprit et du langage autorise, et même exige, de définir son comportement itératif de façon en dernière instance libre ou arbitraire. Dès lors, si l'apparition de signes numériques dont l'addition est la source fait problème à l'intérieur de l'ensemble du système, on voit mal pourquoi Boole n'a pas recours, comme pour la multiplication, à une loi des indices du type $x + x = x$ ou $2x = x$ pour empêcher leur engendrement.

Cette absence est surprenante dans la mesure où elle ne constitue aucunement un oubli ou une négligence de la part de Boole. En effet, Boole est profondément conscient de cette double introduction du nombre, tel qu'il ressort des manuscrits rédigés entre ses deux grands ouvrages :

> From this repetition [of an operation] we got
>
> xx or x^2, xxx or x^3, &c
>
> whence we have the idea of number. Or we have
>
> $x + x = 2x$, $x + x + x = 3x$, &c
>
> whence also the idea of number. (Boole, 1997, p. 44)

Ainsi, si par la loi des indices Boole bride comme nous l'avons indiqué l'apparition du nombre au niveau de la multiplication, la genèse du nombre à partir de l'addition est pourtant consciente et délibérée dans son système. Ce qui est d'autant plus surprenant que Boole s'efforcera de trouver aussitôt d'autres moyens pour effacer le nombre ainsi engendré et le destituer de tous les effets éventuels qu'il pourrait avoir sur le système signifiant. Car, malgré le caractère manifestement volontaire de sa présence au milieu de symboles rigoureusement logiques, le domaine numérique ainsi engendré reste profondément insignifiant, et doit tout de même être réduit, voire directement écarté, si l'on veut éviter que cette insignifiance ne se

[278] Sur tout ceci, voir Boole (1854, pp. 29-34).

transmette au reste des termes symboliques (une expression symbolique comportant des signes numériques étant entièrement ininterprétable).

III.1.3. Techniques de réduction

On pourrait identifier deux mécanismes auxquels Boole a recours pour effectuer cette réduction de l'action du nombre sur le système symbolique. Le premier, qui apparaît dans les manuscrits immédiatement postérieurs à *The Mathematical Analysis…*, consiste à faire porter l'action sélective de la loi fondamentale de la logique $x^2 = x$ sur l'ensemble de nombres considéré comme l'Algèbre symbolique l'avait toujours considéré, à savoir comme un domaine d'objets purs. On trouve de cette manière que seuls 0 et 1 sont capables de passer le test, puisque l'on a $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$, et que pour tout autre nombre *n*, on a $n^2 \neq n$. Ou si l'on préfère, dans les termes où Boole l'exprime aussi parfois : « l'équation $x^2 = x$, lorsqu'on la considère comme algébrique, n'admet que les racines 0 et 1 » (1854, p. 37). Dès lors, seuls les nombres 0 et 1 ont droit de cité dans le domaine symbolique de la logique, et « peuvent en réalité être introduits dans le système électif et y admettre une interprétation tout comme dans le système du nombre auquel ils appartiennent également » (1848b, p. 8).

Si cette exclusion des nombres en tant qu'objets par l'action sélective des termes symboliques et de leurs lois ne conjure aucunement à l'évidence l'engendrement des signes numériques à partir de l'itération de l'addition, elle empêche pourtant qu'un nombre puisse occuper la place d'un terme symbolique, c'est-à-dire signifiant. Un terme logique *x* ne pourra dès lors jamais être *interprété* comme un nombre (autre que 0 et 1), ce qui sanctionne la nature profondément non-conceptuelle du nombre (d'après la manière dont la conceptualité est déterminée dans le cadre de l'Abstraction symbolique). Cela assure que les seuls signes numériques à réduire seront ceux engendrés de l'intérieur par le système.

Mais pour la même raison, cela oblige à donner un statut conceptuel aux nombres 0 et 1, qui devra d'ailleurs être lié aux conditions de fonctionnement symbolique du système. Ce sera l'occasion pour Boole de réparer l'arbitraire de l'introduction des signes « 1 » et « 0 » dans *The Mathematical Analysis…* comme symboles des classes « univers » et « rien » (*nothing*) respectivement. Si la façon de le faire n'est toujours pas entièrement claire dans les manuscrits de cette époque, dans *The Laws of Thought* Boole a déjà trouvé la voie :

> The symbol 0, as used in Algebra, satisfies the following formal law,
>
> $$0 \times y = 0, \text{ or } 0y = 0,$$
>
> whatever *number y* may represent. That this formal law may be obeyed in the system of Logic, we must assign to the symbol 0 such an interpretation that the *class* represented by $0y$

> may be identical with the class represented by 0, whatever the class y may be. A little consideration will show that this condition is satisfied if the symbol 0 represent Nothing. (Boole, 1854, p. 47)[279]

Quant au symbole « 1 », Boole avance un argument symétrique :

> The symbol 1 satisfies in the system of Number the following law, viz.,
>
> $$1 \times y = y, \text{ or } 1y = y,$$
>
> whatever number y may represent. And this formal equation being assumed as equally valid in the system of this work, in which 1 and y represent classes, it appears that the symbol 1 must represent such a class that all the individuals which are found in *any* proposed class y are also all the individuals $1y$ that are common to that class y and the class represented by 1. A little consideration will here show that the class represented by 1 must be "the Universe," since this is the only class in which are found *all* the individuals that exist in *any* class. (Boole, 1854, pp. 47-48)[280]

On reconnaîtra à l'œuvre ici les mécanismes les plus emblématiques de la formalisation du sens : à partir d'une régulation sémiotique comme $x^2 = x$ les propriétés formelles d'objets mathématiques comme 0 et 1 sont transmises à la logique, produisant l'investissement d'un statut conceptuel pour ces objets (rien, univers). Mais plus précisément, bien que de manière plus subreptice, c'est l'action de l'Abstraction symbolique qui peut être ici identifiée. Car si 0 et 1 sont capables de traverser le filtre symbolique de la loi $x^2 = x$ pour intégrer la surface des significations logiques, *c'est moins grâce à leurs propriétés arithmétiques qu'à leurs propriétés algébriques*. En effet, ce n'est pas en tant que nombres ou quantités que 0 et 1 peuvent recevoir une signification conceptuelle, mais en tant qu'ils possèdent, au-delà des propriétés attachées à leur caractère quantitatif, des propriétés générales par rapport à l'opération de multiplication : celle pour 0 de toujours renvoyer à lui-même lorsqu'il est multiplié par n'importe quel autre terme, celle pour 1 de toujours renvoyer au même terme par

---

[279] [Le symbole 0, tel qu'il est employé en algèbre, satisfait à la loi formelle suivante :

$$0 \times y = 0, \text{ ou } 0y = 0,$$

quel que soit *le nombre* que représente y. Pour que cette loi formelle soit valide dans le système logique, il nous faut assigner au symbole 0 une interprétation telle que la *classe* représentée par $0y$ puisse être identique à celle représentée par 0, quelle que soit cette classe y. Un bref examen montrera que cette condition est remplie si le symbole 0 représente le Rien. (1992, p. 63)]

[280] [Le symbole 1 satisfait, dans le système numérique, la loi suivante :

$$1 \times y = y, \text{ ou } 1y = y,$$

quel que soit le nombre représenté par y. Et à supposer que cette équation vaille également dans le système exposé dans cet ouvrage, où 1 et y représentent des classes, il apparaît que le symbole 1 doit représenter une classe telle que les individus d'une classe *quelconque* y donnée soient aussi l'ensemble $1y$ des individus communs à la classe y et à la classe représentée par 1. Un bref examen montrera que la classe représentée par 1 doit être « l'Univers », puisque c'est la seule classe où l'on trouve tous les individus qui sont éléments d'une classe *quelconque*. (1992, p. 64)] lequel il serait multiplié. On sait que les développements postérieurs de l'Algèbre cristalliseront ces propriétés strictement algébriques, tout en les détachant des propriétés numériques de 0 et de 1, en parlant respectivement d'élément « absorbant » et élément « neutre » par rapport à une loi de composition interne (la multiplication en l'occurrence). Or, avant même qu'une Théorie des anneaux algébriques puisse venir donner un sens étendu à ces propriétés, la pression de l'Abstraction symbolique sur l'espace de formalisation du sens conduit Boole à les mettre en avant pour écarter d'une manière nouvelle ce qui dans les signes numériques relève effectivement des nombres. Au point que l'argument avancé parallèlement, envisageant 0 et 1 comme les racines de l'équation $x^2 = x$, réclamerait d'être repensé, afin de conjurer ses aspects numériques, pour s'en tenir à la dimension strictement algébrique qui fonde sa validité.

Toujours est-il que par ce moyen, Boole réussit dans un même geste à intérioriser la définition de la classe universelle et de la classe nulle, et à brider toute interprétation de ses termes symboliques comme des nombres. C'est pourquoi l'accusation frégéenne pointant le risque de confusion des signes d'opération dans le système booléen, qui vaudraient tantôt comme arithmétiques, tantôt comme logiques, lorsque l'on remplacerait les lettres par des nombres[281], se révèle infondée. Par la façon dont les concepts sont déterminés dans le système booléen, aucun concept ne saurait y représenter des nombres, hormis 0 et 1, dont le sens quantitatif a été soigneusement écarté au profit de leurs seules propriétés algébriques. Si cette exclusion de l'Arithmétique ordinaire peut paraître une condition ou un effet arbitraire ou vain, voire une régression inacceptable, les mécanismes qui la motivent n'en ouvrent pas moins pour autant une voie suggestive concernant l'Arithmétique elle-même, dans son rapport simultané à l'Algèbre et à la logique. Car en limitant de façon drastique l'inscription des nombres dans la surface symbolique au moyen de la condition $x^2 = x$, Boole aperçoit une forme radicalement nouvelle selon laquelle l'Arithmétique pourrait être présente dans son système logique, à savoir celle d'une *Algèbre à deux éléments* :

> …instead of determining the measure of formal agreement of the symbols of Logic with those of Number generally, it is more immediately suggested to us to compare them with symbols of quantity *admitting only of the values* 0 *and* 1. Let us conceive, then, of an Algebra in which the symbols *x, y, z,* &c. admit indifferently of the values 0 and 1, and of these values alone. The laws, the axioms, and the processes, of such an Algebra will be

[281] Voir *supra* p. 87.

identical in their whole extent with the laws, the axioms, and the processes of an Algebra of Logic. Difference of interpretation will alone divide them. (Boole, 1854, pp. 37-38)[282]

De cette étrange Algèbre, Boole ne dira guère plus dans *The Laws of Thought*[283]. Pourtant le seul principe de réinterprétation quantitative de l'Algèbre symbolique lui permettra de simplifier énormément la méthode de développement des fonctions logiques[284]. En effet, bien que cette méthode de développement ait été déjà présente dans *The Mathematical Analysis…*, la substitution des termes logiques par les valeurs 0 et 1 y était dérivée d'un processus complexe et obscur de substitution provenant de l'Analyse, engageant une théorie des *moduli*, et sans qu'aucune signification particulière ne soit donnée à ces deux valeurs. Dans *The Laws of Thought*, cette réinterprétation quantitative de son système logique, aussi intuitive, rudimentaire et dérivée qu'elle soit, lui permet tout de même de mettre en avant l'équivalence entre l'Algèbre logique et l' « Algèbre duale » (comme l'appellera Boole peu après)[285]. Cette équivalence, plutôt déclarée que démontrée, lui permettra de faire l'économie des chemins analytiques tortueux qui guidaient la méthode de développement des fonctions logiques dans l'opuscule de 1847, et d'arriver de manière plus directe aux éléments constitutifs de cette méthode, assurant les mêmes résultats. C'est ainsi que la seule trace analytique de cette méthode dans l'ouvrage de 1854 sera une remarque en note en bas de page, où ce qui était fondement auparavant est devenu simple analogie, sanctionnant la plus grande généralité de la nouvelle procédure d'obtention à partir de l'Algèbre duale[286].

---

[282] [… au lieu de déterminer jusqu'à quel point les symboles logiques s'accordent formellement avec ceux du Nombre en général, il nous est plus immédiatement suggéré de les comparer aux symboles quantitatifs n*'admettant pour valeurs que 0 et 1*. Concevons alors une algèbre où les symboles *x, y, z*,.. admettent indifféremment les valeurs 0 et 1, et ces valeurs seules. Les lois, axiomes et procédures d'une telle algèbre seront identiques, en tout point, aux lois, axiomes et procédures d'une Algèbre de la Logique. Elles ne se distingueront que par une différence d'interprétation. (1992, p. 64)]

[283] Comme nous le verrons, il y reviendra dans les manuscrits qui suivront cet ouvrage de 1854 (Cf. Boole, 1856, p. 90 sqq.)

[284] Pour la méthode de développement, cf. *supra* p. 232.

[285] Boole (1854, pp. 69-70): « as the formal processes of reasoning depend only upon the laws of the symbols, and not upon the nature of their interpretation, we are permitted to treat the above symbols, *x*, *y*, *z*, as if they were quantitative symbols of the kind above described [susceptible only of the values 0 and 1]. We may in fact lay aside the logical interpretation of the symbols in the given equation; convert them into quantitative symbols, susceptible only of the values 0 and 1; perform upon them as such all the requisite processes of solution; and finally restore to them their logical interpretation. […] The processes to which the symbols *x*, *y*, *z*, regarded as quantitative and of the species above described, are subject, are not limited by those conditions of thought to which they would, if performed upon purely logical symbols, be subject, and a freedom of operation is given to us in the use of them, without which, the inquiry after a general method in Logic would be a hopeless quest. »

[286] Boole (1854, p. 72, note) : « To some it may be interesting to remark, that the development of $f(x)$ obtained in this chapter, strictly holds, in the logical system, the place of the expansion of $f(x)$ in ascending powers of x in the system of ordinary algebra. Thus it may be obtained by introducing into the expression of Taylor's well-known theorem. […] This demonstration in supposing $f(x)$ to be developable in a series of ascending powers of x is less general than the one in the text. »

Il en découle que les signes numériques ne peuvent apparaître, comme Boole le disait déjà à Cayley, dans les expressions des propositions, mais uniquement dans des équations. Dès lors, sans un nouveau moyen de désamorcer l'action du nombre, le risque demeure pour le système de produire des expressions non logiquement interprétables. Ce fut d'ailleurs une situation à laquelle Boole était prêt à se résoudre s'il n'avait pas trouvé de manière inattendue la façon de contourner l'effet d'insignifiance de tous les coefficients numériques sur les expressions logiques, de telle sorte que « les éléments numériques disparaissent complètement du résultat final »[287] (Boole à Cayley, 10 décembre 1847, dans Boole, 1997, p. 194).

Ce second moyen d'exclusion de l'Arithmétique opère à l'intérieur de la méthode de développement des fonctions que nous venons d'évoquer ; ce qui veut dire dans les étapes intermédiaires du calcul logique où la non interprétabilité est tolérée par Boole. Par cette procédure, toute expression logique peut être développée comme une somme de termes de la forme $a_i t_i$, où les t_i sont des termes logiques interprétables (c'est-à-dire, remplissant la condition $x^2 = x$) et mutuellement exclusifs, et les a_i sont des coefficients numériques attachés à eux. Comme nous venons de le voir, c'est donc uniquement à la place des coefficients a_i que des signes numériques autres que « 0 » et « 1 » peuvent apparaître. La façon que Boole aura d'inhiber l'effet de ces coefficients numériques sera de montrer que *tout terme logique affecté d'un tel coefficient est nécessairement nul ou vide*. Pour le prouver, Boole se livre à une série d'opérations, destinées d'abord à isoler les termes comportant des coefficients numériques autres que 1 et 0, et à déduire ensuite que les termes logiques t_i leur correspondant sont égaux à 0. Ainsi, étant donné le développement d'une équation logique *w* :

$$w = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + \cdots,$$

la multiplication de cette équation par elle-même n'affectera que les coefficients numériques, qui se verront alors élevés au carré[288]. Si l'on suppose, par exemple, que seuls a_1 et a_2 sont des coefficients de ce type, on aura ainsi :

$$w = {a_1}^2 t_1 + {a_2}^2 t_2 + a_3 t_3 + \cdots.$$

Dès lors, si l'on soustrait cette dernière équation à la première, on éliminera de cette façon tous les termes non problématiques, arrivant ainsi à une somme des seuls termes à coefficients numériques (a_1 et a_2 dans notre exemple), égale à 0, de la forme suivante :

---

[287] Comme il le rapporte à Cayley dans cette même lettre, Boole a pris cette découverte pour une confirmation de la justesse et de la généralité de son système : « I did not anticipate this, I thought it exceedingly unlikely that every equation $\varphi(xyz) = 0$ should be interpretable but when I found that this was the case and that it gave us the power of reducing the solution of equations to general theorems I accepted it not only as a proof that the laws I had investigated were really the laws of thought but also as a means of giving to the process of the calculus an analytical generality and simplicity which they could not otherwise have had. » (p. 194)

[288] Car pour tous les autres termes dans cette expression on a que $x^2 = x$, et les différents t_i étant des termes logiques mutuellement exclusifs, on a aussi que $t_i t_j = 0$ pour tout $i \neq j$.

$$(a_1 - a_1{}^2)t_1 + (a_2 - a_2{}^2)t_2 = 0.$$

Il ne reste qu'à multiplier cette expression par t_1 et t_2 alternativement pour trouver les expressions :

$$(a_1 - a_1{}^2)t_1 = 0$$

$$(a_2 - a_2{}^2)t_2 = 0,$$

(car $t_1 t_2 = 0$, à cause de leur exclusivité mutuelle). Étant donné que par hypothèse a_1 et a_2 sont non nuls et différents de 1, il découle de ces dernières expressions que tant t_1 que t_2 sont égaux à 0, et donc des termes logiques nuls[289].

Voilà donc que les signes numériques autres que 0 et 1 s'avèrent par là affecter, dans un régime gouverné par la loi $x^2 = x$, uniquement des termes vides. Cette circonstance est loin d'être une décision arbitraire de la part de Boole, car Boole n'introduit aucune loi ou règle supplémentaire pour l'établir. Sa formulation permet néanmoins d'établir une règle générale selon laquelle tout composant comportant des coefficients numériques autres que 0 et 1 dans le développement d'une fonction pourra être négligé entièrement lorsqu'il s'agira de restituer la signification logique qu'elle est capable de véhiculer. Dès lors, comme Boole le rappelait à Cayley, toute équation dans son système devient interprétable.

III.1.4. L'objectalité irréductible de l'addition

Au moyen de l'ensemble des instruments décrits et analysés dans les dernières pages, Boole réussit à maintenir l'action du nombre hors de la portée de tout mécanisme signifiant. Si bien qu'à la question de Cayley concernant la signification des nombres dans son système, Boole sera en mesure de répondre, après la mise au point de ces outils, de manière parfaitement consistante : les nombres ne *signifient* rien. Mais dès lors la question qui pourrait se poser est : quelle est la nécessité d'accepter leur présence à l'intérieur d'un système qui a pour seul but de véhiculer des *significations* ? D'autant plus que, comme nous l'avons vu, la source de cette présence peut être déterminée avec précision (l'itération de l'addition), et que le système dispose d'instruments spécifiques pour empêcher leur apparition (loi des indices).

C'est précisément cette question que le jeune Stanley Jevons, ancien élève de De Morgan, adressa à Boole en 1863 dans une série de lettres où il lui faisait part des modifications du système logique booléen qu'il envisageait de publier[290]. Jevons ouvrit cette

---

[289] Pour tout ce développement voir Boole (1847, p. 66; 1854, pp. 90-91).

[290] Pour une étude de cette correspondance, voir Grattan-Guinness (1991), où se trouve publiée l'intégralité de cet échange.

correspondance en suggérant que la généralité du système booléen pourrait être atteinte par un développement plus simple de ses principes, notamment par l'ajout d'un nouveau principe, qui entrainerait de plus l'abandon de certains éléments de notation inessentiels, tout en assurant les mêmes résultats. Comme le montre l'extrait de l'essai que Jevons attacha à sa première lettre du 3 août, le principe en question, nommé par lui « Loi d'unité » (*Law of Unity*), n'est autre que la loi des indices pour l'addition, dont l'omission dans le système booléen est pour Jevons responsable de l'introduction de termes numériques insignifiants :

> LAW OF UNITY
> Any alternatives of a plural term which are same in meaning are the same as any one taken as a single term.
> That is to say, what is the same as A or A or A, &c., is the same as A – a self-evident truth.
> The above important and self-evident law or axiom was unfortunately ignored by Prof. Boole when laying down the fundamental principles of thought and Logic. Hence proceed at least some of the chief difficulties, obscurities and even errors of his system, which prevent its proper beauty from being easily perceived. It is this serious omission, I believe, which introduced into a system of logic numerals and numeral forms of having no meaning and not obedient to the principles of the system. (Jevons dans Grattan-Guinness, 1991, p. 24)

L'extrait attaché se poursuit en signalant que l'introduction de la loi d'unité permet non seulement de se débarrasser des termes numériques, mais aussi des difficultés attachées à la soustraction, et en général de toute dimension quantitative subsistant dans la logique. La loi est d'ailleurs explicitement énoncée sous la forme

$$x + x = x$$

dans une autre version de la même lettre qui ne fut cependant jamais envoyée, mais que Jevons rédigea en croyant probablement que sa première lettre s'était égarée. On y peut lire :

> If I am right the faults of your system arise not so much from any error in the principles you have assumed, as from the *omission of one principle*, and from the adoption of a mathematical notation, *full of mistaken but not entirely false analogies*.
> The omitted principle is what I propose to call the *law of unity*, that $x + x = x$, in logic. This law is to extent of meaning what your law of duality [$x^2 = x$] is to intent of meaning. (Jevons dans Grattan-Guinness, 1991, p. 25)

Toutes ces considérations figureront dans l'opuscule de Jevons *Pure Logic* qui paraîtra l'année suivante. Notamment, des passages entiers des pages attachées à la première lettre seront repris dans le dernier chapitre, entièrement consacré à une critique du système booléen. Dans cet ouvrage, Jevons introduit l'addition comme le moyen de représenter ce qu'il appelle des termes « pluriels » du type « B ou C », qui comportent un ou plusieurs sens, sans que l'on puisse déterminer lequel :

> B *or* C is a plural term, or term of many meanings, for its meaning is either that of B or that of C, but it is not known which. (Jevons, 1864/1890, p. 24)

Introduite ainsi comme expression de la disjonction non exclusive, capturant moins l'agrégation d'éléments en extension que la composition de termes en intension, l'addition reçoit immédiatement ses déterminations commutative et distributive par rapport à la multiplication. Après quoi, Jevons énonce sa loi d'unité :

> It is in the nature of thought and things that *same alternatives are together same in meaning, as any one taken singly*.
>
> Thus, what is the same as A *or* A is the same as A, a self-evident truth.
>
> $$A + A = A \qquad A + A + A = A \qquad A + A + B = A + B$$
>
> This law is correlative to the Law of Simplicity [$AA = A$, $AAA = A$, etc.], and is perhaps of equal importance and frequent use. It was not recognised by Professor Boole, when laying down the principles of his system. (Jevons, 1864/1890, p. 25)

La première réaction de Boole aux observations reçues de Jevons fut de considérer ses propositions non pas comme une généralisation, mais comme une restriction de son propre système ; notamment une restriction aux expressions logiquement interprétables. Ainsi, « $x - y = 0$ » étant pour Boole logiquement ininterprétable lorsque y ne fait pas entièrement partie de x, la restriction du sens de cette soustraction à celui de « $x - xy = 0$ » (c'est-à-dire, à la soustraction uniquement de la partie de y incluse dans x) rendrait l'ensemble d'opérations interprétables à chaque étape du calcul. Mais justement pour cela, Boole ne voit pas la nécessité d'une telle restriction de la totalité du système sémiotique à celui de la symbolisation conceptuelle, dans la mesure où les possibilités opératoires qui définissent le premier s'appuient sur la constitution même de la pensée. Cette restriction est d'autant moins nécessaire que, comme Boole le rappelle aussitôt, les éléments sémiotiques n'appartenant pas à la sphère de la conceptualité logique se laissent interpréter « dans une autre sphère de la pensée, celle de l'algèbre », grâce au théorème du développement des fonctions (cf. Boole à Jevons, 17 août 1863, dans Grattan-Guinness, 1991, p. 26). Or, face à l'insistance de Jevons pour lui faire accepter l'évidence de la vérité de la loi d'unité, Boole répond dans une nouvelle lettre :

> I believe my last letter does meet this point. To be explicit, I now however reply that it is not true that in Logic $x + x = x$ though it is true that
>
> $$x + x = 0$$
>
> is equivalent to
>
> $$x = 0.$$

> You seem to me to employ your law of unity in two different ways. In the one it is true in the other it is not. (Boole à Jevons, 14 septembre 1863, dans Grattan-Guinness, 1991, p. 30)

Après quoi Boole clôt la discussion de manière aussi décidée que surprenante :

> If I do not write more it is not from any unwillingness to discuss the subject with you but simply because if we differ on this fundamental point it is improbable that we should agree on others. (Boole à Jevons, 14 septembre 1863, dans Grattan-Guinness, 1991, p. 30)

La correspondance ne s'est pas interrompue entre les deux savants anglais, bien que la discussion qui la motiva ne fût jamais reprise à proprement parler. Jevons accepta que le système de Boole était doué d'une consistance propre, sans nécessairement correspondre à la « logique de la pensée commune », et suggéra que sa propre loi d'unité permettait sinon d'atteindre, au moins de s'approcher plus naturellement de cette logique (Jevons à Boole, 17 septembre 1863, dans Grattan-Guinness, 1991, pp. 30-31). Il envoya à Boole les épreuves de l'ouvrage qu'il préparait, mais Boole décida de ne pas lire, pour éviter sans doute toute controverse concernant l'originalité de quelques travaux logiques qu'il envisageait publier après la préparation d'une seconde édition de son ouvrage sur les équations différentielles[291]. La mort de Boole en décembre 1864 empêchera la publication de ces travaux, et la reprise peut-être de la discussion avec Jevons autour de la loi d'unité. Mais la confiance de Jevons dans la vérité de ses propos ne s'est pas vue menacée par la réaction du vieux logicien, d'autant plus que les effets de simplification que la loi proposée était capable d'assurer étaient bien réels : d'une part parce que, comme il le dit dans l'une des lettres non envoyées à Boole « les signes numériques [*numerals*] 2, 3, 4, etc. sont complètement exclus de la logique par cette loi. » (Jevons, 5 septembre 1863, dans Grattan-Guinness, 1991, p. 28) ; d'autre part, parce que nombre de procédures à l'intérieur du système se trouvent considérablement simplifiées, ainsi le passage de $x + x = 0$ à $x = 0$ qui, trivial dans le cas de Jevons, exigeait, comme nous l'avons vu, un passage laborieux par le développement de la fonction logique, et l'élimination des termes à coefficients numériques autres que 0 et 1. C'est ainsi que Jevons n'hésitera pas à écrire à Boole :

> …subsequent reflection has rendered me perfectly confident that number is what I say and mathematics but Logic with a wide, and in continuous quantity an infinite development of logical differences. (Jevons à Boole, 5 novembre 1863, dans Grattan-Guinness, 1991, p. 32)

La loi proposée par Jevons permettra non seulement de simplifier certaines procédures et d'exclure les signes numériques du système, mais aussi, comme Jevons ne manque pas de

---

[291] Voir Grattan-Guinness (1991, p. 27).

le remarquer lui-même dans son œuvre, de détacher complètement la logique de tout élément quantitatif provenant de l'Algèbre (c'est-à-dire, de tout fragment d'Arithmétique qui pourrait rester dans l'Algèbre), et même de donner à la négation une expression et un fonctionnement plus adéquats à son usage logique, indépendant de l'opération d'addition (suivant la voie suggérée par De Morgan). La logique, devenue purement « qualitative » par l'adoption de cette loi, demeure pourtant capable d'embrasser la totalité des déterminations des *propositions* logiques ; elle sera bien *propositionnelle*. Qui plus est, en s'appuyant sur les effets de cette loi, Jevons ira même jusqu'à proposer le renversement du rapport de dépendance entre mathématiques et logique, tel que l'annonçait déjà le passage de la lettre à Boole que nous venons d'évoquer[292].

L'évolution des recherches logiques de la seconde moitié du XIXe siècle semblera donner raison à Jevons. Sa loi d'unité sera adoptée par la quasi totalité des logiciens poursuivant la tradition booléenne (à l'exception remarquable de John Venn[293]). Notamment, Peirce l'énoncera indépendamment de Jevons dans un article de 1867 (1867/1933), et Schröder l'adoptera depuis son premier traité logique en 1877, de façon parallèle à la loi multiplicative des indices, dans le cadre d'une symétrie générale à l'intérieur de la logique donnée par la dualité des lois (multiplication et addition), sur laquelle il mettra particulièrement l'accent (Schröder, 1877, p. 8). La non exclusivité de la disjonction associée à cette loi sera elle aussi massivement adoptée comme sens courant pour l'addition. Plus tard, vers la fin des années 1970, MacColl assurera l'interprétation de l'Algèbre booléenne en termes de calcul propositionnel[294].

Pourtant, on aurait tort de voir dans l'adhésion ferme de Boole à ses formulations originaires l'attitude opiniâtre d'un vieux savant dépassé par l'évolution de son temps et incapable d'accepter que ses propres idées puissent être développées par une nouvelle génération de chercheurs, allant jusqu'à contredire ses intuitions initiales. D'autant que l'attitude de Boole à l'égard de Jevons, loin d'être hostile, va de la cordialité à

---

[292] Dans une lettre immédiatement postérieure au premier échange avec Boole, datant du 30 août 1863, Jevons écrit à l'un de ses frères : « The forms of my system may, in fact, be reached by divesting his [Boole's] system of a mathematical dress which, to say the least, is not essential to it. The system being restored to its proper simplicity, it may be inferred, not that logic is a part of mathematics, as is almost implied in Professor Boole's writings, but that the mathematics are rather derivatives of logic. » (Jevons, 1886, p. 191). Jevons reprendra cette question dans son *Pure Logic*, où il en développe les intuitions fondamentales après avoir affirmé : « Number […] and the science of number, arise out of logic, and the conditions of number are defined by logic. » (Jevons, 1864/1890, p. 71 sq)

[293] Pour la critique de Venn à Jevons sur ce point, voir par exemple Venn (1881, pp. xxvii-xxviii, 383) et la lettre de Jevons à Venn du 26 mars 1876 (Jevons, 1886, pp. 349-352).

[294] Voir Grattan-Guinness (1991, p. 21).

l'encouragement[295]. Et de fait, Boole avait donné à Jevons un principe d'explication de sa position dans la première de ses réponses, auquel Jevons ne semble pas avoir été sensible, préoccupé qu'il était avant tout de faire accepter à Boole l'évidence de la vérité de la loi d'unité. C'est précisément à cette explication que renvoie le point fondamental de divergence invoqué par Boole au moment de mettre gentiment fin à la discussion. Boole évoquait alors deux façons dont la loi de Jevons admettait d'être comprise, pour affirmer que si elle pouvait être vraie dans un sens, elle ne l'était certainement pas dans l'autre. Cette remarque faisait sans doute référence à sa lettre précédente, où Boole adressait à Jevons le principe d'éclaircissement suivant :

> Will you allow me to point out an error into which you appear to me to have fallen. The interpretability of the *expression* u and of the *equation* $u = 0$ are totally different things. The expression u (which I suppose to be a function of class symbol, x, y, z), is not interpretable unless the condition
>
> $$u(1-u) = 0$$
>
> is satisfied identically. The equation $u = 0$ is always interpretable. Thus the equation
>
> $$x + x = 0$$
>
> is equivalent to the equation
>
> $$x = 0$$
>
> but the expression $x + x$ is not equivalent to the expression x. Your principle of unity is not applicable to *expressions.* So far as it is really applicable to equations, it expresses what is already contained as a particular part of the general doctrine of the interpretation of equations by development. (Boole à Jevons, 17 août 1863, dans Grattan-Guinness, 1991, pp. 26-27)

Ce passage, qui n'est pas dépourvu d'obscurités, est surprenant à plusieurs égards. D'abord, jamais Boole ne semble avoir été amené jusqu'ici à introduire une différence aussi tranchée entre *expressions* (ou fonctions) et *équations* logiques. Certes, les unes et les autres étaient présentées dans *The Laws of Thought* comme relevant de classes différentes de signes. Mais si à chacune de ces classes correspondaient des lois spécifiques, ces lois ne devaient assurément pas se contredire, ne serait-ce que parce qu'elles sont essentiellement indiscernables des signes qu'elles déterminent, et que la distinction des classes implique tout simplement que les signes en question sont différents. Comment une loi telle que celle proposée par Jevons pourrait-elle donc, comme l'affirme Boole, être vraie dans un cas, et non

[295] Dans sa première réponse à Jevons, Boole lui suggère : « I would say before concluding that if after reading what I have said and consulting Prof De Morgan you should still believe that you have got hold of essential truth then by all means publish. The final appeal for you must be to your own judgments. » (Boole à Jevons, 17 août 1863, dans Grattan-Guinness, 1991, p. 27).

pas dans l'autre ? Et pourquoi Boole ne semble-t-il pas préoccupé par les contradictions qui en pourraient résulter dans le système ? Ou pour poser le problème de manière plus générale : quelle est la nature de cette ambivalence ou de cette dualité essentielle à l'intérieur même de l'opération d'addition, que Boole essaie de saisir, peut-être un peu par accident, à travers la distinction entre expressions fonctionnelles et équations ? En quoi consiste cette divergence, présente de façon silencieuse mais néanmoins effective dans son système, que Boole se voit pourtant contraint d'assumer ouvertement lorsque, sous l'inspiration de nouveaux logiciens, ce système commence à se développer ?

Cette différence, à laquelle Boole tient tout particulièrement au point d'en faire un point non négociable pour la logique, malgré la lourdeur qui en résulte pour son système, n'est que la manifestation de la dualité dont l'opération d'addition s'est vue investie dans le processus de son incorporation à la dimension symbolique de la logique propre à l'Abstraction symbolique. Effleurée au sein du système logique comme l'expression humble d'une propriété pure des objets, puis investie d'une nature sémiotique au degré le plus faible de symbolisation, Boole entraina l'addition dans un processus progressif de symbolisation qui permettait d'en maîtriser les effets et de contribuer à l'intégration générale du système. Par ce processus, l'addition fut amenée à assumer la symbolisation de propriétés conceptuelles du langage, tout comme elle constituait auparavant la marque des propriétés ontologiques fondamentales concernant la réunion des parties dans un tout. Si Jevons a raison de soutenir que la loi des indices pour l'addition, ou la « loi d'unité » comme il la baptisa, vient réaliser de manière naturelle l'intégration globale du système, tout en éradiquant l'ensemble des « obscurités » d'ordre quantitatif qui y subsistaient, c'est dans la mesure où cette loi achève la symbolisation de l'opération d'addition. La parfaite symétrie entre addition et multiplication que Schröder mettra constamment en avant sous le nom de « dualité »[296] témoigne suffisamment de cette symbolisation sans reste de l'addition sous la loi d'unité. Mais précisément pour cette raison, l'adoption de cette loi suppose la destitution ultime de toute prétention de l'addition à exprimer de manière directe des propriétés objectales. Et avec elle, de toute prétention à retrouver une telle expression à l'intérieur du système symbolique de la logique tout court.

Telle était bien la vocation de l'Abstraction symbolique et de la logique formelle chargée d'accomplir la formalisation du sens sous sa loi. Elle ne pouvait atteindre sa consistance propre qu'au moyen d'un système symbolique refermé sur sa propre abstraction,

[296] Au demeurant, il faudra prendre soin de bien distinguer cette notion de dualité de celle ou celles que nous nous efforçons de mettre en lumière à partir de l'œuvre de Boole, dont celle de Schröder n'est que la négation et l'effacement.

ayant renoncé sans remords à accueillir comme une composante interne et constitutive tout élément provenant de ce qui ne pouvait être vu que comme l'autre côté de la conceptualité enfin apprivoisée. La notion d'interprétation, telle qu'elle commençait déjà à s'esquisser dans les travaux des premiers algébristes anglais, sera dès lors le seul lien capable d'assurer soigneusement la distance entre le *concept* et l'infinité insouciante des *objets* capables de leur correspondre – entre la *forme*, généreuse parce qu'abstraite, et le *contenu* qui, placé dans son au-delà inatteignable, ne saurait jamais la qualifier. Jevons ne disait pas autre chose lorsqu'il célébrait l'abandon de tout vestige arithmétique que son système accomplissait, pas plus que Schröder lorsqu'il essayait d'apprendre à Lasswitz à ne faire de Frege qu'un Booléen.

Bien que Boole ait communié avec ce credo fondamental, bien que ses travaux aient plus que tout autre contribué à l'instaurer, son attachement inconditionnel à une définition arithmétique de l'addition logique, malgré la condition d'exclusivité mutuelle des termes qu'elle implique, malgré la présence de termes numériques à l'intérieur de la logique qu'elle engendre, malgré la mobilisation des procédures analytiques que le traitement de leurs effets symboliques exige, trahit qu'il ne renonçait pas complètement à l'objectalité dans le cadre de la conceptualité abstraite du régime symbolique. Son refus de la loi d'unité ne peut pas être expliqué autrement, et la divergence qui en résulte pour l'opération d'addition (se comportant différemment pour des expressions et pour des équations) n'est que l'effet de cette place ambivalente entre les objets et les concepts dans laquelle Boole semble avoir voulu la tenir. C'est pourquoi la loi d'unité de Jevons est pour lui à la fois vraie et fausse. En tant que marque de la composition des objets, l'addition exprime l'agrégation des parties dans un tout, de telle sorte que la loi $x + x = x$ ne saurait être vraie sans mettre sérieusement en question ce rapport élémentaire des parties au tout, et la forme même des objets en dernière instance. La même chose vaut d'ailleurs pour la non exclusivité mutuelle des termes distincts dans l'addition, qui n'est que l'autre face de la loi en question. Dès lors, comme l'indique Boole, dans aucune expression ou fonction logique définissant des « touts » composés de parties cette loi ne pourrait être valable. Mais de l'autre côté, comme le montre Jevons, il se trouve que cette loi constitue bien une sorte de raccourci parfaitement consistant pour la détermination sans reste de la dynamique proprement symbolique qui capture le fonctionnement de la conceptualité ; dynamique dont les équations logiques sont à la fois la condition, l'élément et l'expression. De sorte que tous les résultats obtenus au moyen de la méthode de développement selon laquelle Boole traite lesdites expressions fonctionnelles, et rien d'autre que ces résultats, sont également susceptibles d'être obtenus en faisant appel à cette loi, portant après tout sur les mêmes signes d'addition figurant dans les fonctions. C'est dire que la loi d'unité est bien valable lorsque l'addition inscrit les configurations objectales dont elle est la marque dans le plan des fonctionnements purement symboliques du concept, régi de manière primordiale par la multiplication[297].

Chez Boole donc, expressions fonctionnelles et équations sont différentes parce que l'addition s'y comporte selon des régimes différents. Et l'addition s'y comporte selon un double régime car, finalement, *Boole ne renonce pas à exprimer à travers elle l'intuition élémentaire du tout et des parties*, donnée en dernière instance par la forme tout aussi élémentaire des objets. De fait, depuis son premier opuscule de 1847, jusqu'aux dernières notes en vue de la préparation d'un troisième ouvrage de logique, la définition de l'addition comme agrégation de parties ne se voit pas substantiellement modifiée. Ainsi, dans des manuscrits tardifs Boole continue à affirmer que « l'expression $x + y$ est ininterprétable à moins que les classes x et y soient complètement distinctes *de telle sorte qu'elles soient capables de former des parties d'un tout*. » (1997, p. 183, note; nous soulignons). Que cette conception de l'addition constitue à l'intérieur du système logique un régime d'une nature hétérogène à celle du régime instauré par la multiplication, Boole le théorise lui-même dans des notes préparatoires pour des écrits postérieurs à *The Laws of Thought* :

> *…we are able to conceive of things under two wholly distinct relations – the relation of whole and part and the relation of subject and quality and […] these relations are the basis of the two great logical processes connected with conception viz. division and definition.* The relation of whole and part is exemplified when we contemplate any collection of things as formed of parts which by simple aggregation or putting together form that whole just as we may conceive of the sun, the primary, the secondary planets etc., as comprising the solar system omitting from our idea of the solar system any notion [of the] physical relations of those parts.
>
> The relation of subject and quality is exemplified when we contemplate any subject of thought as possessing different qualities by any one of which it might be *described* but by the combination alone of which it can be *defined*. e.g. Man may be described as *rational* or as an *animal* but he is defined as rational animal. (Boole, 1997, p. 55)

Inutile d'ajouter que Boole fait correspondre ces deux relations aux opérations d'addition et de multiplication dans son système. Les mots qu'il utilise pour les qualifier, ainsi que les exemples qui les illustrent, indiquent d'ailleurs assez clairement la portée objectale de ce qu'il appelle « division », ainsi que l'attachement conceptuel de la « définition ». D'où le

[297] Il convient de rappeler ici, peut-être, que l'effectivité de la méthode de développement d'une fonction logique proposée et employée par Boole dépend largement de la loi des indices pour la multiplication, que ce soit dans sa version de 1847 (en limitant les degrés des termes du développement à 1, et donc les nombre des termes à deux), ou dans celle de 1854 (en habilitant la substitution des termes logiques par 0 et 1, seuls nombres remplissant la condition $x^2 = x$). L'élimination des termes à coefficient numérique autres que 0 et 1 s'appuie d'ailleurs elle aussi entièrement sur la validité de la loi multiplicative des indices.

sens des conditions formelles ou symboliques qui déterminent, caractérisent et identifient l'une et l'autre : $xx = x$ pour la multiplication, ce qui comprend la non-contradiction, propre au concept (car elle implique $x(1 - x) = 0$) ; $x + x \neq x$ pour tout x différent de 0 dans le cas de l'addition, ce qui entraîne l'exclusivité mutuelle des termes, propre aux objets.

Mais si la nature conceptuelle des termes liés par la multiplication ne pose pas plus de problèmes que ceux que nous avons analysés dans la partie précédente, la question de la nature « objectale » des termes agrégés par l'addition est quant à elle plus délicate. Et cela dans la mesure où ce que l'addition met en rapport ce ne sont pas à l'évidence des objets en tant que tels, mais *des concepts ou termes logiques qui fonctionnent selon des propriétés objectales* (notamment celle des touts et des parties) lorsqu'ils sont mis en rapport par l'addition. Si la multiplication supporte et effectue *la forme du concept* à l'intérieur du système symbolique, l'addition est pour Boole censée en faire de même avec la *forme de l'objet*.

Ce statut paradoxal dont l'addition affecte les termes logiques, présent mais silencieux depuis l'introduction modeste du signe d'addition dans *The Mathematical Analysis…*, devient de plus en plus manifeste dans les réflexions de Boole, à mesure que s'approfondit le processus de symbolisation progressive de l'addition. Ainsi, avec le premier pas réalisé dans la direction de cette symbolisation à la suite de son traité de 1847, Boole affirme que les termes identiques dans le contexte de l'addition (c'est-à-dire, les deux « x » dans « $x + x$ ») « réfèrent à des entités différentes ou mutuellement exclusives de telle sorte que nous ayons la possibilité d'agrégation » (1997, p. 44). Ce qui montre comment l'inscription de l'addition dans la surface symbolique ne l'arrache pas au domaine des objets sans y introduire du même coup le germe d'un principe de référence, hétérogène à la symbolisation parce qu'immédiatement rapporté à des « entités » dont il reçoit la forme de l'exclusion mutuelle qui commande la possibilité de leur agrégation. L'addition ramène de cette manière la forme de l'objectalité au sein du système symbolique des concepts, dans la mesure où elle est l'analogue symbolique du fonctionnement des entités ou objets physiques. Les passages que nous avons évoqués dans les dernières pages témoignent de cette perspective gagnée par Boole avec l'évolution de ses travaux. Ce n'est pas par hasard d'ailleurs si après *The Laws of Thought*, où la symbolisation de l'addition telle qu'il la conçoit peut être considérée achevée, Boole peut s'exprimer comme il ne l'a jamais fait auparavant sur cette épineuse question de l'objectalité physique ou matérielle inhérente à l'opération d'addition. Ainsi, après avoir remarqué que le terme « addition » n'est applicable à une opération mentale que dans un sens « métaphysique » ou « dérivé », Boole affirme :

> …it is nowhere meant to be affirmed that we can add two concepts together in the same way as we can collect into one whole two physical parts. But the term addition when employed to

> represent an operation performed upon the concepts “trees”, “herbs”, means only that operation whatever it may be by which from these concepts we form the concept “trees and herbs”. We can in no other way describe mental operations than by terms material in their origin and here and throughout this paper the primary meaning of the operations described is to be sought for in their physical analogue. Should it be asked—Why then the introduction of mental operations and relations is necessary it is replied that they possess a truth and application independently of the conditions under which their physical or objective realization is possible. (Boole, 1856, p. 76)

Il apparaît donc, au terme de cette longue analyse de la nature problématique de l’addition dans le système de Boole, que ce dernier avait la volonté consciente et ferme de lui réserver une place ambivalente, voire paradoxale, quitte à alourdir le système en suscitant une excroissance sémiotique de termes insignifiants, et un ensemble de procédures provenant de l’Analyse mathématique pour la maîtriser et la réduire. Si cette volonté peut sembler inexplicable aux yeux de ses contemporains (non moins qu’aux nôtres), l’attachement de ce fonctionnement de l’addition à la forme des objets, sur fond de l’organisation conceptuelle propre à l’Abstraction symbolique, nous permet d’en saisir le sens profond. Ce que notre mise en lumière de cet attachement montre, c’est qu’en chargeant l’addition de la tâche d’exprimer la relation des touts et des parties propre aux objets, *Boole résistait contre l’abstraction du contenu* que l’Abstraction symbolique érigeait en condition même de la constitution d’une logique mathématisée.

En effet, dans le contexte problématique de l’Abstraction symbolique dans lequel Boole construit son système, la forme logique était destinée à s’épuiser dans la forme du concept conçu comme classe ; forme articulée et garantie de façon fondamentale et ultime par le fonctionnement de l’opération de multiplication, telle que Boole la définissait. Le contenu relatif à ces formes conceptuelles apparaissait, quant à lui, comme l’univers des objets matériels ou physiques dont les réunions sont susceptibles de correspondre à ces formes. C’est précisément ce contenu que les formes conceptuelles doivent abstraire pour se constituer comme telles. De cette façon, les formes conceptuelles, en se posant comme abstraites, se trouvent au fond coupées de tout lien substantiel avec ces contenus. Dans cette configuration duale, concept et objet, forme et contenu, ne maintiennent un lien interne dans le meilleur des cas que de façon négative et indirecte, comme effet du conditionnement que la fonction sélective des concepts, régulée par l’opération de la multiplication, oblige à supposer au niveau des contenus à sélectionner. Or, à l’encontre de ce que cette configuration ordonne, Boole introduit à l’intérieur même du système logique, par la manière singulière dont il définit le fonctionnement de l’addition, des déterminations positives pour les contenus objectaux, de telle sorte que les liens entre concept et objet, entre forme et contenu, appelés par principe à demeurer extérieurs l'un à l'autre dans le cadre de l'Abstraction symbolique, se trouvent intériorisés *sous la forme d'une dualité entre les deux lois* (multiplication et addition). Voilà le sens intime de la volonté de Boole concernant l'addition : à travers le comportement dont il la charge, Boole s'évertue à *faire consister à l'intérieur de la logique mathématisée une sorte de forme de contenu*, capable de s'intégrer, de manière aussi homogène que possible, avec la conceptualité symbolique par laquelle la logique se reconnaissait capable d'acquérir ses titres formels.

La nature hybride de l'addition (représentant des propriétés à la fois des objets et des concepts, véhiculant à la fois une forme et un contenu…), ainsi que sa place équivoque dans le système (s'intégrant et ne s'intégrant pas avec la multiplication, admettant la loi d'unité dans le cadre des équations et ne l'admettant pas dans le cadre des fonctions…), tout comme les effets nocifs dont elle se rend responsable (engendrant des termes numériques, exigeant des méthodes de réduction…), et enfin le caractère radicalement ininterprétable ou insignifiant des signes numériques produits par son fonctionnement singulier dans le système, tout cela témoigne suffisamment du fait que la figure d'une « forme de contenu » que l'addition cherche à réaliser timidement et de façon non entièrement consciente, est absolument étrangère au régime d'Abstraction symbolique où la logique de Boole se construit. Dans le contexte donné par ce régime d'intelligibilité, la présence d'une véritable forme de contenu ne peut être comprise que comme une figure composite, un mixte mal analysé, et c'est bien ce qui est arrivé, au point que les tensions tant techniques que théoriques qu'elle produit dans le système n'ont pu apparaître que comme les effets immédiats d'un faux problème.

Seulement, si Boole n'était pas suffisamment algébriste pour vouloir que le problème du contenu formel ne se pose pas, il n'était pas suffisamment arithméticien non plus pour arriver à lui donner une solution qui donne à cette forme de contenu une place stable et claire dans le système. C'est pourquoi, manquant de véritables ressources devant le sens imposé par l'Abstraction symbolique, son système s'avère inadéquat pour accueillir cette forme, et multiplie les confusions de différents types. Le principe formel du contenu, avec l'ensemble de formes qu'il engendrait dans la logique, sera ainsi réduit et contourné par ses successeurs, au moyen de l'algébrisation totale de l'opération d'addition, achevant de manière simultanée la constitution d'une logique formelle simplifiée et cohérente, et avec elle l'accomplissement même de l'Algèbre abstraite. Mais le principe de l'addition qui était hétérogène au régime conceptuel régi par la multiplication se trouva ainsi réduit. Cela ne se manifeste nulle part plus clairement que dans le fait que l'addition qui le mettait en œuvre ne devint à partir des travaux de Jevons et de ses successeurs, que le double stérile de la multiplication, sanctionnant le principe de dualité tellement loué par Schröder, selon lequel on peut passer d’une opération à l’autre par simple négation (comme le montrent les célèbres lois de De Morgan).

Avec cette algébrisation de l’addition s’achevait la perte du contenu que Frege devait bientôt dénoncer dans le passage de la logique leibnizienne à celle des Booléens. Mais de cette perte (d’un contenu qui n’était de toute façon jamais entièrement formel auparavant, ou plus précisément, qui n’était jamais déterminé par les mêmes règles du système qui régissait la forme de sa conceptualité), de cette perte donc, Boole lui-même n’a été le responsable que dans la mesure où il a été incapable de tourner son principe formel de contenu en une notion de contenu formel sur laquelle aligner l’ensemble du dispositif logique. Il faudra alors attendre l’irruption des travaux de Frege pour que, par la reconfiguration totale de l’espace sémiotique connectant les mathématiques au domaine général de la signification, une telle notion trouve une manière particulière de se faire une place dans la constitution d’une logique formelle.

III.2. Du nombre au contenu : La complexité symbolique du nombre

III.2.1. De la dualité des opérations à la disparité de la répétition.

Bien qu'elle ne dispose pas des ressources pour en traiter dans le cadre de l'Abstraction symbolique, l'œuvre de Boole n'en pose pas moins la question d'une forme de contenu, d'une manière que l'évolution de l'Algèbre et de la logique ne tardera pas à effacer. On se souvient qu'à la fin de la première partie de notre travail, nous nous demandions, après avoir commencé d'établir le lien entre contenu logique et Arithmétique chez Frege, pourquoi Boole, qui présentait la construction de sa logique comme découlant de la « Science du nombre », ne disposait pas lui-même d'une notion de contenu logique. Nous suggérions alors, en nous appuyant sur une série de remarques faites par Frege à ce sujet, que par son approche strictement *algébrique*, la logique booléenne avait manqué le problème sémiotique spécifiquement *arithmétique* qui animait la notion de contenu formel. Nous pouvons maintenant être plus précis. Notre étude de la configuration mathématico-sémio-logique attachée à l'Algèbre abstraite anglaise et de la place que Boole y occupe nous montre que, si l'abstraction algébrique a bien forcé la logique booléenne à se débarrasser de toute notion de contenu dans l'œuvre des Booléens, Boole lui-même a tenu sinon à une notion de contenu formel parfaitement achevée, du moins à un principe formel de contenu. *Et cela se trahit par sa réticence à l'égard de la tendance de l'Algèbre à l'abstraction radicale, à laquelle s'oppose son attachement à certaines propriétés arithmétiques, concernant notamment l'opération d'addition*. En effet, son refus de la loi $x + x = x$ témoigne de sa volonté de ne pas mener l'algébrisation des opérations jusqu'au bout, ce qui entraîne l'attribution de propriétés arithmétiques à l'opération d'addition. Cette admission incertaine de l'Arithmétique dans l'espace de l'Abstraction symbolique laisse dès lors subsister dans le système logique une forme capable d'incarner un principe élémentaire structurellement attribué au contenu dans ce cadre, à savoir le rapport de parties mutuellement exclusives à un tout.

C'est ainsi que le lien entre l'Arithmétique en tant que science du nombre et la notion d'une forme de contenu dans la logique se trouve avéré dès le commencement du processus de mathématisation de la logique, avant même qu'il soit nécessité et consolidé par la transformation de la totalité de l'espace de formalisation du sens opérée par Frege. Or ce n'est certainement pas de la même manière que ce lien entre Arithmétique et contenu s'effectue dans les deux cas. Si une logique du contenu est à associer à des conditions mathématiques particulières (arithmétiques notamment), fonctionnant comme socle sémiotique au niveau de sa constitution, il importe alors de comprendre précisément comment ce conditionnement du contenu par l'Arithmétique agit de manière effective dans chaque cas. Cela permettra de révéler les mérites et les faiblesses de ces tentatives de construire une logique du contenu, et d'apporter un peu de lumière sur le sort malheureux qu'ils ont partagé. Mais plus profondément, c'est dans la confrontation de ces cas qu'un domaine spécifique pourrait commencer à se dessiner, où s'amorceraient les conséquences conceptuelles, ontologiques et philosophiques liées à la sémiotique des mathématiques. Domaine dans lequel viendra un jour s'installer ce que d'autres nommeront « sémantique », et que nous préférons appeler de façon volontairement plus générale et ouverte « théorie du sens ».

Il s'agit donc de rendre compte de la forme du contenu qui dans l'œuvre singulière de Boole résiste à l'abstraction du symbolisme et au type de logique formelle qui empruntera son nom. On sait déjà qu'elle relève d'une reconnaissance du statut sémiotique du nombre, qui trouve son point départ dans un fonctionnement inhérent aux opérations de multiplication et addition. C'est à partir de ce fonctionnement que, moyennant la loi symbolique des indices, elle arrivera à s'insinuer comme telle à l'autre extrême de l'espace de formalisation du sens, par la présence problématique de chiffres ou signes numériques au milieu des expressions logiques censées être susceptibles d'interprétation. Mais comment à partir des opérations mathématiques de multiplication et addition le nombre est-il capable de traverser tout l'espace de l'Abstraction symbolique, pour dessiner comme en pointillé sur la surface de la logique la forme d'un contenu ?

Les passages suivants, issus des notes où Boole confrontait, à l'époque de sa discussion avec Cayley, la multiplication et l'addition à propos de leur fonctionnement itératif, permettent d'amorcer une réponse :

> …the idea of number is introduced by the repetition of an operation as in successive periods of duration. It is equally introduced by the consideration of individuals of the same kind as defined by a common name simultaneously existing.

> Both the system of elective symbols and the system of numerical magnitude set out from the same point – the consideration of the whole or unity. In the case of magnitude we are led to contemplate different wholes without speculating on the constitution of any one – In the system of elective symbols we have but a single whole, the Universe whether it be the actual Universe or some portion of it to which the discourse is limited and we define more or less its constitution by specifying the classes which enter into it.
>
> A great distinction between the system of elective symbols and that of quantity is that in the former the equation may relate to several distinct classes of things included in the universe 1 – in the former [latter] we only relate to one description of thing viz. the unit itself to which all the numerical coefficients are supposed to apply.
>
> In the mathematics of quantity we proceed by the combination or repetition of the unit. In the mathematics of Logic we proceed by the analysis of the Unit.
>
> The analysis of the Unit is effected by the combination or repetition of operations and hence regarding one of these operations as a whole we have quantity introduced into the elective equation. (Boole, 1997, pp. 44-45)

Aussi confuses que ces lignes puissent paraître, elles présentent tous les éléments pour comprendre comment l'on passe du nombre au contenu. À condition de ne pas céder trop rapidement aux raccourcis auxquels les notions et principes spéculatifs avancés par Boole invitent (comme par exemple les notions de tout, d'univers et d'unité, d'individus et de noms, de sélection et de combinaison…). Le problème est bien celui du nombre. Mais cela ne devrait éveiller en nous aucune intuition particulière, pour une raison au moins : *nous ne savons toujours pas ce qu'est un nombre*. Plus précisément, la question de la nature et du statut du nombre dans un espace mathématique entièrement « sémiotisé » (c'est-à-dire dont toutes les parties ont été redéfinies comme différents types de signes et de régimes de fonctionnements sémiotiques), ainsi que de sa signification pour un système logique, est toujours en suspens au moment où se développe l'œuvre de Boole. Les premières lignes de ce passage devraient d'ailleurs suffire pour prendre la mesure de la difficulté qui se cache derrière le problème du nombre : bien que l'idée de nombre soit doublement introduite par des principes distincts, seulement l'un d'eux instaurera un système proprement numérique.

Si le nombre constitue la forme problématique d'un contenu relativement à un système symbolique, la question qui se pose alors est : qu'est-ce que le nombre en tant qu'expression symbolique ? Ce sont des éléments de réponse à cette question que les tensions qui animent le système de Boole font apparaître, et que des passages comme celui que nous venons de citer s'efforcent de rendre intelligibles.

Le point de départ est donc constitué par les opérations de multiplication et d'addition. D'après la perspective introduite par l'Algèbre abstraite, celles-ci ne sont pas conçues comme des opérations arithmétiques, mais symboliques, régies par des lois arbitraires en principe. C'est au niveau de ces lois que le problème du nombre, perdu dans cette symbolisation, doit être soulevé à nouveau. Comme nous l'avons vu, le problème du nombre se pose lorsqu'on prend conscience que l'on a besoin de signes numériques pour établir les lois des indices. Or ces lois sont l'expression symbolique du besoin de réguler la *répétition* comme propriété strictement sémiotique des symboles opératoires. C'est donc comme effet de la répétition des signes dans le contexte de leur détermination symbolique que le nombre retrouve une place dans le paysage de l'abstraction. La transformation de son statut est radicale. Si dans l'œuvre des algébristes un signe numérique comme « 3 » renvoyait à un objet individuel pouvant être connecté à un autre par une opération portant sur lui (comme dans « $3 + 4$ » par exemple), le même signe, chez Boole, renvoie à une propriété de cette opération (et non plus au sujet sur lequel elle s'exerce), à savoir à la répétition de son application, parce qu'il assume l'existence de ce signe au niveau même de la dimension symbolique dont tout objet individuel a été évacué. L'addition et la multiplication continuent à être le lieu des nombres, non plus cependant comme ce qui les met en rapport, mais comme ce qui les engendre par répétition.

Si l'on songe à la place de la répétition dans la détermination des significations d'un langage que nous avons évoquée dans le chapitre précédent[298], on pourrait croire que la répétition comme principe sémiotique, c'est-à-dire comme principe de détermination du sens d'un signe, nous donne la raison suffisante du rapport intime entre Arithmétique et contenu. D'autant plus que d'après les formulations dont Boole est si fier, la loi $x^2 = x$ se pose comme loi fondamentale de la logique et du concept en général. Cette idée n'est certainement pas fausse, mais il ne faut pas aller si vite. Car abandonnant la simplicité supposée de son statut objectal, le statut sémiotique du nombre est *complexe*. Et c'est précisément cette complexité que le système érigé par Boole permet de faire apparaître, puisque, comme les réflexions dans ses notes le manifestent avec lucidité, *en tant qu'être symbolique, le nombre est déterminé, non pas par une loi, mais par deux au moins*. Cette dualité est présentée comme celle des fonctionnements à la fois disparates et conjoints des opérations initialement mathématiques de multiplication et d'addition. Mais coupées de leur signification arithmétique originaire, la dualité de ces opérations se voit désormais reposer sur le principe de répétition qui motive l'introduction du nombre à travers l'inscription des signes numériques. Comme l'indique le passage cité, à ces deux opérations correspondent des principes de répétition divergents, dont la disparité transparaît, et est même effectuée par, les lois des indices respectives.

---

[298] Voir *supra* pp. 261 sqq.

Il ne faut pas s'étonner que nous parlions ici d'une loi des indices pour l'addition, tout comme de l'addition en tant qu'opération logique définie par des lois symboliques en général. Bien que Boole évite de s'exprimer ainsi dans ces lignes à cause de la portée ontologique qu'il attribue à l'addition dans la première époque de ses recherches logiques (à laquelle ces notes appartiennent), nous avons montré suffisamment comment il entraîna l'addition dans un processus de symbolisation progressif. Nous avons montré, d'autre part, dans quelle mesure la loi des indices qu'il établit pour la multiplication supposait de reconnaître au nombre un statut sémiotique, alors qu'il avait été refusé par tous ses prédécesseurs anglais. Ces deux circonstances constituent les conditions préalables suffisantes pour que le problème du nombre se laisse poser et traiter à partir de ses aspects sémiotiques. Or, précisément pour cela, la prétendue absence d'une loi des indices pour l'addition ne constitue la limite du processus de sa symbolisation qu'en apparence. Car bien que Boole ne l'envisage pas forcément comme telle, le fonctionnement de l'addition répond bien à une loi, fût-ce implicite, que Boole a contribué à identifier comme une loi proprement symbolique, à savoir :

$$mx + nx = (m + n)x.$$

Cette loi apparaît à première vue comme la loi distributive. Elle en diffère pourtant d'une manière essentielle à tous égards, puisque les termes m et n ne sont pas des termes logiques, mais des termes numériques fonctionnant comme des indices affectant des termes logiques. Aussi, cette loi doit-elle être associée moins à $x(y + z) = xy + xz$ qu'à $x^m \times x^n = x^{m+n}$ (m et n étant ici à la multiplication ce qu'ils étaient à l'addition dans l'expression ci-dessus, c'est-à-dire la marque de sa répétition). Si bien que, si l'on exprime l'addition dans le style de la notation opératoire des algébristes de Cambridge (et de Gregory notamment), cette loi se laisserait écrire :

$$f_m(a) + f_n(a) = f_{m+n}(a).$$

Certes, les termes numériques n'apparaissent pas comme des indices dans le cas de l'addition, mais comme des coefficients, au point où il serait plus naturel d'appeler cette loi « loi des coefficients ». Mais regardée comme loi régulant une opération abstraite elle ne diffère en rien de la loi des indices des algébristes, qui pourrait dès lors être appelée peut-être plus généralement : loi de répétition ou d'itération. Il apparaîtra néanmoins que la notion d'indice n'est pas inexacte après tout.

Le problème du nombre en tant qu'expression symbolique se pose donc comme le problème du rapport entre les lois régulant respectivement la répétition de deux opérations au moins. D'où la puissance problématique et disruptive du système de Boole : en dissociant les régimes d'itération respectifs des opérations d'addition et de multiplication, il fait remonter à la surface ce qui restait dissimulé auparavant, et qui disparaîtra de nouveau très vite. En effet, si la loi d'unité de Jevons établira une correspondance naturelle au plus bas niveau de la répétition des deux opérations, ce qui donnera l'effet d'effacer entièrement la présence du nombre, les approches ordinaires de l'Arithmétique avant l'émergence de l'Algèbre abstraite s'appuient sur une correspondance (que l'Algèbre d'ailleurs ne cherchera pas à contester), selon laquelle l'exponentiation n'est que la répétition de la multiplication, qui n'est, quant à elle, que la répétition de l'addition. Par cette interdépendance instituée par leurs définitions, des opérations symboliques indépendantes par principe sont appelées à coïncider selon des règles précises. Ainsi, les opérations portant sur le signe « $+$ », sur le signe « $\times$ », « $\cdot$ », ou la simple juxtaposition de termes, et enfin sur des indices, se trouvent liées par une correspondance spécifique suivant laquelle, par exemple,

$$2 + 2 = 2 \times 2 = 2^2;$$

ou en évitant certaines ambiguïtés proprement symboliques :

$$3 + 3 + 3 = 3 \times 3 = 3^2.$$

L'importance historique de l'Algèbre abstraite anglaise est d'avoir rendu possible un regard purement sémiotique sur chacune de ces opérations (addition, multiplication, exponentiation). Grâce à elle, il est devenu possible de comprendre que, en tant que règles de manipulation de signes, ces opérations sont de fait *indépendantes par principe* (car aucune raison *sémiotique* n'oblige à traiter le signe « $\times$ » selon le fonctionnement symbolique du signe « $+$ », non moins que les indices selon les fonctionnements de ces deux signes). Pourtant, pour avoir constamment exclu les termes numériques de son champ de réflexion sur les signes, les possibilités ouvertes par ce regard nouveau porté sur les opérations ne sont jamais parvenues à mettre en évidence la facticité de cette correspondance, recelant peut-être l'un des secrets constitutifs de l'Arithmétique. La manière parfaitement triviale de se servir de la loi des indices, dans le contexte de laquelle l'apparition nécessaire des signes numériques comme marque de la répétition d'une opération réintroduisait à leurs yeux une étrange naturalité extra-symbolique, montre à quel point les algébristes de Cambridge ne prenaient pas toute la mesure de leur découverte. Ce n'est donc qu'avec Boole, et comme conséquence de sa confrontation aux impératifs de la conceptualité logique, et du sens en général, que les possibilités des instruments symboliques montreront toute leur puissance. C'est ce qui arrivera lorsque, reconnaissant dans la présence nécessaire des nombres à la place des indices une exigence de notation, accordant de cette façon aux nombres un statut symbolique, il se permettra d'établir la loi $x^2 = x$, selon laquelle l'existence même des nombres se trouve directement déterminée symboliquement.

Mais c'est grâce Boole aussi que la question de la nature symbolique du nombre ne se laisse pas réduire à une simple affaire de notation. Et cela justement parce que, comme il l'affirmait, le nombre n'est pas uniquement introduit par les indices comme marques de la répétition de la multiplication, mais aussi par les coefficients comme marques de la répétition de l'addition. Et certes cette deuxième dimension additive du nombre se présente, à l'instar de la première, comme une pure question de notation : « $3x$ » étant une simple abréviation d'écriture pour « $x + x + x$ » (tout comme « x^2 » l'est pour « $x \cdot x$ » ou « xx »), « $3x$ » pouvant au fond être noté « $IIIx$ », « x''' », « $\dddot{x}$ »… *Ou de n'importe quelle autre façon*. À la limite, le symbole employé n'a aucun besoin de suggérer *schématiquement* par sa figure la triple répétition[299]. Toute notation est valable si elle permet de devenir le support de l'opération de répétition. Mais *c'est dans ces conditions mêmes que réside justement tout le problème sémiotique du nombre* : car il y a bien quelque chose qui limite les possibilités pour un signe ou une expression de symboliser un nombre, même si ce n'est pas la simple notation. Ce que la singularité des travaux de Boole montre, c'est que, du seul fait de la multiplicité des principes symboliques de la répétition – multiplicité qui se confond avec celle des opérations dans le système –, le problème du nombre ne saurait se réduire à la question de la notation d'aucun de ces principes *pris isolement*. Il porte, plus profondément, sur le *rapport entre ces régimes multiples de notation de la répétition opératoire*. Ce qui dans ce cadre veut dire : comme un rapport entre les régimes disparates de répétition du signe. Si chacune de ces notations peut donc être arbitraire, leur relation ne saurait l'être.

Boole essayait d'expliquer lui-même cette différence de régimes de manière encore spéculative à partir de la notion d'unité, en distinguant un régime de répétition de l'unité et un régime d'analyse de l'unité. Mais sans avoir besoin de faire appel au prétendu sens de ces symboles, la disparité entre les deux régimes se laisse capturer au niveau même du fonctionnement itératif des signes institués par les lois respectives. Ainsi, on peut voir que l'absence d'une loi des indices explicite pour l'addition fait que les signes qui y sont soumis fonctionnent de telle sorte que la répétition de l'application de cette opération sur eux engendre, en principe, à chaque fois une signification nouvelle. En effet, en comprenant logiquement le signe d'égalité comme identité de signification, on a :

$$x \neq x + x \neq x + x + x \neq \cdots;$$

ou en utilisant la notation des coefficients :

$$1x \neq 2x \neq 3x \neq \cdots$$ [300]

D'autre part, l'établissement d'une loi des indices pour la multiplication du type $x^n = x$ limite le nombre des significations nouvelles susceptibles d'être engendrées par répétition de l'opération sur les signes, et oblige la suite virtuellement infinie des répétitions à se distribuer cycliquement dans l'ensemble fini des significations ainsi déterminé. De cette façon, si l'on

[299] Qu'il suffise de penser à « $7x$ »…

[300] Pour tout *x* non nul, bien entendu.

prend par exemple la loi $x^4 = x$, on aura que les signes « x », « xx » et « xxx » – ou en utilisant la notation des indices : « x », « x^2 » et « x^3 » – seront susceptibles de recevoir des significations différentes, mais $x^4 = x$, $x^5 = x^2$ et $x^6 = x^3$. Si l'on continue les répétitions, on peut voir que :

$$x = x^4 = x^7 = x^{10} = x^{13} = \cdots$$
$$x^2 = x^5 = x^8 = x^{11} = x^{14} = \cdots$$
$$x^3 = x^6 = x^9 = x^{12} = x^{15} = \cdots$$ [301]

De sorte qu'une telle loi des indices instaure un nombre fini (trois dans ce cas[302]) de significations pour un signe, significations auxquelles l'ensemble potentiellement infini des utilisations ou des applications de ce signe sera obligé de se réduire.

La première chose qu'il faut noter, c'est que les signes numériques utilisés ici ne constituent pas à proprement parler des *nombres*. C'est bien là tout le problème. Ils constituent uniquement des *marques de répétition*, comme Boole l'avait bien compris dès ses premiers travaux mathématiques. Autrement dit, le signe « 2 » comme marque de la répétition de l'addition dans « $2x$ » n'a, *en principe*, aucun rapport avec le signe « 2 » comme marque de répétition de la multiplication dans « x^2 » (on aurait aussi bien pu utiliser des signes différents dans chaque cas, « 2 » et « b » respectivement, par exemple). C'est précisément lorsqu'un tel rapport entre ces deux principes sémiotiques de répétition pourra être établi, que l'on pourra songer que quelque chose comme un nombre pourra prendre corps dans un système de signes. On peut voir cette circonstance fondamentale à l'œuvre dans la façon dont un système de numération exige la mise en place des deux principes sémiotiques à la fois : d'une part un ensemble limité de signes (de 0 à 9 dans notre système décimal), d'autre un principe de différenciation présupposé capable d'aller à l'infini (la position de droite à gauche déterminant dans notre système de numération positionnelle successivement les unités, les dizaines, les centaines…)[303]. Or ce que le décalage entre les deux opérations dans le système de Boole permet de révéler, c'est précisément qu'un tel rapport est loin de posséder l'évidence qu'on a l'habitude de lui accorder. Ce qui importe pour l'instant, c'est qu'avant de se résoudre et de se rabattre réciproquement l'un sur l'autre par un système plus ou moins complexe de correspondance réglée, ces deux lois constituent deux principes strictement sémiotiques,

---

[301] Et en général, pour $x^n = x$ on a $x^{k(n-1)+a} = x^a$, avec k entier, et $a \leq n - 1$

[302] Et plus généralement, $n - 1$ pour une loi $x^n = x$.

[303] Bien entendu, les multiples systèmes de notation des différentes cultures dans l'histoire comportent de spécificités et des subtilités fort significatives par rapport à ces principes très élémentaires. Pour un examen très détaillé des différents systèmes de notation des nombres dans l'histoire, voir le livre remarquable de Cajori (1993). Dans l'ensemble de notre travail nous nous référerons de manière privilégiée à notre système de notation arabe, qui est celui que les mathématiciens que nous analysons ont effectivement pratiqué, et qui constituait l'objet et le support presque exclusif de leur réflexion sur les nombres.

c'est-à-dire qu'elles définissent la façon dont un signe doit être envisagé en tant que signe. Dans un cas la loi met en œuvre une répétition *indéfinie*, où chaque instance de la répétition comporte quelque chose de nouveau par rapport à toutes les précédentes ; dans l'autre elle instaure une répétition *cyclique*, où les instances de la répétition sont censées elles-mêmes se répéter au bout d'un certain cycle. On remarquera que la répétition cyclique recèle un principe de répétition indéfinie, dans la mesure où les instances se répètent indéfiniment à travers les cycles. De ce point de vue, la répétition indéfinie peut être vue comme une répétition cyclique de cycle 1. Mais elle pourrait aussi bien être envisagée comme une répétition cyclique de cycle infini. Ces croisements constituent sans doute la raison par laquelle une stabilisation et un accord entre les deux régimes de répétitions est possible. On ne déduira pas de ces croisements la possibilité de réduire l'un des principes à l'autre. Car du point de vue du type de la signification des signes qu'ils supportent et animent, ils restent parfaitement divergents. D'une part, la répétition indéfinie détermine un signe qui ne peut pas être répété sans que sa signification ne change ; de l'autre, la répétition cyclique détermine un nombre fini de significations différentes dans lesquelles les multiples occurrences du signe se distribuent.

Si cette hétérogénéité sémiotique constitutive du nombre reste dissimulée dans la pratique ordinaire de l'Arithmétique, c'est dans la mesure où la définition de la multiplication par la répétition de l'addition institue une continuité naturelle tout au long d'une expression comme :

$$3+3+3=3\times 3=3^2,$$

(puisqu'on retrouve le « nombre » 9 aux deux extrêmes). Mais l'Algèbre logique construite par les successeurs de Boole escamotera néanmoins ce point fondamental, par l'instauration d'une autre continuité, celle par laquelle on retrouve le même terme symbolisé par « x » aux deux extrêmes de l'expression :

$$x+x=x\times x.$$

L'écart introduit par Boole comme conséquence de la polyrythmie résultant de la cohabitation dans le système de deux régimes de répétition divergents viendra pourtant révéler cette circonstance qui fait de l'Arithmétique et du nombre en tant qu'existence symbolique, non pas un problème de notation, mais de *structure*. En effet, si l'on s'en tient aux déterminations booléennes de la répétition, la continuité d'une expression comme $3+3+3=3\times 3=3^2$ se trouve quelque part brisée, dans la mesure où, regardé comme expression numérique, l'on trouve le nombre 9 à l'extrême gauche de l'expression (ou plus précisément, 3 exemplaires de 3), tandis que l'on trouve le nombre 3 à l'extrême droite, à cause de sa célèbre loi des indices. Ce « quelque part » où la continuité se brise est d'ailleurs aisément identifiable : c'est exactement à la place de « 3×3 » que la rupture se produit. Cette discontinuité met en évidence que la multiplication comme expression de la répétition de l'addition, et la multiplication comme opération dont l'exponentiation exprime la répétition, ne coïncident que par un système complexe de correspondances structurales qui, sans être entièrement arbitraire, est pourtant loin d'être naturel ni exclusif. C'est entre la naturalité du nombre propre aux définitions ordinaires des opérations arithmétiques, et la simplicité d'un système qui se croit libéré du nombre pour l'avoir réduit à son degré zéro, que Boole insère un coin, à force de maintenir la cohabitation paradoxale de ces deux principes dans un même système de signes, un coin dont les effets subtils mais non moins décisifs rendent au problème logique du nombre le degré de positivité qui lui était propre.

Certes, dans le système de Boole, l'expression $3 + 3 + 3 = 3 \times 3 = 3^2$ n'a aucun sens (ou du moins, aucun sens *logique*), puisque les termes logiques, dont on exige l'observation de la loi $x^2 = x$, ne sont pas susceptibles d'être interprétés selon la signification arithmétique ordinaire du nombre 3. Le paradoxe associé à l'expression « $9 = 3$ » est dès lors évité au moyen de l'acceptation implicite mais autorisée d'une distinction sémiotique au niveau des éléments du système. Ainsi, l'expression « 3×3 », point même où la continuité se rompt, ne se laisserait pas symboliser sous la forme « $x \times y$ », où x et y seraient inscrits sur un même plan symbolique, pouvant donc s'avérer être égaux, et réclamant dès lors l'application de la loi des indices pour la multiplication. La symbolisation serait en revanche du type « $m \times x$ » ou « mx », où une différence entre les signes du type « m » et ceux du type « x » est présupposée, soit quant à leur nature, soit quant à leur façon de signifier : « m » renverrait à des coefficients en tant que termes numériques, tandis que « x » symboliserait des termes logiques. On se souvient que Woodhouse et Babbage s'étaient déjà heurtés à des asymétries de cette nature[304]. Le fait que le système de Boole continue à dépendre des distinctions, même (et surtout) implicites, que ces asymétries réclament, trahit une fois de plus que Boole n'a pas entièrement adopté la radicalité de la direction algébrique impulsée par les successeurs de ces premiers mathématiciens, et par Gregory en particulier. La persistance souterraine de ces asymétries dans l'espace de l'Abstraction symbolique permet de soulever dans le cadre du système logique, des problèmes essentiels tenant à la fois au contenu logique, et au sens de l'Arithmétique. Mais pour les mêmes raisons, les exigences que nous voyions se profiler à partir des formulations de Babbage acquerront une urgente actualité : soit l'homogénéisation de la nature signifiante des symboles, soit la prise en charge explicite de cette différence sémiotique en tant que différence tant logique qu'ontologique.

La première solution sera celle des Booléens. Elle accomplira l'exclusion du nombre hors du champ de la logique (ou plus précisément sa réduction à son degré minimal

---

[304] Voir *supra* p. 169 et II.4.2.

d'existence), suivant la direction imposée par l'Abstraction symbolique. Exclusion dont le sens logique sera celui de l'exclusion du contenu, au nom de l'abstraction des formes à partir desquelles la logique mathématisée pourra enfin s'exprimer de manière consistante. La seconde voie sera empruntée par Frege, laissant une place à une complexité qui obligera à abandonner l'Abstraction symbolique comme espace de sémiotisation dans lequel une logique formelle aurait à se développer, appuyé, comme nous l'avons aperçu dans la première partie de ce travail, sur une certaine interprétation de l'Arithmétique en tant que langage. Toutefois, bien que Boole ne soit pas arrivé à la version épurée de son système, contrairement à ses héritiers, ni au développement de son intuition, contrairement à leurs antagonistes, c'est grâce à ses travaux, en tant que première mathématisation générale de la logique, et à cause de la manière singulière dont cette formalisation du sens a été menée, que nombre et contenu logique se sont trouvés intimement associés par la première fois dans le processus de formalisation du sens. Ce qui veut dire que le problème du contenu logique et celui du statut de l'Arithmétique se trouvent constitués, dès la naissance du processus de formalisation du sens, comme un seul et même problème.

III.2.2. La différence numérique

Dire que Boole n'est pas arrivé à établir une intégration du nombre et du contenu dans un système logique cohérent est une autre façon de dire que les multiples aspects sémiotiques liés spécifiquement au nombre se manifestent chez lui dans toute leur dispersion. Le nombre en tant qu'être symbolique est présent dans son système, mais il se présente profondément éclaté. La dualité engendrée par les opérations (tant mathématiques que symboliques) de multiplication et d'addition, et la disparité des régimes de répétition sont précisément des dimensions de cette dispersion. Elles se prolongent dans une hétérogénéité des principes de différenciation pour aboutir à une double figure du contenu.

Commençons par l'itération de l'addition comme régime de répétition indéfinie, instaurant une signification différente pour chaque occurrence d'un signe. Pour fixer les idées et interroger ce fonctionnement au niveau de ses effets de signification, au lieu de prendre un symbole littéral, prenons l'exemple d'un signe simple que Boole saura prendre et que Frege saura justement problématiser[305]. Soit donc le signe « $cheval$ ». Soumis au régime de

[305] Cf. Boole (1848b, pp. 3, 6-7) et Frege (1882b, pp. 64-65), (1884/1969, pp. 150, 152, 180) et (1892, pp. 130-132).

répétition indéfinie, il ne saurait y avoir deux occurrences[306] d'un signe sans qu'une différence de signification ne se produise. Les coefficients numériques viennent dès lors marquer symboliquement cette différence. En utilisant la notation des coefficients propre à la notation additive de cette loi, on aura ainsi :

$$cheval$$
$$2cheval$$
$$3cheval$$
$$4cheval$$
$$\ldots$$

de telle sorte qu'à chaque signe ainsi produit répond une signification différente. Or la question se pose de savoir ce que signifie le signe numérique qui viendra, sous la forme d'un coefficient, à la fois abréger l'expression comportant des signes « $+$ » et qualifier les symboles sur lesquels l'itération de l'addition porte. Autrement dit, qu'est-ce que « $2cheval$ » veut dire, en tant qu'à la fois abréviation de « $cheval + cheval$ », et affectation par le signe « 2 » du symbole « $cheval$ » ?

Certes, nous savons déjà que pour Boole de telles expressions ne veulent tout simplement rien dire ; dépourvues de signification, elles ne constituent qu'une excroissance sémiotique insignifiante, mais utile pour arriver à des résultats corrects une fois éliminés les éléments problématiques au moyen de méthodes analytiques. Mais l'insignifiance de telles expressions est due moins à l'immotivé de leur présence dans le système logique qu'à l'incapacité de celui-ci à intégrer la multiplicité des dimensions significatives mobilisées par la motivation après tout bien logique de cette présence. Car comme nous l'avons montré, si Boole décide de ne pas conjurer ces expressions problématiques adoptant la loi $x + x = x$, c'est pour garder à l'intérieur du système ne serait-ce qu'un principe de forme logique du contenu. Dès lors, l'analyse de la multiplicité éclatée des significations fragmentaires atteintes par ces expressions comporte un intérêt majeur pour la compréhension des mécanismes intrinsèques au processus de formalisation du sens, et du lien entre nombre et contenu logique tout particulièrement.

Quels types de significations tendraient donc à comporter, bien que d'une façon insuffisante, une expression comme « $2cheval$ » ? Il faut d'abord rappeler que l'expression « $2cheval$ » constitue avant tout une *notation*. Autrement dit, il ne faut pas oublier que pour

---

[306] Cette différence significative n'est attribuable qu'aux occurrences d'un même signe *dans le contexte d'une addition*, puisque c'est dans ce contexte uniquement que le régime de répétition indéfinie est valable. Ainsi, par exemple, dans une expression logique comportant trois occurrences du signe x sous la forme suivante : « $x(x + x)$ », la différence significative induite par la loi de répétition ne porte que sur les occurrences de x connectées par l'addition à l'intérieur de la parenthèse.

Boole « 2cheval » est introduit comme l'abréviation de « $cheval + cheval$ », exprimant la répétition de l'opération d'addition. Or, dans un tel système de notation exprimant le fait que la répétition de l'addition fournit, suivant une loi (implicite), une signification nouvelle à chaque fois ($x \neq x + x \neq \cdots$), les coefficients veulent se comprendre comme des *marqueurs d'individualité* (à la façon dont sont habituellement employés les indices des variables en mathématiques – « x_0 », « x_1 », « x_2 » renvoyant à trois valeurs particulières de la variable *x*). Autrement dit, « $2cheval$ », « $3cheval$ », « $4cheval$ », en tant que simples signes produits par un tel système de notation, seraient la marque de la présence d'individus différents appartenant à la classe des chevaux. Cette conception coïncide avec l'interprétation de l'addition souvent donnée par Boole pour les classes : lorsque dans un même contexte je dis « cheval et cheval et cheval », ou aussi « cheval ou cheval ou cheval »[307], le mot « cheval » est à chaque fois censé renvoyer à des chevaux différents. Dès lors, un système de notation capturant l'engendrement d'une signification nouvelle pour chaque répétition d'un signe se révèle adéquat, voire nécessaire, pour résoudre l'ambiguïté ; l'emploi des signes numériques renverrait ainsi vaguement à la dimension ordinale du nombre (le premier cheval, le second, le troisième…), qui viendrait de cette façon réparer le manque de spécification d'un signe. Un tel fonctionnement rapprocherait l'utilisation des signes numériques de celle des *noms propres*, en tant que marques des individus, signes immédiats des choses concrètes, capables de prendre la place de celles-ci dans l'espace articulé des formes du langage logique. Cette interprétation s'accorderait d'ailleurs avec la conception que les algébristes anglais s'étaient toujours faite des nombres (en tant que marques dépourvues de toute généralité).

Pourtant, les limites d'une telle interprétation dans le cadre de la logique mathématisée de Boole se révèlent aussitôt. Car les signes numériques ne viennent pas marquer chaque occurrence indifférente d'un signe dans l'expression d'une addition répétée. Autrement dit, on n'a pas :

$$cheval + cheval = 1cheval + 2cheval$$

(ou si l'on préfère : $cheval_1 + cheval_2$), mais :

$$cheval + cheval = 2cheval.$$

Mais si le caractère opératoire que Boole attribue après tout aux signes numériques empêche d'adopter la première de ces égalités (car il faudrait dès lors conclure que $cheval + cheval = 3cheval$, avec l'ensemble des conséquences fâcheuses qui peuvent en découler), on ne voit pas par quel moyen la répétition de l'addition sur un symbole conceptuel engendrerait un nom propre particulier, tel que l'exigerait la seconde égalité dans le cas où « $2cheval$ » serait

[307] Cf. Boole (1854, pp. 32-33)

conçu comme tel (car l'expression « $cheval + cheval$ » serait toute entière le nom du second cheval dans un certain contexte).

Ce ne sont pas d'ailleurs les seuls inconvénients attachés à la compréhension des coefficients numériques booléens en termes de signes d'individus ou noms propres. Car d'une part, une expression comme « $2cheval$ » est loin d'être douée de la rigidité signifiante (ou référentielle) selon laquelle un nom propre est censé fonctionner. En effet, si le signe « Bucéphale » est censé renvoyer à un cheval singulier parmi l'ensemble d'innombrables chevaux passés, présents et futurs, l'expression « $2cheval$ » est adéquate en revanche à toutes les situations où a lieu la répétition de l'opération d'addition sur la classe des chevaux (quel que soit le sens d'une telle répétition). Ensuite, même dans le cas d'un même contexte, l'expression « $2cheval$ » n'est pas capable d'identifier de manière stable les individus dont elle serait la marque. Soit par exemple l'expression :

$$cheval + cheval + cheval.$$

Cette répétition se laisse exprimer, soit par commutativité, soit par associativité, comme :

$$2cheval + cheval,$$

ou comme :

$$cheval + 2cheval$$

Or, à supposer que la situation comporte trois individus de la classe des chevaux, l'expression « $2cheval$ » ne saurait jamais déterminer lesquelles parmi ces trois sont attachées à sa signification. Enfin, à la différence des noms propres ou des marques immédiates des individus, qui se placent à l'extrémité d'une chaîne (éventuellement infinie) de spécifications conceptuelles[308] (« Bucéphale » n'étant que le nom de l'individu sélectionné par l'ensemble des concepts qui permettraient d'identifier le cheval d'Alexandre le Grand par rapport à tout autre cheval), la spécification opérée par les signes numériques sur les symboles conceptuels peut avoir lieu à n'importe quel niveau de spécification ou de généralité. Bref, les signes numériques ont beau être ici des expressions indiquant la présence d'individus, ils ne parviennent pourtant pas à être des *indices* d'individus à proprement parler.

On pourrait essayer de contourner ces difficultés en envisageant, en revanche, l'expression « $2cheval$ » comme voulant dire « deux chevaux ». Autrement dit, faute de constituer des noms propres à partir des signes numériques, on envisagerait le signe numérique lui-même comme un nom commun, plus précisément comme un adjectif numéral, ce qui dans le cadre du système de Boole veut dans tous les cas dire un *concept* ou une classe. Cette interprétation permettrait de se débarrasser des incohérences liées aux noms propres des

[308] Cf. Boole (1847, p. 5).

individus (« $cheval_2$ » ? « $cheval + cheval$ » ?), en remplaçant leur nomination par une détermination conceptuelle (numérique), obéissant aux lois opératoires des symboles électifs au moyen desquelles le système booléen capture le fonctionnement des concepts. En tant que telle, cette détermination se trouve exemptée de la rigidité référentielle propre aux signes d'indication, soit dans le cas des différents couples de chevaux signifiés par « $2cheval$ » dans des contextes différents, soit pour la détermination d'un couple quelconque dans le contexte d'une multiplicité plus grande d'individus appartenant à la classe *cheval*. Enfin, comme toute détermination conceptuelle, elle peut avoir lieu à tous les niveaux de généralité, tout en signifiant à chaque fois quelque chose de l'ordre de l'individualité. L'interprétation des signes numériques en termes de concepts numériques se présente d'ailleurs comme la plus naturelle, et celle qui répond de manière intuitive à la lecture d'une expression comme « $cheval + cheval = 2cheval$ ».

Et pourtant une telle interprétation comporte elle aussi des difficultés qui la rendent inacceptable pour le fonctionnement cohérent du système logique où elle doit recevoir leur sens. À commencer par le fait que, comme Boole le dit lui-même, les coefficients numériques ne répondent aucunement à la condition élémentaire des concepts logiques dans son système, à savoir $x^2 = x$. De plus, la signification des symboles conceptuels booléens est toujours déterminée par l'extension de la classe correspondante comme quelque chose qui demeure à l'extérieur du système de symboles, et que celui-ci ne peut atteindre que par « interprétation ». Face à eux, le concept numérique issu des coefficients numériques, dans la mesure où l'apparition de ces coefficients résulte directement des mécanismes internes du système (comme le développement des fonctions logiques, par exemple), viendrait signifier ou renvoyer à la dimension opératoire du système par laquelle les coefficients sont engendrés. Sa nature serait donc profondément différente de celle du reste des concepts ordinaires du système. Et certes, la capacité de produire des significations de manière immanente est tout ce que l'on pourrait espérer d'un principe de contenu dans un système logique, comme celui que semble vouloir réaliser la présence des signes numériques. Mais on voit mal comment par un processus opératoire semblable résulterait la détermination du nombre d'individus appartenant à une classe. Après tout, la raison par laquelle les coefficients numériques finissent par être éliminés des équations logiques est que, par la manière dont le développement des fonctions logiques les fait apparaître, ils affectent toujours des termes vides, c'est-à-dire des classes auxquelles aucun individu n'appartient[309]. Si bien que, même si l'on accepte le risque de prendre pour un concept ce qui n'est introduit que comme une

[309] Voir *supra*, p. 278.

abréviation, le concept numérique résultant ne saurait être connecté de manière directe avec le nombre d'individus correspondant aux différents concepts du système.

III.2.2.1. Des propositions numériquement définies

Que les coefficients numériques ne soient, ni ne cherchent pas à être, dans le système de Boole, de véritables *concepts* numériques, cela n'apparaît nulle part plus clairement que dans un court article que Boole rédigea dans la période entre *The Mathematical Analysis…* et *The Laws of Thought*, probablement vers 1850[310], portant sur les propositions numériquement définies (Boole, 1871). Boole ne publia pas cependant cet article de son vivant, et c'est De Morgan qui le communiqua après la mort de Boole, en 1868. On peut imaginer les raisons de l'un et de l'autre pour agir ainsi. De Morgan pouvait certainement voir dans ce travail un rapprochement, voire une reconnaissance et une confirmation de ses propres travaux (Boole évoque l'ouvrage *Formal Logic* de De Morgan dès la première page, et De Morgan lui-même s'occupe de remarquer que le texte a été rédigé après la publication de son ouvrage). En revanche, l'ensemble des difficultés liées aux multiples registres de signification à travers lesquels la notion de nombre circule constitue une raison suffisante pour que Boole ait décidé la non publication de ces pages[311].

Comme son titre l'annonce, « Of Propositions numerically definite » traite la question des propositions déterminées numériquement, c'est-à-dire, comme Boole les définit dès le début, des propositions qui véhiculent « une assertion concernant le nombre d'individus contenus dans une classe » (p. 396). Le fait que les propositions numériques envisagées soient « définies » (*definites*) exclut les déterminations quantitatives du type « la plupart » ou « deux tiers », et rend la question du concept du nombre incontournable. Le problème des propositions logiques déterminées numériquement est alors posé par Boole dans les termes suivants :

> There appear to be two general questions suggested by a consideration of the above. First. Does there arise a general method to which the treatment of all systems, propositions involving any and whatsoever amount of numerical definition, may be referred? Secondly.

[310] D'après ce qu'indique Rhees dans Boole (1952).

[311] Hailperin pense que cet article est le texte perdu dont Boole parle dans la partie consacrée aux probabilités dans *The Laws of Thought* (Hailperin, 1986, p. 129) et Dummett (1959) rapporte lui aussi ce texte au travail de Boole sur les probabilités. Bien que les techniques utilisées par Boole pour traiter la question des probabilités soient de même nature, il nous semble que le problème qui informe l'article de 1850 n'est absolument pas le même.

> Are the ordinary conclusions of logic to be considered as limiting cases of the results of any such general method? (Boole, 1871, p. 397)

A supposer qu'il existe une telle méthode générale, la tâche de la logique serait, ainsi que Boole la définit aussitôt, de déterminer les limites numériques à l'intérieur desquelles se trouverait le nombre d'individus d'une classe quelconque à partir d'autres classes données. Ce problème, ajoute Boole, « admet une solution complète et générale » (p. 397). Mais ce qui nous intéresse ici, c'est moins la solution à ce problème, que les moyens symboliques que Boole se voit obligé de déployer pour l'établir. Ces moyens diffèrent de ceux que De Morgan avait imaginés lui-même avant Boole. En effet, comme il a été dit, De Morgan avait déjà traité cette question, lui consacrant même un chapitre entier dans son ouvrage majeur *Formal logic*. Les propositions numériquement définies y sont envisagées comme des propositions douées d'un degré d'exactitude plus élevé quant à leur description, quoique pas assez pour que les individus concernés par la proposition numérique soient à tel point identifiés qu'ils ne pourraient pas être autres, comme dans le cas d'un nom propre (De Morgan, 1847a, pp. 141-142). La détermination numérique s'accomplit alors par l'ajout d'un signe numérique à gauche des symboles des classes :

> A numerically definite proportion is of this kind. Suppose the whole number of Xs and Ys to be known: say there are 100 Xs and 200 Ys in existence. Then an affirmative proportion of the sort in question is seen in '45 Xs (or more) are each of them one of 70 Ys': and a negative proportion in '45 Xs (or more) are no one of them to be found among 70 Ys.' (De Morgan, 1847a, p. 142)

Une fois ces expressions introduites, les signes numériques particuliers sont rapidement substitués par des lettres minuscules indiquant des nombres de façon générique (par exemple : « *m*X » et « *n*Y », où *m* et *n* indiquent des signes numériques différents). Pourtant, ces signes, même sous leur expression indéterminée comme dans « *m*X », n'arrivent pas à se placer au même niveau que les symboles logiques qu'ils qualifient. C'est pourquoi De Morgan se voit obligé de remarquer que le symbole logique « X » est *distributif*, puisqu'il fonctionne comme un nom capable d'être attribué à chacune des « instances de ce nom », tandis que le symbole « 10 X » est *collectif*, car il s'applique à dix instances de X considérées comme un tout ; uniquement dans le cas où ce collectif est isolé du reste des Xs, le symbole « 10 X » devient « un nom pour chacun des dix, autant que X, et peut être considéré comme un terme universel » (1847a, p. 144).

On voit donc à quel point De Morgan rencontre les mêmes difficultés que nous avons soulevées chez Boole concernant le fonctionnement des signes numériques comme des termes logiques : leur façon de signifier n'arrive pas à se fixer, et hésite entre le nom propre (défaillant parce que collectif et indifférent aux individus) et le nom commun (dont la condition d'effectivité demeure externe à la signification – séparation du collectif – et sanctionne du même coup la stérilité du signe numérique – car une fois le collectif séparé, « 10 X » veut dire la même chose que « X »).

Or, si au moment d'affronter cette question des propositions numériquement définies Boole contourne ces difficultés, c'est précisément dans la mesure où la symbolisation qu'il met en œuvre pour le traitement de ce problème fait l'économie des signes numériques. À la place de ces signes (ou même des lettres censées les indiquer, telles « m » ou « n »), il introduit un unique opérateur *N* censé s'appliquer aux termes logiques et à leurs différentes combinaisons, et qu'il définit de la manière suivante :

> By the letter *N* prefixed to any expression representing a class or group of individuals howsoever constituted, I understand the number of individuals contained in that class or group. (Boole, 1871, p. 397)

Ainsi, le symbole « *Nx* » signifie le nombre d'individus contenus dans la classe *x*, tout comme « Nxy », « $N(x+y)$ » et « $N(x-y)$ » renvoient respectivement aux nombres d'individus des classes correspondantes (xy, $x+y$ et $x-y$ respectivement) (pp. 397-398). Boole exprimera ce renvoi sous la forme « $Nx = p$ », où p est censé indiquer le nombre en question. Enfin, le caractère opératoire de *N* se trouve gouvernée fondamentalement par l'équation :

$$NP \pm NQ \pm NR \ldots = N(P \pm Q \pm R \ldots),$$

où P, Q, R… sont des fonctions logiques des classes. Les questions concernant la teneur numérique des propositions logiques trouveront donc une solution à partir du développement de ces fonctions en constituants, et de l'application de l'opérateur numérique selon ses règles opératoires, auxquelles Boole ajoute une règle concernant précisément les coefficients numériques, sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir, à savoir que tout terme du type « *Nat* » issu du développement d'une fonction logique (où t est un constituant et a un coefficient numérique), doit être interprété comme « *aNt* » (p. 398).

Ce n'est pas la peine de nous attarder sur les détails de la méthode proposée par Boole dans cet article[312]. Ce qui doit nous intéresser, en revanche, c'est que, par la symbolisation qu'il propose, Boole arrive non seulement à contourner les difficultés attachées à la notation numérique de De Morgan, mais plus profondément il arrive à concéder au nombre une sorte de généralité conceptuelle dans la logique. En effet, à la différence des chiffres et des signes littéraux employés par De Morgan pour symboliser les nombres, l'opérateur *N* est unique et invariable ; là où De Morgan était obligé d'écrire « *m*X » et « *n*Y » pour indiquer le nombre d'individus des classes X et Y respectivement, un seul symbole accomplit la tâche chez Boole

[312] A part l'article de Boole lui-même, on pourra consulter Hailperin (1986, §1.12) pour une brève description et commentaire de la méthode proposée par Boole dans ce texte.

(*Nx* et *Ny* respectivement). Cela permet que les règles opératoires du nombre correspondant à une classe soient explicitées de la même façon que pour le reste des symboles logiques, et de ce point de vue au moins, le nombre acquiert une existence symbolique et conceptuelle certaine dont les algébristes anglais l'avaient toujours privé[313].

De cette façon, en plus d'être présent dans le système de Boole sous les différentes formes que nous avons signalées jusqu'ici, le nombre se trouve également *représenté* par son inscription dans la dimension strictement symbolique. Mais il ne faut pas se tromper : si l'opérateur *N* constitue bien un symbole déterminé par des lois comme le reste des symboles du système, il ne constitue pas un concept à proprement parler dans le contexte de la logique booléenne. Et cela pour une raison fondamentale : *il ne saurait déterminer une classe*. C'est pourquoi le symbole *N* n'a de sens que dans la mesure où il porte sur d'autres symboles logiques déterminant eux-mêmes des classes. On sait à quel point Frege croira avoir résolu le problème logique du nombre lorsqu'il aura trouvé la façon de déterminer une classe capable de correspondre à un terme conceptuel portant lui-même sur des concepts. Mais ce problème n'est pas encore celui de Boole. Ce qu'il faut retenir pour l'instant de ces formulations, c'est que lorsque la question du nombre d'individus correspondant à un concept se pose de façon ouverte et explicite, *Boole prend bien soin de ne pas l'aborder au moyen des signes numériques*, malgré le fait que ce fût là l'un des sens qui s'offrait pour les coefficients numériques qu'il avait décidé d'admettre dans son système, et que c'était précisément celui que De Morgan avait retenu au moment de traiter cette question en profondeur. Inversement, on aurait tort de croire que l'opérateur *N* que Boole propose dans cet article – et il ne faut pas oublier qu'après tout il a voulu le laisser inédit – viendrait capturer avec son bon fonctionnement ce que les coefficients numériques n'étaient capables que de suggérer très imparfaitement. Pour une raison au moins : les coefficients numériques ne disparaissent pas lors de l'introduction de l'opérateur *N* ; bien au contraire, ils s'intègrent avec lui, comme le montre l'existence de la règle $Nat = aNt$. C'est dire à quel point Boole refuse le statut conceptuel des signes numériques renvoyant au nombre d'individus compris dans une classe, que nous avons avancé comme la possibilité la plus plausible d'avoir un sens face à l'échec de leur fonction purement indicative.

[313] Jevons reprendra la solution de Boole, en proposant le symbole « (A) », dans un article intitulé « *On a General system of numerically definite reasoning* » (1870). On pourra voir aussi la conception avancé par Macfarlane (1879) sur cette question, qui ne propose pourtant aucune symbolisation.

III.2.2.2. La nature expressive des signes numériques

Ni *indices* individuels, ni *symboles* conceptuels, les signes numériques errent ainsi à l'intérieur de l'espace mathématique, sémiotique et logique déterminé par l'Abstraction symbolique. Chargés d'une fonction sémiotique provenant de leur fonctionnement mathématique, ces signes n'arrivent pourtant pas à trouver le statut logique qui leur permettrait de déterminer de façon précise leur signification. Ils ne sont pas entièrement dépourvus de sens pour autant. Nous avons vu que, tant par ce qui justifie leur présence dans le système, que par les effets qu'ils y produisent aux différents niveaux, ces signes touchent à une multiplicité de dimensions signifiantes. Seulement, la multiplicité dispersée de ces effets signifiants n'arrive pas à trouver dans l'organisation de l'Abstraction symbolique la forme unifiée capable de les cristalliser comme des éléments logiques. Réfractaire aux indices individuels, contre lesquels elle a bâti la généralité de ses symboles, l'organisation de l'Abstraction symbolique se montre incapable d'assumer les effets d'un fonctionnement qui produit des significations singulières à chaque répétition d'un symbole. La difficulté d'une incorporation des signes d'individualité s'aggrave du fait du caractère opératoire qui les engendre, les investissant d'une généralité symbolique problématique. C'est précisément par cette généralité que les signes numériques incarnent aussi des traits de conceptualité symbolique et sont susceptibles de produire des effets spécifiques à ce niveau de la signification également. Et pourtant, l'étrange généralité des signes numériques ne saurait non plus suffire à les stabiliser comme autant de symboles conceptuels définissant des classes, seule figure de la généralité signifiante que l'Abstraction symbolique se trouve en mesure d'admettre. L'Abstraction symbolique est bien en ce sens l'écho, dans l'espace des régimes sémiotiques, de l'Algèbre abstraite et de son rejet du nombre.

Ni indices, ni véritables symboles, les signes numériques, introduits comme effets de la répétition de l'addition dans l'espace de l'Abstraction symbolique, sont des *expressions pures*. Au sens le plus ordinaire[314] d'abord, celui par lequel on dit d'une certaine suite ou configuration de traits ou de marques qu'elle constitue une *expression* dans un langage, ou une *expression* logique, lorsqu'elle est reconnaissable d'après les éléments et les règles qui structurent le langage ou le système logique en question, et que de ce fait la question de leur signification se pose. Pourtant, si nous parlons d'expressions *pures*, c'est pour accentuer le fait qu'à cause de leur fonctionnement en tant que signes, elles n'arrivent pas à être rabattues sur les significations déterminables par le système, et leur sens semble s'épuiser dans leur

[314] Nous dirions volontiers « matériel » si la question de la matérialité des signes et des expressions ne posait pas d'innombrables problèmes.

présence en tant que simples signes. En tant qu'expressions pures, les signes numériques ne signifient ni n'indiquent rien dans le système booléen, mais ils *expriment* quelque chose par leur seule présence. Ce qu'ils expriment, d'abord, dans la mesure où leur présence est associée de manière constante et inévitable à leur insignifiance, ce sont les limites propres aux mécanismes de signification du système. Mais tant que cette présence continue à être posée comme nécessaire, comme c'est le cas chez Boole, cette nécessité détermine pour eux une expressivité d'un autre type, positive cette fois-ci.

Nous avons vu que les signes numériques témoignaient chez Boole d'une résistance à l'abstraction du contenu dans la logique, dans le sens encore vague où ils étaient l'effet de la volonté de Boole de garder à l'intérieur de son système une certaine efficacité de la forme des touts et des parties, typiquement attribuée à la matérialité ou aux objets. Un tel constat nous a permis d'avancer que les signes numériques étaient l'expression embryonnaire quoique positive du contenu logique pour lequel l'ordre de l'Abstraction symbolique ne prévoit d'autre place que celle de l'insignifiant. Or, par la restitution que nous avons réalisée des multiples effets de signification partiels, fragmentaires et inachevés, des signes numériques, cette affirmation peut être précisée. Non seulement par le fait purement négatif de constater les différents modes d'inadéquation des signes numériques aux mécanismes signifiants du système, mais aussi pour d'autres raisons. D'abord parce qu'un certain fonctionnement de ces signes veut qu'ils se comportent comme des indications directes des objets qui constituent le contenu des classes logiques, et que, par l'introduction d'un tel type de fonctionnement sémiotique, le système se rende capable d'accueillir intrinsèquement une forme logique du contenu. Mais plus profondément ensuite, parce que le fonctionnement des signes numériques, en raison avant tout de leur caractère opératoire, ne s'épuise pas dans leur vocation indicative, mais combine, en plus, de manière essentielle et indissociable, cette dimension d'indication avec les mécanismes propres à la signification conceptuelle, dont le système logique s'efforce d'établir et de contrôler les déterminations. Autrement dit, *sous les signes numériques, en tant qu'expressions du système logique, a lieu, de façon certaine quoiqu'encore confuse, un nouage intime entre structures d'indication et structures de signification.* Si bien que la présence des signes numériques incarnerait la possibilité pour le système, non seulement d'accueillir en son sein une forme du contenu des significations symboliques (c'est-à-dire, du contenu des classes) qu'il détermine, à savoir la forme du tout et des parties, mais aussi de déterminer intrinsèquement (logiquement) ce contenu comme effet de l'interaction entre les significations symboliques dont les signes numériques résultent.

Or, comme nous l'avons vu dans la première partie de notre travail, *c'est là tout ce que l'on attend d'une logique du contenu*. C'est d'ailleurs cela aussi que Frege reproche à la logique booléenne lorsque, derrière l'accusation d'abstraction, il dénonce non seulement l'absence d'une *lingua* (comme système général de désignation) en plus d'un *calculus* (des conséquences à partir des significations conceptuelles), mais l'incapacité de fournir un système qui soit la langue *d'un* calcul, non moins que le calcul *d'une* langue. Nous avons alors relevé la place essentielle que l'Arithmétique a occupé comme modèle privilégié d'un tel système, de Leibniz à Frege, en passant par Trendelenburg, suivant une évolution dans laquelle se nouait le lien entre Arithmétique et contenu. Mais si cette place était suggérée, voire postulée, dans la tradition logique allemande de façon principalement spéculative ou illustrative, du moins jusqu'aux travaux de Frege, elle se présente dans le contexte de la logique mathématisée des Booléens avec tout la puissance de ses effets formels. Seulement, dans la mesure où ce contexte est par essence hostile à la présence des signes numériques, ces effets ne peuvent apparaître que sous un mode problématique, qui les rend objets immédiats d'insignifiance et de ségrégation, mais dont nous devrons pourtant bien nous garder d'ignorer la positivité.

C'est en ce sens que nous pouvons affirmer que les signes numériques constituent dans le système de Boole des expressions, et que ce que ces expressions expriment, en plus des limites des mécanismes de signification du système, c'est le contenu comme détermination logique immanente. Non seulement ces signes expriment *des* contenus, particuliers et identifiables, mais ils sont aussi l'expression du contenu comme problème général susceptible d'être posé dans le cadre formel d'une logique mathématisée. Autrement dit, le contenu, ils ne peuvent l'exprimer que problématiquement, et comme la limite justement des mécanismes de production du sens du système qui les constitue en expressions. Lorsque ce problème du contenu trouvera avec Frege une solution spécifique qui supposera la modification du sol sémiologique organisateur de la pensée logique ainsi que de ses mécanismes et instruments, ce sera alors, et alors seulement, que la logique aura l'occasion de retourner le problème général du contenu en capacité positive de déterminer des contenus spécifiques. Ce sera alors aussi, comme on l'a vu, que les notions d'expression et de contenu feront apparition dans le langage de la logique, avec une effectivité nouvelle que les emplois principalement spéculatifs de la philosophie allemande ne laissaient pas soupçonner. Cette apparition, et les effets logiques associés à elle, entraîneront également, comme nous allons le voir, la nécessité d'introduire des nouvelles distinctions essentielles du point de vue des significations produites par un système logique. C'est pourquoi lorsque nous parlons de fonction *indicative* ou de *signification* conceptuelle, ou encore de la place *expressive* des signes numériques dans le système de Boole, ces qualifications ne sauraient échapper à l'anachronisme, puisqu'elles sont, en plus d'un sens, le résultat de la place problématique des signes numériques dans l'espace de la logique mathématisée. Si nous avons cependant eu recours à ces termes, c'est pour attirer l'attention sur la nature non entièrement négative de cette place d'après laquelle non seulement des opérations non conceptuelles sont présentées, mais des fonctions d'indication sont suggérées, et des principes de contenu logique sont mis à l'œuvre.

III.2.2.3. La différence numérique

La positivité des signes numériques ne s'arrête pourtant pas à l'expression abstraite d'un contenu logique. Car la façon par laquelle ces signes suggèrent cette place n'est ni abstraite ni générique ; elle est le résultat d'un fonctionnement précis et particulier. Ce qui veut dire que les signes numériques ne posent pas le problème du contenu logique dans le cadre d'une logique mathématisée sans offrir par là même des déterminations particulières pour ce contenu encore virtuel. Si un sens est à donner à ces signes, malgré leur insignifiance *symbolique*, ce sens se joue certainement dans ces déterminations particulières, qui donnent au problème du contenu logique quelque chose comme un principe formel de consistance, une certaine dureté, presque une objectivité. Mais de quelles déterminations s'agit-il ? Et comment les comprendre lorsque rien dans la configuration de l'Abstraction symbolique ne semble pouvoir les intégrer aux mécanismes de production de significations logiques ?

L'article de Boole sur les propositions numériquement définies suggère une voie. Nous avons vu que dans ce texte posthume, Boole symbolisait le nombre d'individus appartenant à une classe donnée au moyen du symbole opératoire N au lieu de faire appel aux signes numériques. Or, le choix d'un tel opérateur symbolique n'exclut nullement la présence des coefficients numériques dans les expressions logiques de son système. Bien au contraire, à la différence du reste des symboles conceptuels, auxquels ils restaient seulement adossés dans l'attente d'être éliminés du résultat final, les signes numériques s'intègrent parfaitement à l'opérateur N et comportent une fonction spécifique dans la détermination de son sens. Nous avons évoqué très rapidement que Boole prévoyait à cet effet la règle suivante : « interpréter tout terme *Nat* où *t* est un constituant et *a* un coefficient numérique, par *aNt* » (1871, p. 398). Ce qui veut dire que quand un constituant d'une fonction logique affecté d'un coefficient tombe sous l'action de l'opérateur numérique, le coefficient en question, jusqu'alors simple annexe sans effectivité, se met à affecter directement l'opérateur numérique et se voit ainsi investi d'une fonction positive. Pour comprendre cette opération il suffit de considérer l'exemple donné par Boole à cette occasion, ainsi que l'interprétation qu'il en fait :

$$\begin{aligned} Nx + Ny &= N(x+y) \\ &= N(2xy + x\,\overline{1-y} + y\,\overline{1-x}) \end{aligned}$$

$$= Nx\,\overline{1-y} + Ny\,\overline{1-x} + 2Nxy$$

> That is, on interpretation – The number of individuals in the class *X* together with the number in the class *Y* is equal to the number of individuals which are *X*s and not *Y*s, with the number that are *Y*s and not *X*s, and *twice the number* that are both *X*s and *Y*s. (Boole, 1871, p. 398, nous soulignons)[315]

Boole tient ainsi les coefficients numériques pour capables de multiplier le nombre d'individus qui constituent le contenu correspondant à une classe. Autrement dit, lorsqu'une classe, telle que xy dans l'exemple, est regardée du point de vue du nombre des individus qu'elle détermine, l'existence d'un coefficient numérique comme 2 entraîne la duplication de ce nombre. Tout se passe comme si les individus correspondant à cette classe devaient être comptés deux fois, comme si tout à coup ils se voyaient dupliqués sous l'effet même des coefficients ; ou plutôt, comme si cette étrange duplication ou multiplication ne pouvait s'exprimer autrement que dans et par des signes numériques. Ces coefficients n'arrivent pourtant pas à assurer cet effet de multiplication à eux seuls, mais uniquement lorsqu'un opérateur numérique comme *N* parvient à déployer une dimension de conceptualité entre eux et les symboles de classes qu'ils affectent. Ce n'est qu'à travers cette conceptualité qui leur fait toujours intrinsèquement défaut que le sens qu'ils recèlent devient effectif. Mais cette effectivité est après tout stérile. Nous avons déjà vu comment Boole découvrait avec étonnement que ces coefficients affectaient de manière générale des termes vides. C'est en particulier le cas dans l'exemple que nous venons de voir : la classe xy ne peut ici qu'être vide dans la mesure où elle est une composante de la classe $x + y$, et que l'opération d'addition, par la même raison qu'elle engendre des coefficients numériques, oblige à concevoir les classes *x* et *y* comme disjointes ou mutuellement exclusives.

Mais si l'effectivité des signes numériques est ainsi réduite, leur sens ne s'y trahit pas moins. Des contenus étant déterminés par des termes conceptuels, comme xy, les coefficients numériques constituent la marque d'une distinction, au niveau de ces contenus, irréductible aux déterminations conceptuelles. Autrement dit, *les signes numériques sont l'expression d'une différence non conceptuelle*. Mais en tant que tels, ils font beaucoup plus que renvoyer à cette instance qui, pour être définie négativement, risque de rester essentiellement indéterminée. Après tout, un tel renvoi pourrait être réalisé par n'importe quel signe. Les signes numériques ne sont pourtant pas des signes quelconques, et leur fonctionnement en tant que signes obéit à des lois spécifiques. C'est précisément à cause de ce fonctionnement que les signes numériques n'expriment une différence non conceptuelle qu'en déterminant cette

---

[315] La barre sur certaines expressions doit être lue comme une paire de parenthèses. Ainsi, « $\overline{1-x}$ » veut tout simplement dire « $(1 - x)$ ».

différence de façon précise et positive. Toute la question dès lors est de savoir quel type de différence la répétition de l'opération d'addition engendre au-dessous des significations. Or ce que leur fonctionnement dans le contexte des propositions numériquement définies nous montre, c'est que cette différence est déterminée comme ce que la philosophie – scolastique, mais pas uniquement – a généralement appelé : *différence numérique*. Autrement dit, les signes numériques, dans la mesure où leur sens est effectif, comportent des déterminations qui font que des contenus absolument indifférents du point de vue des concepts puissent être considérés comme différents du point de vue du nombre : identiques quant à leur signification, ils se distinguent pourtant par le seul fait d'être deux, trois ou plusieurs. C'est d'ailleurs ce qui se laisse comprendre dans l'expression de la loi sur l'addition qui donne naissance aux coefficients : $x + x = 2x$. Puisque l'addition est censée opérer sur des classes mutuellement exclusives, une expression comme « $x + x$ » n'a dès lors de sens dans le système qu'à condition que la distinction numérique des signes (le fait qu'il y ait deux signes « x ») signifiant un seul et même concept indifférent (une seule classe) soit pourtant considérée comme une différence effective dans le contenu. C'est donc de cette différence que le signe « 2 » est la marque, et c'est par cette détermination directe que les propriétés strictement sémiotiques agissent sur les contenus, court-cuitant la médiation de la signification conceptuelle. La distinction ou différence numérique vient ainsi poursuivre la détermination des contenus au-delà des limites de la puissance des significations conceptuelles. Mais elle ne la poursuit que par un effet de répétition du contenu, qui l'organise en unités discrètes. De ces unités, l'*individu* se dessine comme la figure ultime à la limite d'une chaîne indéfinie de déterminations conceptuelles.

Que cette dimension du contenu de l'autre côté de la limite des déterminations conceptuelles abstraites adopte la forme minimale mais précise des distinctions numériques, et reste présupposée dans la logique des Booléens, cela apparaît avec clarté lorsque Jevons argumente, contre Boole, en faveur d'une opération d'addition purement logique, détachée de toute détermination mathématique (c'est-à-dire, numérique) :

> In so far as three apples are exactly like each other, one could not be distinguished from the other. Were there three apples, or any three things, so perfectly similar in every way that we could not tell the difference, they would be but one thing, just as, by the law of unity before stated, $A + A + A = A$. But then we must remember that among the logical characters of a thing is its position in space with relation to other things, not to speak of its position in time. Now, when we speak of three apples, we mean three things, which, however perfectly same they may be in all other qualities, occupy different places, and are therefore distinct things. *In so far as they are same they are one; in that they are different they are three*. (Jevons, 1864/1890, p. 71)

On peut voir donc que, comme effet de sa loi d'unité $A + A = A$, la logique de Jevons ne trouve la différence numérique qu'en bordure, là où la spécification d'un concept fait défaut ou s'arrête, et où l'action de toute différence ultérieure ne peut que s'identifier avec la différence entre les « choses » elles-mêmes, dans leur existence actuelle dans l'espace et dans le temps. C'est en ce sens que l'on peut dire que l'action de la différence se poursuit au-delà des déterminations conceptuelles *en extension*, déterminant les choses qui assurent en dernière instance le contenu signifiant des concepts comme des unités individuelles.

Étrangement, cette différence numérique que l'intuition de Jevons a des raisons d'associer à l'espace et au temps, est ici posée par lui comme appartenant à la logique. Mais on voit bien de combien de contorsions et de difficultés un tel énoncé risque de se payer. Métaphysiques, d'abord, car cela obligerait à faire de l'espace et du temps des déterminations logiques, se heurtant ainsi à l'ensemble des difficultés soulevées par le débat classique entre la position leibnizienne et celle de Kant. Épistémologiques ensuite, car l'espace et le temps étant le lieu où réside et agit traditionnellement l'intuition, il faudra dès lors accepter une dimension intuitive irréductible dans toute connaissance logique. Sémiotique, enfin, et surtout, puisque comme il apparaîtra immédiatement dans la suite des formulations de Jevons, cette différence ne trouve son expression dans le système qu'au moyen d'un fonctionnement des signes dont aucune loi symbolique du système ne régule l'usage, et dont l'application aux symboles logiques est présentée comme relevant d'une notation étrangement *numérique*, dont le mérite est moins de résoudre le problème que de le localiser et de l'isoler. En effet, Jevons ajoute aussitôt :

> The meaning of an abstract unit is something only known as logically distinct from or contrary to other things. The meaning of a concrete unit is the abstract unit with certain qualities known or defined.
>
> For instance, in $A(1' + 1'' + 1''') = A' + A'' + A'''$ the meaning of the units $1'$, $1''$, $1'''$ is that each is something logically distinct from the other, and when we predicate of each of these that it is *A*, say an apple, we get three distinct *A*'s, A', A'', A'''. (Jevons, 1864/1890, p. 71)

On voit ainsi que l'expression « $1' + 1'' + 1'''$ », par laquelle Jevons prétend investir d'une existence logique le principe du contenu incarné par la distinction numérique, concentre et rejoue l'ensemble des difficultés concernant le sens des signes numériques que Boole laisse subsister dans le système. Elle les isole et les déplie d'une certaine manière et jusqu'à un certain point. Mais elle ne les résout pas pour autant, car si dans « $1' + 1'' + 1'''$ » nous pouvons voir une manière particulière de développer le sens du signe « 3 » du système de

Boole, le sens de cette nouvelle expression repose à la fois sur l'étrange présence du signe numérique « 1 » [316], sur de non moins étranges signes diacritiques affectant les répétitions successives d'un symbole, et sur la capacité de l'opération d'addition logique d'agir sur les expressions résultantes de la combinaison de ces deux constituants sémiotiques. Or rien dans le système booléen aménagé par Jevons ne permet de contrôler un tant soit peu le fonctionnement ou la signification de cette multiplicité des déterminations sémiotiques. C'est dire que l'expression « $1' + 1'' + 1'''$ » selon laquelle Jevons prétend paisiblement résoudre de façon technique la question décisive de la différence numérique, et des contenus que celle-ci véhicule, est loin de pouvoir surmonter les problèmes soulevés par les signes numériques. Voulant intégrer les déterminations numériques à la logique, au point où c'est au nom du fonctionnement qu'elle est censée introduire et supporter que Jevons affirme la primauté de la logique sur les mathématiques[317], cette expression demeure profondément hybride tant dans son appartenance que dans ses effets.

C'est précisément à ce moment-là que l'on peut voir l'action tangible et décisive de la catégorie fondamentale d'abstraction. Car c'est précisément par elle que l'ensemble des difficultés et des obscurités est sinon surmonté du moins écarté et comme désamorcé. Ainsi, la distinction entre unités abstraites de nature logique et unités concrètes se rapportant confusément aux mathématiques (et à l'Arithmétique en particulier), qui prépare l'introduction de l'expression « $1' + 1'' + 1'''$ » dans le passage que nous venons de citer, a pour effet de distribuer d'entrée de jeu les places grâce auxquelles la pensée symbolique des Booléens pourra situer à l'extérieur de la logique la source obscure de ces complications. L'exemple que Jevons propose aussitôt illustre parfaitement cette distribution des places. En effet, Jevons écrit le processus *mathématique* de multiplication « deux fois deux font quatre » de la manière suivante :

$$(1+1)(1+1) = 1+1+1+1,$$

pour en proposer la signification *logique* selon laquelle « si nous avons deux notions logiquement distinctes, et que nous les divisons chacune en deux notions logiquement distinctes, nous obtenons quatre notions logiquement distinctes », ce qu'il symbolise :

---

[316] D'autant plus étranger au système de Jevons qu'il avait lui-même contesté la nature logique du calcul booléen des 0 et 1. Cf. par exemple Jevons (1864/1890, pp. 76-77).

[317] En effet, dans l'introduction de son ouvrage *Pure Logic*, Jevons affirme : « The forms of my system may, in fact, be reached by divesting his [Boole's] system of a mathematical dress, which, to say the least, is not essential to it. The system being restored to its proper simplicity, it may be inferred, not that Logic is a part of Mathematics, as is almost implied in Professor Boole's writings, but that the Mathematics are rather derivatives of Logic. All the interesting analogies or samenesses of logical and mathematical reasoning which may be pointed out, are surely reversed by making Logic the dependent of Mathematics » (1864/1890, p. 5). Et plus tard dans le même ouvrage, dans le contexte des passages que nous évoquions : « Number, then, and the science of number, arise out of logic, and the conditions of number are defined by logic » (1864/1890, p. 71).

$$(A+a)(B+b)=AB+Ab+aB+ab,$$

où les lettres minuscules symbolisent les contraires des majuscules correspondantes (1864/1890, p. 71). C'est dans ce sens que Jevons croit pouvoir affirmer que ce sont les mathématiques qui dérivent de la logique, et non pas inversement, comme le système de Boole semble l'impliquer. Or, dans cet exemple, l'expression hybride « $1'+1''+1'''$ » a totalement disparue. Dès lors, on voit que tout le problème du principe sémiotique de la répétition numérique a été repoussé du côté des « unités concrètes » des mathématiques, dont les « unités abstraites » logiques prétendent capturer seulement les déterminations fondamentales, au moyen de distinctions strictement catégorielles ou conceptuelles. Cependant, malgré l'effort et l'ingéniosité de Jevons, on voit mal comment l'expression logique se laisserait comprendre arithmétiquement si ce n'est que *par référence* à l'expression mathématique dont elle n'extrait que la forme abstraite, purement catégorielle. Autrement dit, comment pourrait-on comprendre que l'expression « $AB+Ab+aB+ab$ » signifie le nombre 4, si ce n'est par une correspondance, toujours problématique et incertaine, avec l'expression mathématique « $1+1+1+1$ », qui brouille quant à elle toutes les différences conceptuelles que la logique cherchait soigneusement à établir, mais qui n'assure pas moins par là toute son efficacité ?

Une telle correspondance, *c'est précisément cela qu'une expression du type* « $1'+1''+1'''$ » *viendrait assurer*. C'est pourquoi Jevons se voit obligé de la présenter dès le départ malgré sa nature hybride, avant qu'elle ne s'efface irrémédiablement dans l'entre-deux insaisissable qui sépare l'abstraction logique des unités concrètes de l'Arithmétique. Véritable schème sémiotique, à la fois interne et externe au système logique, elle détient et présente les traits diagrammatiques à travers lesquels le contenu numérique des expressions logiques pourra apparaître à la fois comme implicite et évident. Après l'analyse de la question du sens des signes numériques chez Boole, on ne s'étonnera pas que l'effacement de ce schème s'accompagne de l'apparition de la condition d'exclusivité mutuelle des termes logiques assurée par l'addition de termes contraires ou contradictoires ($A+a$, $B+b$), qui garantit l'exclusivité mutuelle des unités logiques censées correspondre aux unités mathématiques.

Si bien que malgré les déclarations d'intention de Jevons concernant la nature logique des distinctions spatiales et la capacité de la logique à déterminer entièrement l'existence et les propriétés du nombre et des mathématiques, la mise à l'écart du principe sémiotique de différence numérique au moyen de la notion d'abstraction finit par isoler les unités individuelles dont les classes logiques ne sauraient cesser de parler, et par en faire le dehors même de la logique. Ce rôle de l'abstraction, et la distance qu'elle creuse entre la logique et les principes sémiotiques qui, attachés aux mathématiques et au nombre, renferment l'énigme du contenu, constituent d'ailleurs le mot de la fin de l'ouvrage de Jevons. Sorte de manifeste de l'Abstraction symbolique, où l'on peut voir que les déterminations spatio-temporelles où Jevons avait placé la source de la différence numérique se trouvent finalement conjurées hors du territoire de la logique :

> Things as they appear to us in the reality of nature, are clothed in inexhaustible attributes, set as it were in a frame of time and space. By our mental powers we abstract first time, then space, and then attribute after attribute, until we can finally think of things as abstract units deprived of all attributes, and only retaining the original logical condition of things, that each is distinct from others. In logic we argue upon things as same and one, in number we reason upon them as distinct and many. (Jevons, 1864/1890, p. 77)

III.2.2.4. La reconstitution de Hailperin

Après cette mise en lumière de l'action de la différence numérique, nous pouvons restituer les mécanismes précis par lesquels l'évolution de la logique booléenne suivant les lignes de force de l'Abstraction symbolique, extrait le sens des signes numériques et le déplace avec soin à l'extérieur du territoire de la logique : schématisation de l'action de la différence numérique sur les concepts, disposition des places selon la polarité abstrait-concret, effacement du schème, distribution des propriétés sémiotiques en conceptuelles et numériques dont le schème induisait l'indissociabilité et l'articulation, induction d'une correspondance implicite et posée comme évidente. La condition logique principale d'une telle correspondance n'en reste pas moins l'exclusivité mutuelle des termes logiques, c'est-à-dire, ce qui chez Boole n'était que l'autre face des signes numériques. Tout se passe donc comme si l'Abstraction symbolique effaçait les traces des signes numériques sans pour autant porter atteinte au sens que d'une façon obscure et fragmentaire ils ne cessaient de véhiculer. C'est de cette façon que l'évolution du système sous l'empire de Jevons et des Booléens en général confirme le sens des signes numériques comme différence numérique définissant la forme des contenus non conceptuels.

Mais ce sens se voit également confirmé si l'on reste à l'intérieur du système de Boole, en acceptant ses règles et ses conditions, tout en essayant d'en reconstituer un modèle consistant. Tel est l'enjeu en particulier du travail réalisé par Theodore Hailperin (1986; 1981) au milieu des années 1970, et révisé et complété une dizaine d'années plus tard. En essayant de restituer la singularité des formulations de Boole, disparue sous le poids d'une postérité qui le place, non sans raison, à l'origine des « algèbres booléennes », Hailperin se donne pour tâche de montrer que « l'algèbre de Boole n'est pas une algèbre booléenne »[318]. En effet, les algèbres booléennes sont le résultat des aménagements et des formalisations qui, à la suite des travaux de Boole, sont venus résoudre les difficultés qui rendaient ceux-ci théoriquement insatisfaisants, notamment à cause de l'absence d'une loi du type $A + A = A$. Cependant, contre le rabattement du système de Boole sur ces aménagements postérieurs, Hailperin soutient que « Boole a bien un système formel si l'on est suffisamment indulgent à propos de ce que l'on entend par là » (1986, p. 135). Seulement, la perspective historique néglige systématiquement cette possibilité au profit d'une interprétation simplifiée en termes d'algèbres booléennes, qui manque le caractère distinctif du système de Boole. Aussi Hailperin énonce-t-il sa tâche de la façon suivante :

> Customarily in theory building one has an intuitive meaningful idea of a mathematical structure and then proceeds to formalize it as an abstract system. So from the idea of a group we go to the theory of groups, axiomatized in some fashion, or from the algebra of subsets of a set to Boolean algebra. Here, however, our problem is the reverse of this. We have a formal system, admittedly badly formulated, and we wish to find out what kind of mathematico-logical structure it formalizes. Once we do, and have a clearly described (type of) structure in mind, we can then in the reverse direction use it to straighten out Boole's poorly formulated system. (Hailperin, 1986, p. 135)

Que cette construction cherche à rendre consistant le sens toujours confus qui circule à travers les traits sémiotiques sur lesquelles nous mettons ici l'accent (les signes numériques), cela peut être pressenti lorsque Hailperin annonce que des idées directrices pour une telle construction peuvent être trouvées dans les remarques de De Morgan concernant le double comptage impliqué par l'opération d'addition de Boole, ainsi que les tentatives de Peirce et de Macfarlane d'attribuer un double sens – logique et numérique – aux classes du système booléen (1986, p. 136).

Ainsi, en formalisant de manière axiomatique les différentes lois stipulées explicitement ou employées implicitement par Boole, Hailperin arrive à établir que son système se laisse comprendre selon les termes de l'Algèbre moderne comme un *anneau commutatif unitaire sans nilpotents additifs ou multiplicatifs*[319]. Sous le régime d'une telle structure, l'ensemble d'éléments *idempotents*, c'est-à-dire d'éléments x répondant à la loi des indices $x^2 = x$, suffit

[318] C'est en particulier le titre d'un de ses articles les plus célèbres, où il expose les éléments principaux de sa démarche. Cf. Hailperin (1981). Par « algèbre booléenne » Hailperin entend la structure axiomatiquement définie que les mathématiques reconnaissent habituellement sous ce nom ; « algèbre de Boole » renvoie pour lui, en revanche, au système effectivement proposé par le logicien anglais dans ses textes.

[319] C'est-à-dire, une structure algébrique axiomatiquement définie, comportant deux lois de composition internes (multiplication et addition), commutatives, dotées d'un élément neutre, et dont l'itération ne résulte en 0 que pour 0.

pour pratiquer une logique des classes, puisque les propriétés de cette algèbre garantissent que si x et y répondent à la loi des indices, alors il en est de même pour les termes xy, $1-x$, $x(1-y)+(1-x)y$ et $xy+(1-x)y+x(1-y)$. On démontre aussi que le terme $x+y$ répond également à cette loi si et seulement si $xy=0$, c'est-à-dire si x et y sont disjoints ou mutuellement exclusifs. Hailperin note alors qu'en ne prenant que cet ensemble d'éléments, on obtient soit ce qui est aujourd'hui connu sous le nom d'algèbre booléenne (avec l'opération $x \cup y = xy+(1-x)y+x(1-y)$ comme addition), soit un anneau de Boole (avec la différence symétrique $x+_{\Delta}y=(1-x)y+x(1-y)$ comme addition).

Or, comme le montre Hailperin, le système conçu et défendu par Boole lui-même ne coïncide avec aucune de ces deux structures. Et cela pour une raison double, qui ne constitue que les deux faces de la même condition. D'une part l'opération d'addition de Boole ne répond à aucune des deux additions déterminant ces structures, et cela malgré le fait que l'on a tendance à identifier l'addition de Boole avec la différence symétrique (c'est-à-dire, logiquement, avec la disjonction exclusive). D'autre part, le système de Boole comprend des éléments qui ne répondent pas à la loi $x^2=x$, dont ceux notamment qui comportent des signes numériques. Regardé du point de vue de l'Algèbre moderne, ce double problème apparaît comme la non-clôture algébrique de l'opération d'addition de Boole sur l'ensemble des éléments idempotents. Ce qui veut dire que par l'application de son opération d'addition sur des éléments idempotents on n'obtient pas forcément comme résultat un élément de cet ensemble.

C'est donc en intégrant ces divergences au lieu de les refuser que Hailperin reconstituera une structure algébrique au plus près de la spécificité du système de Boole, c'est-à-dire sans restrictions sur les opérations. Il arrivera ainsi à définir les deux opérations de base pour l'anneau en question, addition et multiplication, en assurant ensuite l'existence pour tout élément d'un élément symétrique (inverse additif) pour garantir l'applicabilité de la soustraction. Il sera alors en mesure de définir formellement une loi de développement de fonctions telle que celle de *The Laws of Thought*, et de démontrer au moyen d'un isomorphisme, que l'algèbre de Boole est conservative par rapport à la déduction dans l'algèbre booléenne : tout ce qui est démontrable dans la première l'est dans la seconde. Avec l'ensemble de ces outils, et dans l'esprit de la Théorie des modèles, Hailperin est capable d'établir des critères formels pour déterminer avec précision ce que Boole entend par une expression interprétable ou non-interprétable[320]. L'auteur propose également une conception formelle du signe de classe indéterminée *v*, et montre dans ce cadre général que les solutions

[320] Notamment, un terme T est interprétable par rapport à une certaine évaluation si $T^2=T$ est démontrable à partir des axiomes.

des équations logiques du système de Boole peuvent être trouvées sans avoir recours à l'opération de division, qui reste problématique dans ce cadre

Toutefois, Hailperin ne recule pas devant cette question de la division, qu'après tout Boole utilise bien dans sa méthode de résolution des équations, et qui compte sans doute parmi les questions les plus épineuses de son système. C'est ainsi que Hailperin, selon une procédure analogue à l'extension des entiers dans les rationnels, introduit un quotient sur l'anneau booléen, déterminant des classes d'équivalence sur lesquelles toutes les opérations peuvent être redéfinies naturellement. Sur un tel anneau quotient, l'unicité des résultats de la division est assurée, et par une extension au moyen de l'introduction des fractions, l'opération de division dans le système booléen peut être réalisée presque sans restriction. Malgré une certaine technicité, ces dernières pages sont sans doute les plus belles, les plus lumineuses et les plus originales du travail de reconstruction de Hailperin, au terme desquelles l'ensemble des procédures employées par Boole trouve la forme de leur justification mathématique rigoureuse.

Mais l'intérêt principal de ces travaux par rapport aux questions qui sont ici les nôtres ne réside pas tant dans l'ensemble de ces constructions que dans l'objet mathématique ou formel sur lesquelles elles se modèlent. C'est bien ce que Hailperin tient pour sa thèse ou sa proposition fondamentale, à savoir que *ce n'est pas la notion de classe ou d'ensemble qui permet de donner une interprétation adéquate du système de Boole, mais celle de* « *multiensemble* ».

Tel que Hailperin le décrit, un multiensemble est :

> …a collection of objects as a whole in which more than one example of an object may occur – for example, the collection of 5 indistinguishable red balls and 3 indistinguishable black balls in an urn, or the set of roots of a polynomial equation in which multiplicities are counted. The objects will be referred to as *members* or *elements* of the multiset. In the example of the urn just mentioned there are 8 elements. If we wish to disregard multiplicities we shall refer to *distinct kinds of elements*. (Hailperin, 1986, p. 136)

Sémiotiquement, à la différence d'un ensemble classique que l'on définirait en extension au moyen de la notation : $\{a_1, \dots, a_n\}$ pour des éléments $a_1, \dots, a_n$ lui appartenant, dans le cas d'un multiensemble on écrit $\{(h_1)a_1, (h_2)a_2, \dots, (h_n)a_n\}$ pour définir un multiensemble comportant un nombre h_1 (éventuellement nul) d'objets a_1, un nombre h_2 d'objets a_2, etc.[321]

Voilà donc la structure mathématique élémentaire qui sert de base à Hailperin pour la reconstruction rigoureuse de la spécificité du système formel de Boole. C'est sur elle donc

[321] Pour les différentes manières de représenter un multiensemble, voir Hailperin (1986, p. 163 sq.).

que, après avoir établi un principe d'identité pour ses éléments[322] et avoir identifié la classe universelle et la classe vide[323], l'opération spécifiquement booléenne d'addition pourra être définie. Ainsi, l'addition de deux multiensembles s'obtient en additionnant les nombres dont chaque objet est affecté[324]. Hailperin poursuit son illustration des urnes à billes colorées en comparant l'opération d'addition des multiensembles avec l'idée intuitive de rassembler le contenu de deux urnes. Ainsi, si au multiensemble donné comme exemple par Hailperin on additionne le multiensemble donné par 2 billes noires et 3 jaunes, le résultat de l'addition sera le multiensemble constitué par 5 billes rouges, 5 noires et 3 jaunes, multiensemble à 13 éléments. De la même façon, la multiplication sera définie par la multiplication des nombres affectant les objets[325].

Cette définition de l'addition sur la structure des multiensembles permet de retrouver toutes les propriétés de l'addition du système Booléen. Pourtant, la soustraction n'est évidemment pas garantie dans tous le cas, du fait de l'inexistence des nombres négatifs affectant les objets. C'est pourquoi Hailperin étend cette structure des multiensembles pour obtenir celle des *multiensembles signés*, c'est-à-dire une structure où les nombres portant sur les objets sont affectés d'un signe (positif ou négatif). Cette fois l'illustration intuitive d'une telle structure est empruntée au poker :

> …a multiset is like an ordinary set except that multiple occurrences of elements are allowed, and by a signed multiset we mean one in which negative multiplicities are allowed. For example, during a poker game your pile of chips contains various positive or zero multiples of red, white or blue chips, all of each color indistinguishable as far as the game is concerned; and if you borrow from the pot, you are adding negative multiples to your pile. (Hailperin, 1981, p. 176)

Certes, l'intérêt de la structure des multiensembles, que Hailperin présente comme le modèle ou l'interprétation principale du système formel dégagé directement des formulations de Boole, reste relatif du point de vue de sa fécondité logique. La conservativité de la déduction en témoigne, et l'exemple préféré de Hailperin pour montrer le contraire n'est pas tout à fait convaincant, à savoir l'équivalence :

---

322 A savoir, deux multiensembles $A = \{(h_1)a_1, \dots, (h_i)a_i, \dots\}$ et $B = \{(k_1)b_1, \dots, (k_i)b_i, \dots\}$ sont égaux si pour tout i on a $a_i = b_i$ et $h_i = k_i$.

323 En posant 1 comme une classe fixe *sans répétition*, dont les toutes les autres classes peuvent être formées en permettant les répétitions ; et en posant 0 comme le multiensemble où pour tout i, $h_i = 0$.

324 Formellement : pour deux multiensembles $A = \{(h_1)a_1, \dots, (h_i)a_i, \dots\}$ et $B = \{(k_1)a_1, \dots, (k_i)a_i, \dots\}$, $A + B = \{(l_1)a_1, \dots, (l_i)a_i, \dots\}$, avec $l_i = h_i + k_i$.

325 Comme le signale Hailperin, cela ouvre la possibilité d'avoir des diviseurs de zéro (c'est-à-dire, des éléments A et B différents de zéro, tels que $AB = 0$), tout comme dans une algèbre booléenne. Il s'agit notamment des cas où les multiensembles multipliés ne possèdent pas d'éléments communs.

$$(x + x)y = 0 \Leftrightarrow xy = 0,$$

démontrable dans ce cadre, qui enseigne que la duplication des éléments d'un ensemble n'affecte pas son exclusivité mutuelle par rapport à un autre ensemble. Toutefois, cette structure des multiensembles présente un intérêt majeur pour nous en ce qu'elle donne une existence mathématique ou formelle rigoureuse au sens strictement insignifiant véhiculé par les signes numériques tel que nous l'avons mis en avant d'après leur dimension sémiotique. En effet, les travaux de Hailperin montrent que *la réalisation de ce sens dans un objet formel (les multiensembles) entraîne l'intégration d'une différence purement numérique au milieu de la structure des distinctions conceptuelles* qui détermine les éléments d'une classe ordinaire. L'idée de 5 billes rouges parfaitement identiques ne veut rien dire d'autre. Il en résulte que, dans la mesure où cette interprétation formelle fait justice aux formulations de Boole, elle confirme donc notre interprétation sémio-logique. La compréhension de l'expression « $x + x$ » suivant les termes de la méthode du développement nouvellement formalisée ne laisse aucun doute à cet égard :

> It is easy to formally prove that any Boolean multiset term is equal to a sum of constituents on its variables with coefficients that are integers, i.e. are of the form '0' or '$\pm$ 1' or '$\pm(1 + 1 + \cdots + 1)$'. Accordingly, when its variables represent sets in a multiset algebra, a term represents a multiset built up in obvious fashion from sets represented by the constituents. Thus
>
> $$x + x = 2 \cdot x + 0 \cdot \bar{x},$$
>
> and hence, for a set *x*, *$x + x$ represents a multiset which has two copies of each element of x* (and none of $\bar{x}$)… (Hailperin, 1986, p. 145, nous soulignons)

L'intérêt du travail de Hailperin ne s'épuise pas néanmoins dans la simple confirmation de ce sens, mais va plus loin en tirant les conséquences techniques d'une telle situation dans le cadre rigoureux d'une formalisation contemporaine. Parmi ces conséquences, on trouve l'identification des conditions strictes selon lesquelles le système booléen peut être apprivoisé et réduit à un système s'ajustant sans reste au calcul des classes ou des propositions. Comme le montre Hailperin, une telle réduction résulte de la restriction des multiensembles aux éléments idempotents, ce qui peut s'obtenir en forçant tous les nombres h_i affectant les objets a_i à être égaux à 0 ou à 1, autrement dit, aux seuls nombres remplissant la condition $x^2 = x$; condition que Hailperin reformule comme l'inexistence d' « éléments négatifs ou répétés » (1986, p. 142). Cette restriction doit, de plus, s'accompagner d'une restriction de l'opération d'addition à l'une des deux lois d'addition déjà mentionnées : addition booléenne ($x + y - xy$) ou différence symétrique ($x + y - 2xy$), pour que l'ensemble des éléments idempotents soit stable par addition.

Mais plus profondément, la reconstruction de Hailperin permet d'établir certaines propriétés spécifiques du système de Boole qui mettent en évidence les raisons de son irréductibilité à l'algèbre booléenne et au calcul des classes que celle-ci structure et garantit. Irréductibilité *structurale* d'abord, puisque, suivant des résultats de McCoy, Hailperin est capable d'établir que toute réalisation ou modèle de la structure des multiensembles signés constitue un produit semi-direct d'anneaux intègres, chacun desquels est sans nilpotents additifs. Ce qui se laisse comprendre intuitivement comme « n-tuples d'éléments dans lesquels chaque composante porte sur un anneau intègre sans nilpotents, et avec les opérations de $+$ et $\times$ pour ces n-tuples définies par composante » (1981, p. 178). Or, comme Hailperin ne manque pas de le remarquer, les algèbres booléennes sont, quant à elles, isomorphes à un produit semi-direct d'algèbres booléennes à deux éléments seulement. Il en découle une autre irréductibilité, que l'on pourrait appeler *mathématique* cette fois-ci, à savoir *la possibilité de retrouver à l'intérieur de l'algèbre des multiensembles la structure des entiers*, donnée précisément par la structure des anneaux intègres qui informe cette algèbre. Enfin, et plus intéressant encore, irréductibilité *logique*, car à la différence de l'algèbre booléenne, et en rapport avec le lien intime que la structure des multiensembles maintient avec les entiers, *cette structure qui formalise le système de Boole est indécidable*. Hailperin invoque alors les résultats Tarski, Mostowski et Robinson, qui permettent de comprendre que cette indécidabilité est une conséquence du fait que la théorie logique des multiensembles est une sous-théorie de la théorie des entiers, comportant les mêmes symboles que celle-ci[326] (1986, pp. 140-141).

III.2.2.5. Un principe de contenu

Le travail de Hailperin est l'un des seuls à restituer avec justice la place spécifique des formulations booléennes dans le cadre de la logique contemporaine. La philosophie et l'histoire de la logique lui sont redevables d'avoir mis en évidence de façon précise des nuances significatives que l'évolution des systèmes formels tend constamment à effacer rétroactivement. Pourtant, il y a un point où cette reconstitution manque un aspect fondamental, non pas des formulations de Boole elles-mêmes, mais plutôt du problème que Boole s'évertue à faire subsister à l'intérieur du système logique mathématisé – problème

[326] Pourtant, on peut déterminer une sous-classe de propositions dans cette théorie pour lesquelles une procédure de décision est possible, à savoir la classe des propositions universelles, déterminant les formules sans quantification, dont les équations, sur le fonctionnement desquels Boole appuie précisément son principe d'inférence (cf. Hailperin, 1986, p. 141).

dont nous essayons ici de restituer l'objectivité et de mesurer l'importance. Cet aspect est celui de la forme du contenu dont la présence des éléments sémiotiques de l'Arithmétique semble forcer l'inscription à l'intérieur d'un système logique. Certes, cela ne peut être reproché à Hailperin, puisqu'un tel aspect ne fait aucunement partie du problème et du programme qui étaient les siens. Il n'en demeure pas moins que la mise en avant du problème du contenu attaché à la présence des signes numériques dans un système logique met en question le cadre même suivant lequel Hailperin effectue sa reconstruction, à savoir la Théorie des modèles, car celle-ci est l'héritière directe des postulats de l'Abstraction symbolique qui commande précisément l'exclusion de ces signes et du sens qu'ils véhiculent, et qui se voit entièrement mise en question par la figure du contenu logique que ces signes tendent à engendrer. Aussi, la structure des multiensembles comme réalisation du système formel reconstruit par Hailperin doit-elle être introduite extérieurement, et seulement comme l'un de ses modèles possibles, restant un contenu externe aux déterminations logiques.

Or, même si Boole ne disposait pas des moyens pour donner à ce contenu une place dans le paysage général de l'Abstraction symbolique, sa symbolisation progressive de l'opération d'addition respectant la forme objectale, l'acceptation de la subsistance à l'intérieur de son système d'une plage d'expressivité pure insignifiante où résident les effets numériques d'une telle loi, tout comme la tentative tardive et rudimentaire d'établir des distinctions comme celle d' « expression » et « équation », à laquelle il s'est vu obligé à la suite de la confrontation avec l'évolution de l'Abstraction symbolique sous la plume de ses successeurs, tout cela témoigne suffisamment du fait qu'un principe de contenu logique agissait de manière effective au sein même de son système.

C'est cette immanence du contenu par rapport au système logique, autrement dit, c'est l'existence d'un contenu *proprement logique*, que tant les aménagements lointains de Jevons que les restitutions récentes de Hailperin manquent symétriquement. Et sans doute Boole ne le manque pas moins, car un tel contenu n'est pas arrivé après tout à se cristalliser au sein de son système. Mais ce n'est pas pour les mêmes raisons que le contenu logique fait défaut ici et là. Si dans les cas de Jevons et de Hailperin tout contenu est soit expulsé soit présupposé à l'extérieur des déterminations logiques, chez Boole en revanche ce contenu est bien doué d'un principe interne d'engendrement. Seulement, entouré d'instruments dont la nature a été conçue en le repoussant, ce contenu n'a pas su trouver les conditions internes de sa consistance.

Ces conditions, c'est dans le rapport avec les mécanismes de la conceptualité logique qu'elles se jouent. Le cas des propositions numériquement définies le montre suffisamment : les signes numériques n'y contractent le sens précis d'une différence numérique qu'à condition que les contenus sur lesquels celle-ci est censée s'exercer (les individus tombant sous ou correspondant aux termes logiques) soient comme présentés ou dotés d'une existence logique par l'opérateur numérique N agissant sur les différents termes logiques. Mais on l'a vu, l'opérateur N ne saurait pas être lui-même un concept ou terme logique. Ce défaut de conceptualité est le signe même de l'impuissance radicale de ce système à donner une consistance au principe du contenu exprimé par les signes numériques, et plus généralement pour déterminer des contenus au moyen de ses seuls mécanismes internes.

Si dans le système de Boole le principe du contenu renvoie, à travers les signes numériques qui l'expriment, à l'opération d'addition, la conceptualité qui lui fait tort renvoie quant à elle à l'opération de multiplication comme à ce qui la détermine de façon exclusive et essentielle. C'est pourquoi il faut maintenant se tourner vers cette opération de multiplication, et vers le fonctionnement sémiotique qu'elle incarne et garantit.

III.2.3. La différence conceptuelle

III.2.3.1. Les partitions de la différence conceptuelle

À la différence de la répétition indéfinie associée à l'opération d'addition, la loi des indices pour la multiplication instaure un régime *cyclique* de répétition qui limite le nombre de significations engendrables et distribue les instances potentiellement infinies d'un signe entre ce nombre fini de significations. Dans le cas le plus simple de la loi $x^n = x$ où $n = 2$, le signe « x » renvoie toujours à la même signification. Dans des cas plus complexes où $n > 2$, on pourrait imaginer que des classes distinctes de « x » s'établiraient, marquées, si l'on s'en tient à la notation multiplicative, par des indices numériques (« x^1 », « x^2 », …, « x^{n-1} »), qui fonctionneraient comme autant de significations différentes auxquelles les multiples occurrences du signe « x » n'auront d'autre possibilité que renvoyer[327]. Ainsi, alors que les coefficients numériques résultant de la répétition de l'opération d'addition (« $2cheval$ », « $3cheval$ »…) marquaient symboliquement une différence de signification engendrée par chaque utilisation ou application successive de ce signe sous la loi de l'addition, les signes numériques ou chiffres en indice (par exemple : « $cheval^2$ », « $cheval^3$ »…) marquent, si l'on s'en tient à leur strict nature et fonctionnement symboliques, une différence entre des significations qui sont forcées à rester identiques pour des utilisations successives du signe marqué.

[327] Cf. *supra* p. 298.

Si nous avons pu identifier l'action des coefficients numériques engendrés par la répétition indéfinie de l'addition comme celle de la *différence numérique* non conceptuelle, le sens des indices numériques comme marque de la répétition cyclique, dans la mesure où ils indexent les subdivisions possibles de la signification d'un terme, suggère que l'action de ces signes est associée à une *différence conceptuelle*, si par là on entend une différence *dans* le concept et *par* le concept. *Dans* le concept puisque ce qui se voit ainsi différencié, c'est un concept ou terme logique représenté par le symbole sur lequel porte l'indice ; *par* le concept parce que le résultat de cette différenciation est encore un concept ou terme logique, ou plutôt autant de termes logiques que d'éléments résultants de la différenciation. Si bien que l'on peut dire qu'un concept se différencie par l'action d'autres concepts, et que ces derniers se constituent par différenciation dans ou à l'intérieur d'un concept.

D'après une distinction qui remonte à Aristote, cette différenciation conceptuelle, regardée strictement du point de vue des signes qui véhiculent les concepts (des « noms » : ὄνυμα), peut être de deux natures : soit les éléments signifiés par des occurrences différentes d'un terme n'ont en commun que le nom ou signe qui les désigne (Aristote les appelle alors « homonymes ») ; soit ils partagent aussi la même « notion » ou « définition » (le même λόγος, ce qui les rend « synonymes » dans les termes d'Aristote)[328]. Si l'on reprend l'exemple du mot ou signe « $cheval$ » pour fixer les idées, la différence conceptuelle induite par les indices numériques dans le premier cas correspondrait aux différentes acceptions du mot « $cheval$ », un peu à la façon dont ces signes d'indice apparaissent dans les différentes définitions d'un dictionnaire. Ainsi, dans le Petit Robert on trouve :

$cheval^1$: Grand mammifère ongulé (*hippomorphes*) à crinière, plus grand que l'âne, domestiqué par l'homme comme animal de trait et de transport.

$cheval^2$: Figure représentant un cheval

$cheval^3$: …

Dans le second cas, les symboles indicés renverraient en revanche à des catégories ou espèces de chevaux, par exemple :

---

328 C'est, en effet, le célèbre début des *Catégories*, et avec elles, de l'ensemble de l'*Organon* : « On appelle *homonymes* les choses dont le nom seul est commun, tandis que la notion [λόγος] désignée par ce nom est diverse. Par exemple, *animal* est aussi bien un homme réel qu'un homme en peinture ; ces deux choses n'ont en effet de commun que le nom, alors que la notion désignée par le nom est différente. Car si on veut rendre compte en quoi chacune d'elles réalise l'essence d'animal c'est une définition propre à l'une et à l'autre qu'on devra donner.

D'autre part, *synonyme* se dit de ce qui a à la fois communauté de nom et identité de notion [λόγος]. Par exemple, l'animal est à la fois l'homme et le bœuf ; en effet, non seulement l'homme et le bœuf sont appelés du nom commun d'animal, mais leur définition est la même, car si on veut rendre compte de ce qu'est la définition de chacun d'eux, en quoi chacun d'eux réalise l'essence d'animal, c'est la même définition qu'on devra donner. » (Aristote, 2008, pp. 17-18).

$cheval^1$: cheval de selle
$cheval^2$: cheval de trait
$cheval^3$: Poney

Mais aussi à n'importe quelle autre partition de l'ensemble des chevaux où la différence conceptuelle se donnerait comme différence spécifique (dans le sens de genre et espèce), par exemple :

$cheval^1$: cheval mâle
$cheval^2$: cheval femelle

On pourrait appeler ces deux distinctions *linguistique* et *logique* respectivement. Et sans doute la tradition logique, à commencer par Aristote, a eu la volonté infatigable d'identifier la conceptualité avec la structure résultante du second type de distinction. Au point où c'est sur elle que repose tout le problème de la logicité du langage. Pourtant, à s'en tenir strictement au point de vue du fonctionnement sémiotique qui les rend possibles (les indices sur les termes, régis par la loi des indices au moyen d'une répétition cyclique), c'est-à-dire du point de vue introduit et privilégié par la logique mathématisée que Boole est en train de fonder, la différence entre ces deux types de distinction devient secondaire et sans fondement. Le λόγος, responsable de la structuration de l'univocité au milieu de l'équivoque, apparaît seulement comme l'effet de l'organisation induite par le fonctionnement particulier des signes. Et de ce point de vue au moins, une organisation n'est pas moins présente dans l'homonymie que dans la synonymie. C'est pourquoi nous devons dire qu'elles constituent toutes les deux des différences conceptuelles, dans le sens avancé ci-dessus.

Mais alors, cela veut-il dire que la conceptualité en tant que telle (et avec elle, l'essence de la logique) s'épuise dans la distribution des occurrences successives d'un signe dans un nombre fini de subdivisions ou sous-catégories ? La situation n'est pas si simple. Elle l'est d'autant moins qu'une réponse négative à cette question oblige immédiatement à se demander : au nom de quoi pourrait-on établir une distinction entre ce qui, dans le domaine ouvert et anarchique des signes, relève de la distribution empirique et contingente du langage, et ce qui s'y organise selon un ordre particulier mais régulier sous le nom de logique ?

Si la formalisation du sens qui s'inaugure au XIX^e^ siècle avec les travaux de Boole implique l'avènement d'une nouvelle époque dans l'histoire de la logique, c'est sans doute avant tout par la façon dont elle suppose une transformation radicale dans la manière de répondre à cette question. Cette réponse, nous l'avons déjà exposée en détail : elle repose sur la nature et le fonctionnement des *signes* dans un langage, et sur le conditionnement de cette nature et de ce fonctionnement par la pratique sémiotique à la fois sévère et mouvante des mathématiques. Aussi, la question de la conceptualité renvoie-t-elle dans le cas de Boole à la loi des indices de l'opération de multiplication, en tant que régulation de la répétition structurant la différence (et symétriquement, l'identité) dans la signification d'un signe pour des occurrences successives. Pourtant, comme il vient d'être dit, les différences conceptuelles induites par le principe distributif de répétition cyclique ne suffisent pas pour définir la conceptualité comme telle. Encore faut-il que le même principe soit valable pour la totalité des concepts d'un langage ou d'un système. En effet, si le terme « *cheval* » se laisse différencier en « *cheval de selle* », « *cheval de trait* » et « *Poney* » (selon une tripartition dont le principe formel d'engendrement serait la loi $x^4 = x$), ce n'est pas pour autant que tout concept se différencie nécessairement de manière ternaire, ou plus précisément, trichotomique. Qui plus est, la diversité de différences conceptuelles empiriques devrait pouvoir découler comme des déclinaisons particulières de ce principe unique et général.

Il est dès lors facile de comprendre dans quelle mesure le cas limite de la loi des indices choisi par Boole, c'est-à-dire $x^2 = x$, donne une solution à ce problème. Regardé du point de vue des différences conceptuelles engendrées (où la loi $x^n = x$ engendre $n - 1$ divisions ou catégories pour ce concept), ce cas peut être compris comme un principe d'identité pour les concepts (puisque toutes les occurrences successives d'un signe se trouvent rabattues sur une seule et même signification, dont l'identité se trouve ainsi assurée). Cela se voit confirmé par le fait, remarquable au point d'être l'objet d'une proposition à part entière dans le troisième chapitre the *The Laws of Thought* (p. 49), que le célèbre principe de contradiction, envers indissociable du principe d'identité, peut être dérivé formellement à partir de cette loi dans le cadre du système de Boole. La démonstration de Boole consiste à dériver la loi :

$$x(1 - x) = 0$$

à partir de $x^2 = x$ en passant par $x - x^2 = 0$, et mettant x en facteur. Or, d'après les règles qui définissent le système logique de Boole, l'expression $x(1 - x) = 0$ se laisse bien comprendre comme l'inexistence d'une classe aux individus de laquelle pourrait être attribuée un concept x et sa négation[329]. De cette façon, la différence conceptuelle est ramenée à son degré zéro. Mais on aurait tort de croire que toute différence conceptuelle est éliminée pour autant. Elle est juste radicalisée et comme repoussée à la limite du concept, là où elle garantit l'identité d'un concept par sa différence d'avec tous les autres. Elle ne reste pas moins une différence conceptuelle ; seulement, comme on dirait en termes classiques, sa figure est portée de la contrariété (« cheval de selle », « cheval de trait » et « Poney ») jusqu'à la contradiction

[329] Particulièrement satisfait de cette découverte – dont l'établissement n'est d'ailleurs valable comme tel que dans son système particulier, où la négation de x est exprimé par « $(1 - x)$ » – Boole va jusqu'à y voir une preuve de la capacité de la logique mathématisée d'assumer les tâches fondamentales traditionnellement attribuées à la métaphysique : « The above interpretation has been introduced not on account of its immediate value in the present system, but as an illustration of a significant fact in the philosophy of the intellectual powers, viz., that what has been commonly regarded as the fundamental axiom of metaphysics is but the consequence of a law of thought, mathematical in its form. » (1854, p. 50).

(« cheval », « non-cheval »)[330]. En comptant le terme « non-*x* » comme terme conceptuel résultant de l'action de la contradiction comme différence conceptuelle extrême[331], la loi $x^2 = x$ doit être vue comme engendrant 2 divisions ou catégories, raison par laquelle Boole l'appelle « loi de dualité » (1854, p. 51). Plus généralement, en comptant la négation de x, la loi $x^n = x$ engendre n catégories, engendrement qui est cependant, du moins quant à ses effets sémiotiques, réductible à des applications successives de la loi de dualité selon des procédures connues.

III.2.3.2. Conceptualité générale et mathématiques

Tel est donc le principe de différenciation signifiante induit par le fonctionnement sémiotique gouverné par la répétition cyclique, lorsque les termes sur lesquels porte l'opération de multiplication sont élevés au rang de signes généraux d'un langage. Sans doute l'ensemble de ces considérations ne fait-il pas partie des réflexions de Boole. Du moins pas sous cette forme explicitement. Elles constituent plutôt les conditions sémiotiques de possibilité de l'induction des déterminations générales du langage et de la signification à partir des structures mathématiques. En tant que telles, ces conditions sont présentes de manière problématique, muette mais effective, dans les différentes étapes de construction de son système. À tel point que c'est exactement à ce problème que Boole se voit confronté lorsqu'il se voit obligé de justifier les implications de son choix pour une conception générale de la conceptualité. En effet, au moment de fournir son interprétation de la loi $x^2 = x$ comme impliquant le principe de non-contradiction, Boole affirme :

> I desire to direct attention also to the circumstance that the equation [$x(1-x)=0$] in which that fundamental law of thought is expressed is an equation of the second degree. Without speculating at all in this chapter upon the question, whether that circumstance is necessary in its own nature, we may venture to assert that if it had not existed, the whole procedure of the understanding would have been different from what it is. Thus it is a consequence of the fact that the fundamental equation of thought is of the second degree, that we perform the operation of analysis and classification, by division into pairs of opposites, or, as it is technically said, by *dichotomy*. Now if the equation in question had been of the third degree, still admitting of interpretation as such, the mental division must have been threefold in

[330] D'après des définitions classiques, deux termes sont contraires lorsqu'ils ne peuvent être vrais en même temps, et sont contradictoires lorsque, en plus, ils ne peuvent être simultanément faux.

[331] La nature conceptuelle de cette différence est assurée par le fait qu'elle continue à opérer *dans* le concept, dans la mesure où l'univers (exprimé par « 1 ») dans lequel cette différence a forcément lieu est lui aussi un terme conceptuel.

character, and we must have proceeded by a species of *trichotomy*, the real nature of which it is impossible for us, with our existing faculties, adequately to conceive, but the laws of which we might still investigate as an object of intellectual speculation. (Boole, 1854, pp. 50-51)[332]

La dichotomie donc, comme différence conceptuelle fondamentale, est le résultat direct du second degré de l'équation qui exprime la loi des indices, tout comme la trichotomie l'est du troisième degré de cette équation. Ce qui veut dire avant tout que la structure générale de la conceptualité est positivement déterminée par le régime distributif de la répétition cyclique, au moyen de l'action du principe de différence qui lui est associé : 2 termes différents (x et $1-x$) pour la loi $x^2=x$, animant une conceptualité dichotomique ; 3 termes différents pour la loi $x^3=x$, déterminant une conceptualité trichotomique… De cette façon, les formulations de Boole rejoignent bien les conditions sémiotiques imposées à la signification que nous avons dégagées dans les pages précédentes[333].

Seulement, le lien entre propriétés sémiotiques et logiques n'est pas dans le cas de Boole aussi direct et simple qu'on pourrait le croire. Et cela parce que les fonctionnements sémiotiques au nom desquels la détermination des unes par les autres acceptera d'être réalisée ne se réduisent pas pour lui aux simples effets de la régulation de la répétition sur la distribution des identités et des différences à partir d'une loi comme $x^n=x$ sur les symboles. De façon plus complexe, la logicité des signes se joue pour lui dans un rapport d'interprétabilité logique entre les effets symboliques des règles du système et les fonctionnements sémiotiques de nature mathématique, associés notamment à l'Analyse algébrique. Ainsi, si la loi $x^3=x$ est l'expression logique de la trichotomie, c'est moins parce

---

332 [Je voudrais attirer l'attention également sur le caractère suivant : l'équation [$x(1-x)=0$] qui exprime cette loi fondamentale de la pensée est une équation du second degré. Sans nous lancer ici dans des spéculations sur la nécessité de ce caractère, inhérente à sa nature propre, nous pouvons avancer cette thèse que s'il n'avait pas existé, la démarche tout entière de l'entendement eût été différente de ce qu'elle est. C'est donc en conséquence du fait que l'équation fondamentale de la pensée est du second degré que nous effectuons l'opération d'analyse et de classification par division en couples de contraires, ou, comme l'on dit techniquement, par *dichotomie.* Or, si l'équation en question avait été du troisième degré, tout en continuant d'admettre, telle quelle, une interprétation, la division mentale aurait dû être à trois composantes, et nous aurions dû procéder par une sorte de *trichotomie* dont il nous est impossible, en l'état présent de nos facultés, de concevoir adéquatement la nature réelle, mais dont nous pourrions encore chercher les lois comme objet de spéculation intellectuelle. (1992, p. 66)]

333 Qui plus est, suivant l'esprit de la formalisation du sens naissante, ce sont des arguments uniquement appuyés sur ces fonctionnements sémiotiques qui détermineront la forme de la logique sur laquelle la pensée aura à trouver son assise. Aussi, comme le suggère Boole, aucun argument métaphysique concernant la nature de nos facultés et de leur capacité de conception ne sera-t-il suffisant pour écarter des formes alternatives de conceptualité. Boole renforce aussi en note cette séparation entre arguments formels et arguments métaphysiques : « In saying that it is conceivable that the law of thought might have been different from what it is, I mean only that we can frame such an hypothesis, and study its consequences. The possibility of doing this involves no such doctrine as that the actual law of human reason is the product either of chance or of arbitrary will. » (1854, p. 50, note)

que les répétitions successives du signe « x » sont obligées de se distribuer dans deux catégories (auxquelles il faut ajouter celle des *non-x* définie par contradiction), mais parce que cette expression constitue une équation algébrique de troisième degré, que l'on peut écrire également $x^3 - x = 0$, et qu'en tant que telle, suivant des résultats fondamentaux de l'Algèbre, elle admet d'être factorisée en autant de termes que son degré. Ce sera donc sur ces termes, envisagés comme des termes logiques, que le critère d'interprétabilité symbolique sera exercé. C'est ce que Boole explique dans une note au passage précédemment cité :

> Should it here be said that the existence of the equation $x^2 = x$ necessitates also the existence of the equation $x^3 = x$, which is of the third degree, and then inquired whether that equation does not indicate a process of trichotomy; the answer is, that the equation $x^3 = x$ is not interpretable in the system of logic. For writing it in either of the forms
>
> $$x(1-x)(1+x) = 0,$$
>
> $$x(1-x)(-1-x) = 0,$$
>
> we see that its interpretation, if possible at all, must involve that of the factor $1+x$, or of the factor $-1-x$. The former is not interpretable, because we cannot conceive of the addition of any class x to the universe 1; the latter is not interpretable, because the symbol -1 is not subject to the law $x(1-x) = 0$, to which all class symbols are subject. Hence the equation $x^3 = x$ admits of no interpretation analogous to that of the equation $x^2 = x$. Were the former equation, however, true independently of the latter, i.e. were that act of the mind which is denoted by the symbol x, such that its second repetition should reproduce the result of a single operation, but not its first or mere repetition, it is presumable that we should be able to interpret one of the forms [$x(1-x)(1+x) = 0$], [$x(1-x)(-1-x) = 0$], which under the actual conditions of thought we cannot do. There exist operations, known to the mathematician, the law of which may be adequately expressed by the equation $x^3 = x$. But they are of a nature altogether foreign to the province of general reasoning. (Boole, 1854, p. 50, note)[334]

[334] [Si l'on prétend que l'existence de l'équation $x^2 = x$ nécessite aussi celle de l'équation $x^3 = x$, qui est du troisième degré, et si l'on demande si cette équation n'indique pas une procédure de trichotomie, la réponse à cette question sera celle-ci : l'équation $x^3 = x$ n'est pas interprétable dans le système logique. En effet, en l'écrivant sous l'une ou l'autre des formes

$$x(1-x)(1+x) = 0,$$

$$x(1-x)(-1-x) = 0,$$

nous voyons que son interprétation, à supposer qu'elle soit possible, doit comprendre celle du facteur $1+x$ ou du facteur $-1-x$. Le premier n'est pas interprétable, car nous ne pouvons concevoir l'addition d'une classe x, quelle qu'elle soit, avec l'univers 1 ; le second n'est pas interprétable, car le symbole -1 n'est pas soumis à la loi $x(-1-x) = 0$ à laquelle sont soumis tous les symboles de classes. Par conséquent, l'équation $x^3 = x$ n'admet aucune interprétation analogue à celle de l'équation $x^2 = x$. Si, cependant, ces deux équations avaient été vraies indépendamment l'une de l'autre, c'est-à-dire si l'acte mental que représente x avait été tel que sa seconde répétition reproduise le résultat d'une opération unique, mais non pas sa première ou simple répétition, l'on peut présumer que nous saurions interpréter l'une des formes $x(1-x)(1+x) = 0$, $x(1-x)(-1-x) =$

Ces passages sont essentiels pour comprendre la façon dont l'articulation entre mathématiques, sémiotique et logique a lieu dans le système de Boole. En effet, des arguments de ces trois types sont invoqués les uns à côté des autres, sans distinction de nature, dans une continuité que seule la notion encore imprécise mais non pas entièrement indéterminée de « formel » pourrait assurer. C'est par l'articulation singulière entre ces trois dimensions que la logicité des expressions d'un système se verra établie. Si bien que lorsque la question de la validité d'une loi comme $x^3 = x$ en tant que loi générale de la conceptualité se pose, et que l'on est ainsi ramenés à évaluer l'accord entre l'effet sémiotique d'une telle loi (l'engendrement par une répétition sémiotique d'une différence conceptuelle sur le symbole « x »), et sa signification logique pour le système (la trichotomie de la conceptualité), l'évaluation de cet accord sera conditionnée par la forme mathématique qui pour Boole mène de l'un à l'autre, à savoir la factorisation de l'expression $x^3 = x$, envisagée comme équation de troisième degré. Boole distingue ainsi deux cas pour cette évaluation : soit la loi $x^2 = x$ reste valide, soit elle ne le reste pas. Dans le premier cas, la loi $x^3 = x$ est à rejeter puisque dans les deux factorisations possibles on trouve des termes qui, soit ne s'y soumettent pas (-1), soit ne trouvent pas d'interprétation valable dans un système où elle serait valide ($1 + x$). Dans le second cas, il faudrait imaginer tout un système qui rende ces expressions interprétables, ce que Boole juge impossible « dans les conditions actuelles de la pensée ».

Cette circulation entre des propriétés sémiotiques, mathématiques et logiques instaure des conditionnements réciproques, dont la hiérarchie est loin d'être évidente. Car si l'on peut penser que Boole commence par fixer de façon dogmatique les conditions de la logicité en posant sa loi $x^2 = x$, cette loi n'est pas indépendante de ses propriétés mathématiques (par lesquelles elle peut, par exemple, être transformée en $x(1 - x) = 0$). D'autre part, Boole n'hésite pas à considérer le cas où cette loi ne serait pas valide, et le poids de la validité des propriétés logiques retombe alors sur la possibilité de construire de nouvelles règles d'interprétation. Tout se passe donc comme si, au lieu d'une hiérarchie entre des conditions sémiotiques, mathématiques et logiques, on se trouvait devant une structure complexe de conditionnements réciproques, et qu'on ne pouvait établir une logique formelle que sur leur harmonisation, qui n'est, elle, jamais garantie d'avance.

Pourtant, l'effet de contingence produit par cette absence apparente de hiérarchie (effet que Boole se garde bien d'attribuer à une « volonté arbitraire ») est moins la conséquence de la nature même de cette articulation mathématico-sémio-logique, que de l'insuffisance des

0], ce que nous ne pouvons faire dans les conditions actuelles qui sont celles de la pensée. Il existe des opérations, connues du mathématicien, dont la loi peut être exprimée adéquatement par l'équation $x^3 = x$. Mais elles sont d'une nature complètement étrangère au domaine du raisonnement général. (1992, p. 66)] ressources dont Boole dispose. C'est ce que Boole lui-même laisse entendre lorsqu'il parle d'impossibilité « dans les conditions actuelles de la pensée ». Sans aller jusqu'à reprocher à Boole son incapacité à fournir les règles *a priori* de l'harmonie entre ces trois types de conditionnement par lesquelles pourrait être produite une structure complexe déterminant de nouvelles lois de la raison humaine, on peut remarquer qu'une attention plus décidée aux mécanismes sémiotiques par lesquels les propriétés logiques se laissent conditionner par des déterminations mathématiques lui aurait sans doute permis d'ouvrir cet espace des « conditions de la pensée ». Si l'on s'en tient à ceux que nous décelons dans ces pages, concernant la disparité des régimes de répétition et l'hétérogénéité des principes de différence, on pourrait signaler par exemple le fait remarquable que le terme $1 - x$ (interprétable comme non-*x* dans le cadre du système de Boole) est un facteur de l'équation $x - x^n = 0$, *pour tout* n (entier), suggérant que la différence contradictoire est inhérente à ce mécanisme sémiotique de détermination de la conceptualité, hérité des pratiques mathématiques. Dès lors, si au lieu de procéder à une factorisation totale d'une équation de ce type, on en restait à la mise en facteur du seul terme $1 - x$ (ce qui semble d'ailleurs intuitivement plus justifié) on découvrirait que pour tout n, on a :

$$x - x^n = (1 - x)(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}).$$

Moyennant quelques précisions d'ordre sémiotique (concernant par exemple le statut des indices comme marques de répétition dans le cadre de la somme entre parenthèses, ou la suspension de la validité de la loi $x^i = x$ pour $i < n$, et notamment pour $i = 2$), cette expression semble capturer de manière surprenante le principe de différence conceptuelle tel que nous l'avons restitué précédemment, selon lequel le régime de répétition induit par la loi $x^n - x$ produit un nombre $n - 1$ de subdivisions mutuellement exclusives du terme *x*, maintenant un rapport de contradiction avec la négation de *x*. Il ne faut certainement pas aller trop vite, puisque des nombreuses difficultés d'interprétation ou de cohérence se présentent aussitôt. L'aperçu de cette possibilité suffit pourtant à montrer qu'en explorant cette strate que les discordances du système de Boole trahissent sans cesse, on peut voir s'ouvrir des voies auxquelles Boole n'a su songer, mais que la positivité qu'il a découverte ne permet pas moins de tracer.

À ce propos, il faut sans doute mentionner une autre possibilité concernant moins la capacité de la logique de donner une interprétation aux déterminations mathématiques que la mathématisation des effets sémiotiques induits par les conditions d'interprétabilité logique. Car sans qu'il y ait eu besoin de renoncer à la loi $x^2 = x$, qui concentrait après tout l'essence de sa découverte, Boole aurait pu modifier l'ordre des dépendances et explorer les conséquences de forcer les termes -1 et $1 + x$ (résultant de la factorisation totale de $x^3 - x$)

à satisfaire cette loi. C'est ce que Hailperin suggère à un moment de son étude (1986, p. 82). Comme il le montre, Boole aurait alors trouvé que ce forçage entraîne dans les deux cas la conséquence :

$$x + x = 0$$

pour tout x (avec l'égalité particulière : $1 + 1 = 0$)[335]. Si bien qu'en acceptant la loi $x + x = 0$, l'ensemble du système serait devenu capable d'intégrer les termes problématiques comme des termes interprétables. Seulement, cela aurait obligé à reposer la question de la définition de l'addition, ce qui, on l'a suffisamment vu, constituait un point sensible dans le système que Boole cherchait à ériger.

Il en résulte que, comme le suggèrent ces différentes voies alternatives, l'harmonie entre les trois strates de la détermination (mathématique, sémiotique, logique), exige d'une manière générale un accord, ou plus précisément une *synthèse*, aussi minimale ou hétérodoxe soit-elle, entre les différentes figures de la discordance qui les parcourent : dualité des opérations, disparité des régimes de répétition, hétérogénéité des principes de différence. Et c'est sans doute un accord que Jevons accomplit avec sa « loi d'unité » ($x + x = x$). Mais puisqu'une telle définition de l'opération d'addition calque celle de la multiplication, et que l'addition ne devient de cette façon que le double stérile de celle-ci, l'accord ainsi atteint aux différents niveaux de l'espace de formalisation du sens est trivial. Libérées du besoin de combler la brèche problématique qui s'ouvrait à chacun de ces niveaux, la nécessité du recours aux synthèses sémiotiques des mathématiques se trouve comme court-circuitée, et les déterminations sémiotiques peuvent prétendre supporter de manière directe et univoque les propriétés logiques. Nous l'avons vu, Jevons écarte de manière volontaire et explicite tout argument faisant appel aux propriétés mathématiques des expressions de son système. Les liens originels que la logique maintenait avec les mathématiques se voient ainsi coupés.

Si la première expulsion des mathématiques, ou plus précisément, le premier aspect de cette expulsion, qui écartait l'objectalité dont elles portaient la puissance, était le résultat d'une inhibition de l'engendrement du nombre au niveau de l'opération d'addition au moyen de la loi $x + x = x$, ce second aspect de l'expulsion, ayant trait à la conceptualité, n'est pas

---

[335] Voici la façon dont Hailperin obtient ces résultats (1986, p. 82) :

$$\begin{aligned}(-1)^2 = -1 &\rightarrow 1 = -1\\ &\rightarrow 1 + 1 = 0\\ &\rightarrow x + x = 0, \text{ pour tout } x\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(1 + x)^2 = 1 + x &\rightarrow 1 + x + x + x^2 = 1 + x\\ &\rightarrow 1 + x + x + x = 1 + x\\ &\rightarrow x + x = 0\end{aligned}$$

l'effet de la position de la loi analogue pour la multiplication, mais de la perte d'hétérogénéité occasionnée par l'identité des lois qui régissent les deux opérations fondamentales. L'exclusion des mathématiques, et de l'Arithmétique en particulier, du centre constitutif de la conceptualité logique apparaît ainsi comme la conséquence de la trivialité de l'accord entre les lois qui régulent le régime de répétition d'un signe dont résulte sa différence signifiante. Dans l'écart possible ouvert par une divergence que les Booléens s'évertuent à effacer, c'est toute l'irréductibilité des mathématiques qui prend corps. Et c'est précisément cette irréductibilité que l'addition de Boole assure une seconde fois : si considérée en elle-même, elle permettait d'abord de garder à l'intérieur du système un principe d'engendrement du contenu par l'engendrement du nombre, son hétérogénéité par rapport à la multiplication assure l'existence d'un milieu problématique où des synthèses proprement mathématiques sont appelées à structurer et résoudre, fût-ce provisoirement, les multiples divergences qui y règnent.

Pourtant, c'est précisément cette hétérogénéité que le système de Boole n'arrive pas tout à fait à résoudre. Dans l'impuissance d'articuler les signes soumis à la loi $x^2 = x$ avec ceux (numériques) qui sont l'effet du fonctionnement disparate de la répétition additive, Boole finit par écarter ces derniers. Et certes, cette élimination ne se fait pas moins par une méthode faisant appel aux mathématiques dans leur capacité de rapporter l'un à l'autre les deux principes sémiotiques[336]. Mais les exigences mathématiques incarnées par les signes numériques ne sont pas moins éliminées, et le système logique résultant se laisse au bout du compte facilement réduire à celui qu'aménageront les Booléens. C'est pourquoi il y a toutes les raisons de regretter que Boole n'ait pas envisagé la loi pour l'addition $x + x = 0$. Car si la loi $x + x = x$ de Jevons avait pour conséquence d'éliminer tout vestige mathématique par l'inhibition de l'engendrement du nombre et l'effacement de la véritable dualité des deux opérations, la loi pour l'addition $x + x = 0$ non seulement maintient l'hétérogénéité par rapport à la loi pour la multiplication, mais, loin d'écarter la question fondamentale du nombre, aurait pu susciter une interrogation sur sa structure profonde. Et ce faisant, le principe interne de contenu logique dont Boole avait voulu conserver le germe aurait trouvé, peut-être, les conditions de son développement et de sa consistance.

En effet, par le fonctionnement que la loi $x + x = 0$ induit sur l'addition, une arithmétique pourrait être établie *au niveau des termes conceptuels eux-mêmes*, maintenant un rapport intime et essentiel avec les termes numériques engendrés par l'addition tel que Boole

---

[336] Cf. *supra* p. 278.

s'évertuait à la définir suivant une forme d'objectalité[337]. Une telle arithmétique comporterait uniquement deux éléments, 1 et 0. Pourtant, du point de vue de l'harmonie globale des déterminations, il resterait encore à établir le lien entre la définition du fonctionnement de l'addition sur les deux éléments de cette arithmétique (éléments qui sont fondamentalement déterminés par la soumission des symboles à la loi des indices de la multiplication) et l'addition engendrant la suite infinie de termes numériques originairement prévue par Boole. Cela réclamerait, entre autres, de trouver à quelle condition un symbole comme « 0 » pourrait capturer, et comme « représenter », l'ensemble des termes numériques du type $2x$ (puisque suivant l'opération d'addition en question, on a $x + x = 2x = 0$, pour tout x) ; tout comme le symbole « 1 » capturerait l'ensemble de termes du type $2x + x$ [338], avec l'exigence qui en résulte de réfléchir aux conditions sous lesquelles $ax = -ax$ pour tout coefficient numérique a affectant un symbole x quelconque.

Le traitement de l'ensemble de ces questions exigeait pourtant des synthèses mathématiques qui tombaient hors du champ algébrique qui avait été l'occasion pour l'émergence d'une logique mathématisée, et avec lequel le devenir booléen tendait à l'identifier. Privée du recours à ces synthèses, grâce auxquelles addition et multiplication pourraient s'harmoniser dans une logique du contenu, la tentative de Boole ne peut apparaître que comme l'échec dénoncé par Frege du nouage intérieur de l'Arithmétique et la logique, échec qui n'est autre que l'échec d'une logique du contenu tout court.

III.2.3.3. Les conditions d'interprétabilité

Des éléments substantiels de cette arithmétique, bien que dispersés, sont présents dans le système de Boole, comme des fragments d'un nombre perdu avant même qu'il ait pu se constituer. C'est tout particulièrement le cas de ce que Boole introduit dans les pages de *The Laws of Thought*, sous la forme d'une « Algèbre à deux éléments », en tant qu' « interprétation quantitative » de son système logique, et qu'il appellera par la suite « Algèbre duale » ou encore « Arithmétique de 0 et 1 »[339]. L'intégration dans ce système des déterminations arithmétiques et algébriques selon une articulation de principe se trahit déjà

[337] En effet, comme l'indique Hailperin (1981, p. 177), l'établissement de la loi $1 + 1 = 0$ induit une Arithmétique modulo 2. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces questions dans le dernier chapitre de notre travail.

[338] On devrait parler plutôt des termes de type $2ax$ et $(2a + 1)x$, a étant le coefficient numérique attaché au symbole x.

[339] Voir Boole (1856) et (1997, ch. VII).

dans cette double dénomination. Comme il a été dit, cette arithmétique ou algèbre se constitue en n'admettant que deux valeurs, 0 et 1, pour l'ensemble de ses termes x, y, $z\ldots$ et répond de ce fait aux mêmes lois que le système logique que Boole cherche à mettre en place, au point où Boole affirme l'identité entre Algèbre logique et l'Algèbre duale. Cependant, cette identité n'avait pas été véritablement démontrée lors de l'introduction d'une Algèbre à deux éléments dans *The Laws of Thought*, et Boole ne s'y était intéressé qu'à des fins strictement instrumentales. C'est pourquoi il reviendra sur cette question dans des pages rédigées dans les années suivant la publication de *The Laws of Thought* portant sur les fondements de la théorie mathématique de la logique (Boole, 1856). Dans ces pages demeurées inédites, Boole ne se contente pas de mettre en évidence les raisons de l'identité formelle entre l'Algèbre logique et l'Algèbre à deux termes, il développe certains aspects de cette dernière, qu'il appelle « Algèbre duale » pour l'occasion, car elle ne reconnaît que 0 et 1 comme nombres. Celle-ci fait apparition sous la section « Expressions symboliques des lois formelles de la logique », où il s'agit de justifier l'utilisation des signes algébriques en logique. Boole fait alors appel à la relation fondamentale qui existe entre les deux systèmes (algébrique et logique), et met en avant l'existence d'une « Algèbre spéciale » ayant trait à des idées de nombre, « mais non pas à *toutes* les idées de nombre », dont les lois formelles sont en tout point identiques à celles de la logique (1856, p. 88). Mais en plus de cette identité des lois formelles entre l'Algèbre logique et l'Algèbre duale, déjà esquissée dans *The Laws of Thought*, Boole introduira une identité nouvelle, concernant *les conditions d'interprétabilité* des deux algèbres qui viendra à ses yeux compléter les exigences de justification du rapport intime entre elles, déterminant « un fait de grande importance et portée », au point où « il serait contraire à la philosophie [*unphilosophical*] de le regarder comme une coïncidence purement accidentelle » (p. 94).

Si l'Algèbre numérique ne partage avec l'Algèbre logique que le fonctionnement de l'addition, l'Algèbre duale en revanche coïncide avec elle également dans celui de la multiplication, dans la mesure où ses deux seuls éléments, 0 et 1, remplissent bien la condition $xx = x$. Boole en tirera le principe d'interprétation des expressions algébriques en termes d'Algèbre duale, se correspondant de manière parfaite avec les conditions d'interprétabilité logique. Ainsi, si pour l'addition de deux termes x et y la condition d'interprétabilité s'exprime sous la forme de l'équation $xy = 0$, ce qui logiquement interprété renvoie à l'exclusivité mutuelle des termes additionnés, en Algèbre duale, où x et y ne peuvent prendre que les valeurs 1 et 0, cette condition revient à exclure le cas où $x = 1$ et $y = 1$. De la même manière, Boole détermine les conditions d'interprétabilité de la soustraction $(x - y)$ et de la division $(\frac{x}{y})$ à partir des équations $y(1 - x) = 0$ et $x(1 - y) = 0$ respectivement, ce qui dans le premier cas se laisse comprendre logiquement comme l'inclusion de la classe y dans la classe x, et qui exclue en Algèbre duale le cas où $x = 0$ et $y = 1$, tandis que le second cas renvoie à l'inclusion logique de x dans y, et à l'exclusion du cas où $x = 1$ et $y = 0$ en Algèbre duale (cf. 1856, pp. 92-93).

Dans ces développements, le rapport établi avec l'Algèbre des 0 et 1 relève de plus que d'un simple redoublement des propriétés logiques. Regardées à travers son prisme, les opérations de l'Algèbre logique trouvent de nouveaux moyens pour se définir, à savoir des conditions « duales » sur les termes impliqués, définissant *de véritables tables de vérité avant la lettre*. En effet, il suffit d'envisager les deux éléments 0 et 1 comme « faux » et « vrai » respectivement pour que les conditions établies par Boole dans les termes de l'Algèbre duale soient indiscernables des tables des vérités correspondantes, et cela jusqu'à la disposition des termes, comme il apparaît dans ces pages :

> Interpreted in the system of dual Algebra the condition $xy = 0$ demands that the values of x and y should be so chosen that their product should vanish. And this restricts the actual selection to the following pairs of values viz.:
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | 1st | $x = 1$ | $y = 0$ |
> | 2nd | $x = 0$ | $y = 1$ |
> | 3rd | $x = 0$ | $y = 0$ |
>
> and excludes the combination $x = 1$ $y = 1$. (Boole, 1856, p. 92)

Le tableau ainsi dressé de ces couples d'attribution de valeurs pour les variables x et y constitue bien l'ensemble de conditions de vérité de la négation de la conjonction logique, déterminée par l'équation $xy = 0$, tel qu'on le connait de nos jours. Tableau que Boole dresse également pour les équations $y(1 - x) = 0$ et $x(1 - y) = 0$ (cf. pp. 92-93). On sait que c'est à cette détermination binaire des conditions de la logique que l'avenir attachera le nom de Boole. Cependant, ce n'est pas de cette façon que Boole conçoit le rapport de l'Arithmétique de 0 et 1 et la logique. À commencer par le fait que Boole ne considère jamais 0 et 1 comme des symboles représentant la vérité ou la fausseté. En effet, lorsque Boole éprouve le besoin d'attribuer un sens logique aux termes 0 et 1, ce n'est jamais de vérité et de fausseté qu'il parle, mais d'Univers et de Rien, ou encore, d'existence et de non-existence[340]. Certes, l'interprétation de Boole se voit conditionnée par la prééminence qu'il accorde aux propositions primaires ou catégoriques. Mais même dans le cas des propositions secondaires ou hypothétiques, où la référence à la vérité semble incontournable, ce n'est pas à la vérité

[340] L'interprétation de 0 et 1 comme des termes logiques représentant l'Univers et Rien est présente dans son œuvre, comme nous l'avons vu, depuis *The Mathematical Analysis…* Pour l'interprétation logique de 0 et 1 en tant qu'éléments de l'Algèbre duale, voir par exemple ces pages où il analyse les conditions d'interprétabilité (1856, pp. 92-93, 99-100), et notamment (1997, ch. VII), en particulier p. 116.

que ces termes réfèrent mais à l'ensemble des moments où les propositions en question sont vraies[341], de telle sorte que l'interprétation logique en termes d'univers ou d'existence demeure valable dans ce cas aussi. Qui plus est, les conditions binaires établies ici par Boole ne constituent pas de véritables *définitions* des opérations logiques déterminées par l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Ces opérations restent définies, selon l'esprit des algébristes anglais, par les lois symboliques auxquelles elles sont soumises, et par rapport auxquelles les conditions sur les combinaisons duales des termes impliqués ne sont que des effets. Cela explique que l'on ne trouve pas chez Boole la liste exhaustive de ces tables pour l'ensemble des connecteurs logiques, comme l'exigerait tout système rigoureux de définitions. Plus encore : à bien y regarder, nulle table n'est dressée pour présenter directement les conditions de vérité des expressions élémentaires. Les combinaisons des valeurs duales ne portent que sur des *équations*, telles que $xy = 0$ ou $y(1 - x) = 0$.

La raison en est que si l'attribution des valeurs 1 et 0 dans une équation logique rend bien compte de ses conditions de vérité, ce n'est pas cela son véritable but. Plutôt que de déterminer les conditions de *vérité* de ces équations, ce que l'Algèbre duale permet de faire pour Boole, comme il l'a annoncé dès le début du chapitre, c'est de déterminer à travers ces équations les conditions d'*interprétabilité* des *expressions* fondamentales, autrement dit, les conditions sous lesquelles les opérations logiques mathématisées sont douées de sens. En effet, les équations dont Boole explore les conditions dans les termes d'une Arithmétique duale constituent elles-mêmes les conditions sous lesquelles les différentes expressions composées au moyen de chacun des quatre opérateurs primitifs sont soumises à la loi :

$$VV = V$$

(où V est une combinaison de symboles eux-mêmes soumis à la loi $xx = x$). Ainsi, $xy = 0$ est la condition sous laquelle l'expression « $x + y$ », composée au moyen de l'opération primitive d'addition, remplit la condition $(x + y)(x + y) = x + y$, et peut dès lors être considérée comme une expression *logique*. De ce point de vue, la démarche de Boole est bien exhaustive, dans la mesure où il examine les conditions de vérité des trois équations comportant les conditions d'interprétation de l'ensemble des expressions composées au moyen des opérations élémentaires (la multiplication étant interprétable de manière inconditionnelle).

On comprend ainsi que le problème auquel l'Algèbre duale ou l'Arithmétique de 0 et 1 vient donner une solution est celui qui se cachait derrière l'énigmatique distinction entre *expressions* et *équations* que Boole avançait devant la volonté de Jevons de clore le système

[341] Voir Boole (1854), chapitre XI, et p. 163 en particulier. Sur cette place du temps dans la logique de Boole, on pourra consulter Godart-Wendling (2000).

au moyen de sa loi d'unité[342]. Comme l'indiquait Boole, bien que les équations soient toujours interprétables, les expressions ne le sont pas, et dès lors la question des conditions de leur interprétabilité se pose. L'Algèbre duale agissant au niveau des équations fournit la réponse.

Mais alors l'ordre des dépendances se renverse, et l'exclusion des couples d'attributions de valeurs au niveau des conditions résultantes pour l'interprétabilité des expressions composées (par exemple, l'exclusion du cas où $x = 1$ et $y = 1$ au niveau de l'équation $xy = 0$ pour l'interprétabilité de l'expression « $x + y$ ») n'est pas déterminant, mais déterminé en tant qu'effet du contournement des conséquences pour l'interprétabilité ou pour le sens que de telles attributions comporteraient au niveau des expressions composées elles-mêmes. Ainsi, en prenant le cas où $x = 1$ et $y = 1$, exclu par la condition $xy = 0$ correspondant à l'addition, et en substituant ces valeurs dans l'expression « $x + y$ », cela résulte dans la valeur 2, « *qui n'est pas incluse dans ce système* » (Boole, 1856, p. 92). D'où résulte que Boole n'envisage pas ces attributions comme de véritables *définitions* des opérateurs logiques, mais comme des explorations des conditions sous lesquelles les expressions où ils s'investissent sont douées de sens. C'est pourquoi la loi d'unité n'est pas inconditionnellement valable pour les expressions, ni ne saurait l'être, car pour cela cette inconditionnalité devrait, non pas être posée à la façon d'une définition, mais être avérée comme résultat d'une telle exploration, ce que Boole réfute.

On voit par ailleurs que si la définition des connecteurs au moyen de tables de vérité remonte aux conditions d'interprétabilité par la considération de la totalité fermée des combinaisons possibles d'attribution de valeurs pour les variables logiques, la démarche de Boole va dans le sens inverse : elle établit d'abord les conditions d'interprétabilité ($xy = 0$ comme condition de « $x + y$ ») et cherche à définir la structure formelle capable de dégager les conditions de vérité susceptibles de s'accorder avec elles (Algèbre duale excluant la combinaison $x = 1$ et $y = 1$). La place des mathématiques se révèle ainsi capitale pour la formalisation du sens telle que Boole l'imagine et l'inaugure. Car c'est précisément ce domaine ouvert de déterminations qui lui permet d'établir des conditions générales d'interprétabilité sans dépendre entièrement des combinaisons d'attribution des valeurs (de vérité, d'existence…) pour les termes logiques composés au moyen des opérations de base.

Il suffit de regarder de plus près la démarche dans laquelle Boole inscrit l'Algèbre duale pour constater et comprendre cette nouvelle place des mathématiques. Boole établit que la condition d'interprétabilité logique pour une expression composée au moyen de l'addition

[342] Cf. *supra* p. 284.

(une expression de la forme « $x + y$ ») est $xy = 0$, ce qui en termes de l'Algèbre logique se laisse interpréter comme l'exclusivité mutuelle entre les termes *x* et *y*. Or il ne se contente pas de poser la condition $xy = 0$ en tant que simple symbolisation de l'exclusivité mutuelle des termes, il la déduit au contraire *mathématiquement*, comme une conséquence de la substitution de « $x + y$ » dans la loi générale déterminant le fonctionnement logique des expressions, à savoir $VV = V$ (1856, pp. 91-92). Ainsi, à partir de l'équation :

$$(x + y)(x + y) = x + y,$$

Boole arrive (par commutativité et application de la loi $x^2 = x$ sur *x* et *y*) à l'équation :

$$x + xy + yx + y = x + y,$$

et ensuite, par élimination de $x + y$ des deux côtés du signe égal :

$$xy + yx = 0.$$

Arrivé à ce point, Boole conclut que le terme xy doit être égal à 0, « puisqu'en Logique, la seule classe, et en Algèbre duale le seul nombre, qui étant additionné à lui-même produit Rien est Rien » (p. 92). L'équation $xy = 0$ est ainsi établie comme « condition d'interprétabilité de l'opération consistant à ajouter *y* à *x* dans l'un ou l'autre des systèmes et elle est une condition formellement exprimée » (p. 92), et seule à cette condition l'expression « $x + y$ » peut recevoir un sens logique. De la même façon, la condition $y(1 - x) = 0$ est établie pour la soustraction, bien que Boole ne donne pas cette fois-ci la déduction explicite, et se limite à dire que l'on y arrive en appliquant « la même analyse » (p. 92). On pourrait reconstruire cette démarche de la manière suivante :

$$(x - y)(x - y) = x - y$$

$$x - 2xy + y = x - y$$

$$2y - 2xy = 0$$

$$2y(1 - x) = 0$$

D'où il découle que $y(1 - x) = 0$. Enfin, la condition $x(1 - y) = 0$ pour la division de *x* par *y* est le résultat d'interpréter mathématiquement le sens de cette division suivant l'expression $x = yw$ (où *w* est un terme quelconque), et de multiplier les deux côtés du signe égal par $1 - y$, ce qui rend le côté droit égal à 0 à cause de la loi (logique ou duale) : $y(1 - y) = 0$.

On voit donc que tous les développements qui conduisent depuis les expressions composées de base jusqu'à l'établissement de ses conditions d'interprétation logique, moyennant leur inscription dans la forme équationnelle $VV = V$, s'autorisent d'abord et avant tout des déterminations établies dans les mathématiques. C'est sur fond de ces déterminations que l'Algèbre logique et l'Algèbre duale viennent découper leurs sens, et sanctionner, par leur accord, leur propre consistance. Mais c'est aussi par ce fond mathématique que le caractère formel de la logique ne s'épuise pas dans la définition des conditions de vérité déterminées par une structure comme l'Algèbre duale, et va jusqu'à comprendre le travail de définition des frontières de l'interprétabilité, ce qui veut dire, les frontières de la logicité tout court. Car si par l'exclusion de la combinaison $x = y = 1$ pour l'équation $xy = 0$, l'Algèbre duale confirme la condition d'interprétabilité prévue par l'Algèbre logique, c'est dans la mesure où cette combinaison rendrait le terme $x + y$ égal à 2, qui, quoique mathématiquement acceptable, tombe hors du cadre que Boole a fixé sous le nom d'Algèbre duale. C'est dire à quel point les termes 0 et 1, avant d'être des représentations de l'existence, de l'universalité, voire même de la vérité, constituent *de véritables nombres*. Ou plus exactement ils constituent *des éléments comportant une dimension numérique essentielle et incontournable*. C'est pourquoi il faudrait parler d'Arithmétique duale au lieu d'Algèbre duale (comme Boole le suggère lorsqu'il parle d' « Arithmétique de 0 et 1 »). Inscrits dans un système formel qui reproduit la structure et le fonctionnement de la conceptualité, ces termes devenus par là conceptuels n'abandonnent pas pour autant la nature arithmétique qui était d'abord la leur. Ils continuent ainsi à plonger, grâce à cette nature, dans le vaste domaine des mathématiques où se joue la frontière en deçà de laquelle la logique pourra fonctionner sereinement. C'est par cette dimension numérique que « $1 + 1$ » peut renvoyer à « 2 », et c'est bien par cette dimension que l'Arithmétique duale communique avec la logique pour contribuer à la détermination des frontières de sa signification ou de son sens, puisque c'est par cette nature que le risque de l'insignifiance ou du non-sens n'est jamais conjuré, et que le problème, non pas de l'interprétation, mais plus profondément de ses conditions, c'est-à-dire de l'*interprétabilité* des *expressions* demeure constamment ouvert. C'est dans la mesure non seulement où le nombre 2 existe, mais aussi où il est le résultat de l'addition de 1 à 1 selon des procédures mathématiques douées de sens, que la non-interprétabilité des expressions logiques peut être *exhibée*. Dans ce sens, il faudrait voir dans la valeur 2 pour un symbole du type x (ou plus généralement, dans une valeur numérique quelconque autre que 1 et 0 pour une expression fonctionnelle V) la marque positive du non-sens logique, tout comme on dira des valeurs 0 et 1 pour le même symbole qu'ils constituent la marque de la vérité ou de la fausseté d'un énoncé. Sans doute ces éléments, moyennant leur place dans une structure comme celle de l'Arithmétique duale, pourvoient la forme de ce qui pourra plus tard être posé, sous la plume de Frege, comme le niveau le plus élevé d'articulation du contenu formel (le vrai et le faux). Mais la possibilité de considérer la valeur 2 comme résultat de l'attribution de la valeur 1 aux symboles x et y dans l'expression « $x + y$ », fût-ce pour l'exclure aussitôt, montre bien que ce n'est pas de vérité ou de fausseté qu'il s'agit avant tout dans les termes 0 et 1 de l'Algèbre duale booléenne (qu'est-ce que « 2 » pourrait vouloir dire comme résultat de la disjonction du vrai et du vrai ?). D'un point de vue *logique*, l'équation $xy = 0$ est certainement fausse lorsque on attribue la valeur 1 à x et à y ; mais il n'en est pas de même pour l’équation $(x + y)(x + y) = x + y$, dont la première ne fait que fournir la condition d’interprétabilité. Pour être fausse, elle devrait d’abord être, non pas interprétée, mais interprétable logiquement, c’est-à-dire douée d’un sens logique. Ce que la valeur 2, à laquelle la composition additive des « 1 » renvoie, vient démentir, puisqu’elle « n’appartient pas au système » de l’Arithmétique duale, découpé sur fond de l’Arithmétique tout court. Ce n’est donc pas de vérité et de fausseté qu’il s’agit dans le rapport de l’Algèbre logique à l’Arithmétique duale, mais du recours à *un domaine où peuvent se définir les frontières dans l’espace sans bord des expressions à l’intérieur desquelles l’existence ou la vérité sont douées de sens et deviennent par là capables d’interprétation*. Les tables de Boole ainsi n’ont pas pour fonction de fixer les conditions de vérité des symboles logiques, mais de montrer le lieu par où les expressions logiques ouvrent sur le non-sens.

Il apparaît une fois de plus que, dans la naissance même de la formalisation de la logique, le domaine qui rend possible cette présentation du dehors du sens en fonction duquel se définit la logique, est celui des mathématiques. C’est aussi grâce aux mathématiques que ce risque du non-sens et ce problème de l’interprétabilité peuvent être relevés et trouver des solutions, en vertu des déterminations internes à la structure complexe de formalisation constituée par les rapports entre mathématiques, logique et sémiotique. On retrouve ici, tout comme dans le cas du degré de l’équation $x^n = x$ définissant la forme générale (« *n*-chotomique ») de la conceptualité, la différence du système de Boole relativement à celui de Jevons et ses successeurs. Car la définition de l’addition des Booléens rend les expressions additives interprétables sans conditions, et leur épargne le problème d’une détermination formelle immanente de l’interprétabilité en tant que telle. La distance entre interprétabilité et vérité s’efface, et les conditions de la première tendront à n’être restituées que comme une généralisation des conditions de la seconde. L’économie de la soustraction par l’introduction primitive de la négation, ainsi que l’inexistence de la division, ne sont que des formes de cet effacement. Il en résulte que le système formel de la logique n’a pas besoin dans ce cas de se penser sur fond du territoire ouvert d’expressions incertaines et de déterminations mathématiques, comme une structure mathématique parmi d’autres, définissant des frontières expressives singulières : il lui suffit de se présenter directement comme un système de signes *sui generis*, avec son propre matériau symbolique et ses propres règles, d’autant plus universel et autonome que ce matériau et ces règles seront simples.

Il est clair par conséquent que les Booléens n’envisagent pas de la même manière que Boole l’articulation entre les déterminations sémiotiques, mathématiques et logiques. Dans l’agencement de l’espace de la formalisation effectué par l’héritage booléen, le rapport aux mathématiques apparaît comme venant de l’extérieur et après coup. D’où les prétentions fondationnelles de la logique à l’égard des mathématiques qui commencent à apparaître avec

Jevons. Mais même en ce cas on aurait tort de croire que le rapport de la logique aux mathématiques dans sa dimension *constitutive* puisse être ainsi entièrement élidé. Car la constitution d'un tel système n'en recèle pas moins des conditions sémiotiques qui ne cessent de se mesurer à leur capacité de s'accorder aux déterminations mathématiques. Seulement, la nature de cet accord diffère de celle sur laquelle Boole avait voulu appuyer sa formalisation de la logique. Et cela parce que les lois de la logique fonctionnent pour Boole avant tout comme des lois symboliques établissant des conditions spécifiques de sélection des expressions pures en faisant appel aux formes appartenant au territoire plus vaste des mathématiques. Pour les Booléens en revanche, cet accord résulte du fait que les lois définissant les limites de la logique sont envisagées moins comme des *conditions* formelles sélectionnant des expressions ou des structures, que comme des *définitions* capables de les déterminer et de les construire.

Sans doute ce statut définitionnel des lois symboliques est-il animé par l'esprit de l'Abstraction symbolique qui fournit le cadre dans lequel la formalisation du sens a pu naître et se développer. Mais à radicaliser cette souveraineté définitionnelle des lois symboliques – à laquelle Boole n'est d'ailleurs pas tout à fait étranger – le problème de l'interprétabilité, c'est-à-dire des conditions du sens des expressions logiques tel que Boole essayait de le mettre en œuvre, change de nature, si tant est qu'il continue même à se poser. En faisant des lois symboliques autant de conditions opérant dans l'espace des mathématiques, Boole rendait le problème de l'interprétabilité ou du sens susceptible d'un traitement interne ou immanent à la structure de formalisation. En déterminant directement les propriétés logiques par des lois symboliques, les Booléens se privent des instruments mathématiques par lesquels ce problème se laisserait aborder. D'ailleurs, le problème de l'interprétabilité des expressions cesse tout à fait de se poser dans la mesure où les expressions formelles sont interprétables de manière inconditionnelle *par définition*. Dès lors, le problème du sens possible de ces expressions ne pourra se poser que de l'extérieur.

L'effort de Boole pour intégrer dans son système, sous la forme d'une Algèbre duale, des éléments substantiels d'une Arithmétique nouvelle, doit donc être compris, malgré le manque d'unité et d'intégration, comme *une tentative d'assumer le problème de l'interprétabilité ou du sens des expressions à l'intérieur même de la structure complexe où se joue le processus de formalisation de la logique*. L'Algèbre duale de Boole constitue à cet égard une solution possible à ce problème, où la limite entre interprétable et non-interprétable se laisse capturer à partir de la limite qui distingue l'Arithmétique duale de l'Arithmétique tout court. On voit que les mathématiques occupent ici une place analogue à celle depuis laquelle elles contribuaient à exclure les termes à coefficients numériques au moyen du développement des fonctions. Ce n'est d'ailleurs pas par hasard si l'Algèbre à deux valeurs fournit une méthode qui vient remplacer celle qui était appuyée sur le développement analytique des fonctions. Aussi, peut-on voir dans cette place nouvellement accordée aux mathématiques encore un effort pour garder à l'intérieur du système de la logique mathématisée la capacité d'un traitement formel *du contenu*. Non pas cette fois-ci sous la forme des contenus objectaux que les termes logiques sont censés abstraire et ne pouvoir récupérer que par interprétation, et dont Boole essayait de garder la forme exprimée dans les coefficients numériques. Si les mathématiques et plus précisément l'arithmétique que Boole essaie d'introduire ici se rapporte au contenu, c'est dans la mesure où, en tentant de définir la plage d'interprétabilité logique pour des expressions formelles, elle cherche à déterminer le domaine des contenus logiquement (c'est-à-dire conceptuellement) possibles[343]. En s'en tenant à la distinction entre la forme de l'objectalité donnée par la répétition indéfinie de l'addition, et la forme de la conceptualité déterminée par le principe de différence induit par la répétition cyclique de la multiplication, on peut dire que ce n'est pas la *forme objectale du contenu* que l'Algèbre duale incarne, mais pour ainsi dire la *forme conceptuelle du contenu* qu'elle cherche à dessiner.

[343] La référence à des contenus objectaux par lesquels interpréter les termes abstraits n'est pourtant pas absente dans cette seconde forme du contenu. Elle apparaît sous la forme du 0 et du 1 comme des interprétations possibles pour les termes, et en fonction desquelles déterminer les expressions non interprétables. Dans ce sens, 0 et 1 deviennent la forme la plus rudimentaire du contenu objectale capable d'interpréter les termes logiques : existence, non existence. Ils prennent la place, pour ainsi dire, du contenu « vu à travers » les concepts. Voir Boole (1997, p. 114).

III.3. Les synthèses mathématiques

III.3.1. La place des mathématiques

Après cette reconstitution de la série des articulations par lesquelles le nombre, en tant que carrefour de déterminations mathématiques, assure la présence d'un principe de contenu à l'intérieur du système logique singulier construit par Boole dans le cadre de l'Abstraction symbolique, une certaine dualité divergente se dessine : dualité des opérations symboliques (addition et multiplication) héritée des mathématiques, assurant une disparité de régimes de répétition sémiotique (indéfini et cyclique), qui anime des principes de différenciation signifiante hétérogènes (numérique et conceptuelle). Le contenu formel, qui se manifeste plutôt à travers les traces qu'il laisse à la surface du système que dans une élaboration explicite, apparaît essentiellement scindé : *forme objectale et forme conceptuelle du contenu*, la première ayant trait à la forme numériquement distincte des objets tombant sous des concepts logiques par interprétation, la seconde déterminant une forme générale de conceptualité (dichotomie) en même temps qu'un ensemble ouvert de conditions d'interprétabilité de ces concepts, en fonction de leur capacité à fonctionner comme des classes pour ces objets. Ce contenu et cette scission trouvent une correspondance dans la configuration sémiologique du régime dans lequel la logique mathématisée naissante s'exprime, à travers l'opposition des objets et des classes, et cela confirme que cette logique naît dans le cours d'un processus de formalisation du sens. Il s'agit maintenant de montrer que ce sont des mécanismes liés aux propriétés sémiotiques des différentes dimensions de l'Arithmétique qui permettent de découvrir les déterminations de cette forme scindée du contenu. Il faut donc revenir plus précisément sur ce que nous avons posé d'une manière générale.

En effet, sous les fonctionnements précis que nous avons analysés, c'est par l'incorporation de signes numériques, et des moyens mathématiques de les traiter, que Boole essaie de conserver des traces formelles du contenu dans le système, soit comme forme de l'objectalité, soit comme forme de la conceptualité. Ainsi, c'est le signe « 2 » comme coefficient dans une expression comme « $x + y = 2xy + x(1 - y) + y(1 - x)$ » qui exprime à sa manière une différence numérique déterminant des objets ou éléments appartenant aux classes x et y ; c'est aussi le signe « 2 » comme marque du degré d'une équation qui dans une loi symbolique comme $x^2 = x$ détermine la forme inévitablement dichotomique de la conceptualité en tant que telle ; et c'est encore le signe « 2 » qui exhibe l'incapacité d'une expression comme « $x + y$ » à fonctionner comme une classe d'objets dans le cas où l'intersection des classes correspondant à x et y ne serait pas vide (c'est-à-dire, où $xy \neq 0$). Et sans doute un lien plus ou moins manifeste relie ces circonstances : c'est à condition que $xy = 0$ que le terme comportant un coefficient numérique dans la première de ces expressions se voit éliminé, ce qui s'accorde avec le fait que le terme $2xy$ ne remplit pas la loi fondamentale $x^2 = x$ (ou plutôt $V^2 = V$) lorsque cette condition n'est pas remplie[344]. Cependant, la valeur « 2 » dont il est question dans l'interprétabilité de la forme conceptuelle de contenu ne se confond aucunement avec le degré « 2 » déterminant sa dichotomie, tout comme aucun d'eux ne se confond avec le « 2 » comme coefficient numérique incarnant la forme objectale de contenu. En effet, le « 2 » comme coefficient numérique n'est, du point de vue sémiotique, qu'un raccourci d'écriture pour indiquer la répétition de l'addition sur un même symbole ; en cette qualité, il était un signe qui affecte les symboles logiques, sans en devenir un lui-même du fait de sa nature indéfinie et hétérogène. Le « 2 » comme signe d'indice partage cette fonction d'affectation des symboles, mais d'une façon telle que la disparité de la répétition qui l'engendre ne saurait s'intégrer avec le « 2 » comme coefficient. En revanche, le « 2 » dont il est question dans la délimitation de l'interprétabilité des concepts n'affecte pas un symbole, mais se présente comme sa valeur, tenant lieu de son interprétation ou son sens, tout comme les valeurs 0 et 1 sont attribuées aux symboles des expressions logiques selon le fonctionnement de l'Algèbre duale. Et c'est précisément en tant que valeur (impossible) pour ces symboles qu'il exhibe le non-sens logique, et détermine la frontière de l'interprétabilité des concepts. On pourrait dire que si le signe « 2 » comme signe d'indice définit la limite minimale de la différence conceptuelle (dichotomie), le signe « 2 » comme coefficient numérique exprime la limite de cette conceptualité logique abstraite à l'égard de son contenu objectal, tandis que le signe « 2 » comme valeur numérique pour un symbole logique exprime sa limite par rapport à son interprétabilité ; si le premier définit la forme générale de la conceptualité abstraite, le second exprime des formes objectales pour lesquelles il ne saurait y avoir de concepts, et le troisième exprime des formes conceptuelles auxquelles aucun objet ne saurait correspondre, selon une hétérogénéité qui incarne sans reste la scission originelle et constituante du contenu.

[344] C'est en cela que réside l'essence de la méthode de développement des fonctions logiques, dans sa version aménagée au moyen de l'Algèbre duale (cf. *supra* p. 277).

Que tous ces « 2 », ou plus généralement, que les signes numériques appartenant à ces différentes dimensions ne coïncident ni par leur fonctionnement sémiotique, ni par leur statut logique, *voilà le drame constitutif du système formel érigé par Boole*. L'irrésolution de cette dispersion première explique certainement que, malgré une volonté discrète mais constante et toute une série d'intuitions et de constructions, Boole ne soit jamais parvenu à proposer une notion de contenu, et plus généralement une théorie du sens ou de la signification (*meaning*), capable de définir une voie alternative au solide cadre de l'Abstraction symbolique, qui finira par imposer son propre sens aux lectures postérieures du logicien anglais. Or si ces signes numériques qui portent toute la puissance du contenu formel divergent quant à leur nature tant sémiotique que logique, ils renferment néanmoins une consistance et une identité du fait, évident mais primordial, de *leur appartenance au domaine des mathématiques*. Ce qui veut dire que dans tous ces cas, les propriétés arithmétiques du nombre 2 sont respectées. Aussi les différents cas d'inscription des signes logiques dans les pratiques sémiotiques des mathématiques que nous avons relevés chez Boole montrent-ils suffisamment le rôle à la fois silencieux et décisif des mathématiques comme lieu d'une unité complexe mais possible, où les formes d'un contenu logique objectal pourraient être construites, en accord avec le tracé d'une frontière au-delà de laquelle les expressions cessent d'avoir une signification logique.

Rien de plus éloquent à cet égard que quelques lignes des pages manuscrites rédigées après la parution de *The Laws of Thought* (probablement bien après), où Boole reprend la défense de la mathématisation de la logique avec un souffle renouvelé. Ces pages commencent par mentionner les noms de Leibniz, Euler, Drobisch, Plouquet, Lambert et De Morgan comme indices de l'existence d'un fondement pour les spéculations sur la possibilité de réduire le développement technique de la Science de la logique à la « domination des formes mathématiques ». Après quoi Boole affirme :

> There are indeed some plausible objections against the doctrine that the Science of Logic admits of a mathematical development or that it can properly be termed a mathematical science. For it is obvious to remark and the remark has indeed often been made that Logic is conversant with things under no limitation of kind, while mathematics is conversant with things only as they fall under the abstractions of number and magnitude. The answer to this objection will almost entirely depend upon what we conceive mathematics in its essential nature to be. (Boole, 1997, p. 188)

L'objection n'est légitime, continue Boole, que si l'objet des mathématiques se voit réduit aux conceptions de nombre et de grandeur. Pourtant, les mathématiques, comme n'importe quelle autre dimension des idées humaines, font l'objet de croissance et de changement. À tel point que nombre et grandeur y cèdent leur place aux lois auxquelles ils sont soumis. Dès lors,

> …if we consider the Science of Mathematics as no longer defined in its essential character by the nature of its subject matter but by the forms and the method of its procedure (those forms and that method having as has been said their origin in the laws of thought) the question whether Logic is or is not a mathe- (Boole, 1997, p. 189)

En ce point critique, l'édition du manuscrit s'interrompt brusquement. Non pas que le manuscrit soit resté inachevé, mais la page numéro 4 contenant la suite a été perdue. Pour dramatiser un peu cet épisode, les éditeurs observent qu' « il a dû y avoir quelque chose de pertinent sur [cette page] car la page 5 commence avec l'énoncé : "Celle-ci est la question que je propose de tenter de couvrir dans le présent essai." » (Boole, 1997, p. 218). Après quoi on trouve, selon les mots des éditeurs, qui n'ont pas considéré nécessaire de publier les pages suivantes, la présentation habituelle des symboles et des lois du système logique. Voilà une belle image de la situation des mathématiques que nous avons essayée de mettre en évidence à travers la formalisation de la logique ouverte par les travaux de Boole : elles ne cessent jamais de revenir avec insistance à la première place, sans cependant que cette place soit justifiée à partir d'une réflexion sur la nature du nombre.

Il ne faut pas néanmoins céder trop facilement à la séduction des images. Pas plus qu'à l'émotion dramatique d'ailleurs. Après tout, il est fort improbable que cette page manquante, qui n'est d'ailleurs pas la seule dans cet écrit, ait comporté des révélations radicales, puisque rien de nouveau ne semble transparaître dans les pages qui suivent. Il semble donc plus fécond de se poser la question non pas de ce qui manque dans ces pages, mais plus profondément, de ce qui manque dans le traitement donné par Boole aux mathématiques tout au long de son œuvre logique, ce qui leur permettrait d'assumer la place primordiale que de fait elles ne cessent de reprendre de force.

À cet égard, ces dernières pages manuscrites témoignent, en dépit de leur état fragmentaire, d'une originalité subtile qui confirme la direction dans laquelle la perspective de Boole sur ce sujet s'est développée de façon presque imperceptible, depuis ses premiers écrits jusqu'à ses notes finales. Et ce faisant, elles indiquent une orientation qui s'est dessinée comme en filigrane au fil des analyses qui nous ont menées jusqu'ici. Car ce que Boole suggère dans ces lignes tronquées, c'est qu'une réponse positive est possible à la question des fondements mathématiques de la logique, *à condition de s'engager dans une transformation de ce qui fait le caractère essentiel des mathématiques*. Et cela, au moyen d'un dégagement des lois auxquelles répondent les conceptions du nombre et de la grandeur.

Ce propos s'inscrit sans doute dans l'esprit ouvert par l'Algèbre anglaise, articulé dans l'Abstraction symbolique qui animera les développements postérieurs de la logique formelle booléenne. En ce sens, le dernier paragraphe que nous avons cité pourrait bien convenir aux conceptions de Jevons et de ses successeurs. Pourtant, à bien y regarder, ces pages trahissent la façon dont la vision de Boole échappe très subtilement à l'Abstraction symbolique telle qu'elle est assumée et mise en œuvre par les Booléens. Car bien que dans ces lignes Boole parle des méthodes et procédures ayant leur origine dans les lois de la pensée, et auxquelles les domaines du nombre et de la grandeur seraient soumis, ses formulations ne se laissent pas comprendre dans le sens du logicisme avant la lettre qui sera celui de Jevons. Pour deux raisons au moins, à savoir que les mêmes lois dont Boole parle sont d'abord présentées comme étant celles qui correspondent directement au nombre et à la grandeur, et que ces lois, loin de coïncider avec la logique pour s'identifier à elle, la dépassent :

> Perhaps it is not too much to say that the elements of a similar change of view [to the ones in Astronomy or chemistry] have gradually been evolved in connexion with the study of mathematics. The conceptions of Number and magnitude have become less prominently characteristic than the laws of thought to which these conceptions are subject – laws which certainly overstep the rules of technical Logic. (Boole, 1997, p. 189)

Il en découle la conclusion strictement opposée à celle de Jevons : le dégagement des lois et procédures correspondant au domaine du nombre, loin de supposer l'abandon du territoire des mathématiques au nom de celui plus vaste et général – parce que plus abstrait – de la logique, replace les mathématiques elles-mêmes (puisque ces lois continuent à être mathématiques, au point de définir leur essence) en tant que domaine sur fond duquel la logique aura à découper son territoire.

Cette perspective, qui explicite celle que nous avons analysée, se voit enrichie ici d'une conception des mathématiques comme susceptibles de variation quant à ce qui constitue leur nature essentielle, non moins que d'une dimension historique dans laquelle cette variation pourrait prendre appui (c'est le sens de la série des noms commençant par Leibniz et Euler et allant jusqu'à De Morgan). L'introduction d'une telle dimension n'est pas accessoire, même si elle semble occuper une place secondaire à l'égard des développements plus « techniques » : elle assure une certaine immanence des lois algébriques par rapport aux objets (c'est-à-dire, les nombres) dont elles sont extraites, puisqu'elle inscrit le changement d'accent (depuis les objets jusqu'aux lois) dans le cadre d'un mouvement interne aux mathématiques. Cela fait que les lois algébriques ne se rapportent pas au nombre comme à des lois arbitraires qui lui arrivent du dehors – comme le développement de l'Algèbre symbolique avait tendance à les concevoir –, mais comme un fonctionnement qui lui est parfaitement inhérent. Dès lors, la logique formalisée à partir du fonctionnement de ces lois ne saurait se détacher de la nature mathématique qui est la sienne.

Cette inhérence de l'Algèbre à l'Arithmétique caractéristique de l'approche logique de Boole fait de lui un héritier atypique de l'esprit de l'Algèbre de Cambridge. Certes, Boole assume entièrement la découverte du symbolique faite par les algébristes anglais, tout en en élargissant les conséquences à la fois mathématiques et logiques. Toutefois, il ne semble pas prêt à accorder au symbolique l'autonomie radicale qui entrainerait la dissociation irrémédiable de l'Algèbre par rapport à l'Arithmétique, au nom de laquelle ses professeurs et collègues avaient effectué cette découverte. De ce fait, les constructions logiques de Boole sont sensibles à un principe de détermination et d'ajustement réciproques des différentes strates de l'espace de la formalisation du sens, qui résiste aux conceptions et mécanismes dictés par l'Abstraction symbolique. Ce principe est certes précaire, et d'autant plus fragile qu'il n'est guère assumé de façon ouverte, consciente ou explicite. Il n'en est pas moins constatable dans ses effets. Aussi le type de formalisation du sens ouvert par ses propres travaux portera-t-il cette résistance comme marque de naissance. C'est encore cette résistance qui se manifeste à travers la position de Boole à la fin de sa carrière au sujet de la place des mathématiques par rapport à la logique. Car elle vient accorder aux mathématiques le rôle qu'elles ont toujours implicitement joué pour l'édification de son système : celui d'un *lieu de synthèse* outrepassant (*overstep*) les règles de la logique, où des formes hétérogènes peuvent trouver les conditions et les principes inattendus de leur identité complexe ou de leur correspondance consistante. C'est donc bien par ces synthèses mathématiques que le contenu résiste dans la logique.

Mais ce lieu où ces consistances et ces identités existent presque comme un fait est, à n'en pas douter, hautement problématique. Car ces synthèses ne peuvent être dégagées pour valoir comme des déterminations logiques qu'au moyen d'une analyse sémiotique, qui ne les investit d'une positivité qu'au risque d'ambiguïtés et d'incertitudes inattendues, révélant l'action de nouvelles synthèses. De sorte que, si ces synthèses mathématiques apportent des solutions positives à l'hétérogénéité et la divergence sémio-logiques du contenu formel, ces solutions s'avèrent toujours incapables d'épuiser le problème. De ce fait, la frontière entre le logique et le non-logique demeure instable et susceptible de redéfinitions continuelles. Mais pour la même raison, le socle de positivité mathématique ne l'est pas moins, comme Boole finit par l'assumer dans ses formulations tardives. C'est pourquoi si l'on peut reprocher aux Booléens d'avoir escamoté cette place primordiale des mathématiques, et de l'Arithmétique tout particulièrement, au nom d'une prétendue suffisance formelle du symbolique, on peut déplorer inversement que Boole ait accordé *de fait* aux mathématiques une fixité trop astreignante vis-à-vis de la spontanéité des purs signes, réduisant ainsi ces derniers à la passivité du simple conditionnement.

En effet, tout comme dans le cas de la factorisation des équations de deuxième, troisième ou n-ième degré, informant la dichotomie, la trichotomie ou la « n-chotomie » de la conceptualité, des ouvertures semblent possibles au niveau de la structure et de la procédure par laquelle des conditions d'interprétabilité sont dégagées. Mais cela, uniquement à condition que ce qui est d'habitude regardé comme arithmétiquement inadmissible trouve une consistance nouvelle au moyen de synthèses d'ordre principalement sémiotique. De telles déterminations auraient la puissance de capturer l'homogénéité complexe dont sont investis les objets mathématiques, et de la mettre au service des constructions logiques. Ce qui pourrait entraîner des redéfinitions de la frontière délimitant l'espace du logique. Et cela parce qu'aux différents niveaux du développement mathématique au moyen duquel Boole cherche constamment à tracer cette frontière, des modifications dans le fonctionnement sémiotique des opérations pourraient occasionner une transformation des conséquences à tirer pour les conditions d'interprétabilité des expressions. De telles modifications pourraient aller jusqu'une validité logique inconditionnelle des expressions, sans que pour autant la place décisive de l'espace mathématique se voie remise en cause.

Dans cette direction, il est étonnant de remarquer que l'on retrouve à ce niveau une possibilité qui se présentait déjà au moment où des régimes non dichotomiques de conceptualité s'offraient à la considération des déterminations mathématiques. On se rappellera que Boole traçait la frontière séparant le logique du non-logique entre l'équation $x^2 = x$ et $x^3 = x$, parce que le sens mathématique de cette dernière loi renvoyait à des expressions telles que « -1 » et « $1 + x$ », qui sont soit incompatibles avec la loi $x^2 = x$, soit ininterprétables dans l'état actuel de la pensée. Suivant les analyses de Hailperin, un renversement du sens de la détermination forçant (symboliquement) de tels termes à satisfaire la loi duale des indices (au lieu de faire de cette loi une condition excluant mathématiquement certains cas), rendait les expressions en question, et par conséquent, la loi $x^3 = x$, logiquement interprétable *par définition*, sans épargner pour autant le passage par les mathématiques. Cela impliquerait néanmoins d'assumer les conséquences formelles d'un tel geste, dont le caractère problématique s'avère dans des expressions comme « $1 = -1$ », « $x + x = 0$ » ou « $2x = 0$ » pour tout *x*.

De la même façon, les développements de Boole par lesquels des conditions d'interprétabilité sont dégagées pour les différentes expressions logiques composées, le confrontaient à l'équation $xy + yx = 0$. Cette équation se présente à un moment clé de la déduction, puisque c'est directement d'elle que la condition $xy = 0$ va être dégagée, « puisqu'en Logique, la seule classe, et en Algèbre duale le seul nombre, qui étant additionné à lui-même produit Rien est Rien » (1856, p. 92). Cette justification donnée par Boole est significative puisqu'elle fait porter le pas final du dégagement de la condition formelle d'interprétabilité sur des propriétés non directement mathématiques ou arithmétiques, à savoir des propriétés associées à l'Algèbre logique, ou l'Algèbre duale (c'est-à-dire, l'algèbre résultant du conditionnement des mathématiques par les lois sémiotiques de la logique)[345]. Raison de plus donc pour penser que d'autres synthèses pourraient intervenir ici et modifier les conditions d'interprétabilité définissant les frontières du logique. On remarque alors qu'à travers l'équation $xy + yx = 0$, la structure du problème suggère une fois de plus, sous condition de commutativité de la multiplication[346], l'égalité $w + w = 0$[347], que Boole assume sans exprimer formellement. Or si au lieu d'envisager cette équation comme une condition limitative (induisant le résultat $w = 0$, dont Boole tirera la condition d'interprétabilité $xy = 0$) on faisait appel à la puissance synthétique des signes pour en faire une loi symbolique déterminante, nous obtiendrions ici aussi que les expressions additives de type « $x + y$ » soient interprétables sans restrictions, sans pour autant, une fois de plus, esquiver la place fondamentale des mathématiques comme lieu où cette interprétabilité se forge.

On peut en effet faire intervenir la capacité purement symbolique d'établir des lois, suivant la découverte des algébristes anglais, sans reproduire néanmoins la marginalisation des mathématiques par les Booléens : ainsi, en rendant l'expression « $x + y$ » toujours interprétable, on ne conjure pas le problème qui est à la base de la constitution de signes numériques, à savoir $x + x \neq x$ pour tout $x \neq 0$. Sans compter que l'égalité $x + x = 0$ ne saurait être posée comme une loi immédiatement logique. Bien au contraire, cette loi purement symbolique obligerait à penser le problème de la nature sémiotique des nombres, non moins que de son rapport à la logique, d'une manière différente. Les conséquences sémiotiques qui en découlent seraient encore ici capables d'occasionner des interrogations touchant à la structure même des nombres. Ces conséquences coïncident au demeurant avec celles que nous avons rencontrées au moment de l'analyse du rapport entre la forme générale de conceptualité et le degré de l'équation déterminant la loi fondamentale de la logique, à savoir : $2ax = 0$, $(2a + 1)x = x$, $-ax = ax$… Mais à ces conditions, les procédures établies par Boole autour de l'Algèbre duale permettent d'en ajouter d'autres, d'une nature légèrement différente. Et cela parce que l'intervention de l'Algèbre duale dans l'établissement de l'interprétabilité est telle qu'une correspondance s'instaure entre des tables d'attribution des valeurs 0 et 1 pour des conditions formelles et l'interprétabilité des termes résultant de la

---

[345] Cette situation ne se réduit pas au cas des conditions pour l'addition ; un argument analogue (bien que moins manifeste) intervient au même moment pour la soustraction, et l'argument $y(1 - y) = 0$, de nature éminemment logique, fait de même pour le dégagement final de la condition pour la division.

[346] Cette condition de commutativité mérite ici d'être soulignée car la non commutativité, (que Boole avait rencontré dans ses recherches mathématiques, mais qu'il n'a jamais sérieusement envisagé dans le cadre de la logique), constitue également une voie pour l'ouverture des possibilités nouvelles dans l'espace de la formalisation du sens, tel que le montreront les développements de la logique au XX^e siècle.

[347] Nous utilisons la variable *w* ici au lieu de *x* pour exprimer cette équation/loi, afin qu'elle ne se confonde pas avec celle de l'expression précédente.

substitution de ces valeurs dans l'équation de départ (par exemple : $xy = 0$ exclue $x = y = 1$ qui résulterait en $x + y = 2$, avec « 2 » ininterprétable). Dès lors, l'interprétabilité sans restrictions de l'addition ou de la soustraction forcerait à considérer interprétables des termes comme 2 ou -1, et donc (à travers leur substitution dans la forme de la loi $x^2 = x$) à assumer des égalités telles que $2 = 4$ ou $-1 = 1$ comme douées de sens, avec la série des conséquences qui en découlent pour les signes numériques en question, à commencer par $2 = 0$, immédiatement déductible de ces deux expressions.

Bien que toutes ces dernières expressions ressemblent sous certains aspects à celles que nous avions déjà rencontrées, elles n'en différent pas moins de manière essentielle. En effet, comme nous l'avons déjà énoncé, dans les expressions symboliques directement déduites de $x + x = 0$, les signes numériques n'occupent que la place des coefficients affectant des symboles (c'est pourquoi nous avons dû ajouter un signe « a » d'un type nouveau pour exprimer correctement la généralisation de l'expression $2x = 0$, c'est-à-dire $2ax = 0$). Dans le cadre instauré par l'Algèbre duale, en revanche, les signes numériques prennent la place des symboles eux-mêmes (et non pas des coefficients affectant des termes). C'est dire que l'Algèbre duale témoigne bien d'une certaine spontanéité sémiotique de la part de Boole, et que cette spontanéité prend en charge de manière efficace le problème d'une intégration consistante de l'Arithmétique (et des mathématiques en général) et de la logique, du point de vue de sa constitution dans le cadre général de la formalisation du sens. L'Algèbre à deux valeurs de Boole constitue donc le lieu où les termes ou concepts acceptent de prendre une fonction et un statut numériques, de même que les signes numériques deviennent capables de se charger d'une nature conceptuelle. Qui plus est, cette Algèbre duale parvient même, par le moyen de la méthode de développement qu'elle fonde, à opérer une transformation des termes numériques en coefficients numériques, et donc à établir un rapport formel interne entre les deux niveaux, objectal et conceptuel, où se joue l'effectivité logique de l'Arithmétique. De cette manière, elle incarne une solution au problème fondamental du statut sémiotique du nombre qui hante la naissance de la formalisation du sens sous le signe de l'Abstraction symbolique.

C'est par cet aspect de l'Algèbre duale, et non pas par la constitution des tables de vérité bivalentes, que les travaux de Boole nous semblent mériter une attention particulière pour l'histoire et la philosophie de la logique, ou plus généralement de la formalisation du sens. Pourtant, bien que Boole mette en place et profite de ces propriétés incarnées par l'Algèbre duale, l'utilisation purement restreinte et instrumentale qu'il en fait l'épargne d'avoir à aborder le problème capital de la nature même de ces termes numériques. C'est ainsi qu'une fois constatée l'effectivité de la méthode que la multiplicité disparate de leurs propriétés autorise, le statut des éléments 0 et 1 de l'Algèbre duale (qui pourraient communiquer leurs propriétés aux autres termes numériques intervenant dans la délimitation des frontières d'interprétabilité) demeure incertain.

III.3.2. La spontanéité timide de l'Algèbre duale

Après avoir arpenté l'espace dispersé des synthèses manquantes, nous pouvons énoncer plus précisément ce qui fait défaut dans les formulations de Boole pour que la résistance et l'insistance du contenu, puisse acquérir la consistance capable de conférer aux mathématiques, et à l'Arithmétique tout particulièrement, la place constitutive qui est la sienne dans la construction d'une logique. Ce qui manque, c'est d'abord la possibilité de dégager des fonctionnements sémiotiques à partir des formes provenant des pratiques mathématiques non algébriques qui, ne parvenant pas acquérir un statut proprement symbolique, restent, comme nous l'avons vu[348], au niveau de l'expressivité pure. Mais il manque ensuite la capacité de faire de ces fonctionnements sémiotiques autant de principes à la fois logiques et mathématiques selon une spontanéité du signe dont le caractère réfléchissant empêcherait l'abstraction propre à l'arbitraire. En d'autres termes, ce qui manque à Boole c'est une *théorie de l'expression*. Dans le cadre de l'Abstraction symbolique, ce manque s'organise suivant le double aspect qu'y prend la résistance du contenu. D'une part, comme cela se dégage déjà des analyses que nous avons menées, les différents aspects sémiotiques, ou plus précisément, *expressifs*, du nombre que Boole fait intervenir dans son système, et qui sont responsables des possibles effets logiques de contenu, n'arrivent jamais à vaincre la dispersion qui les empêche de se recomposer dans une figure aussi unifiée (du moins en apparence) que celle du nombre mathématique. D'autre part, dans son souci de conditionnement des fonctionnements sémiotiques par les formes mathématiques, Boole finit par réduire la tâche des signes à la pure description, et manquer ainsi la véritable spontanéité sémiotique, c'est-à-dire, la puissance de création de signification ou de sens, associée à la simple position, manipulation et définition des signes.

Nous avons déjà examiné les multiples figures éclatées du nombre qu'on trouve dans le système de Boole. La mise en œuvre d'une unification de tous ces fragments exigerait de toute évidence le recours à des synthèses mathématiques qui restent loin du domaine où les algébristes anglais, y compris Boole, ont l'habitude d'aller puiser. Mais elle exigerait aussi l'intervention de nouveaux instruments sémiotiques à de niveaux multiples, capables d'actualiser la puissance synthétique des signes. Certes, nous l'avons vu, dans ses travaux

[348] Cf. *supra* p. 311.

mathématiques, Boole fait preuve d'une spontanéité sémiotique au niveau des opérateurs, héritée directement de l'école algébrique anglaise. Pourtant une telle symbolisation a tendance à s'exercer, comme nous l'avons montré, au nom d'une exclusion des aspects strictement numériques des formes dont elle porte. En revanche, la prise en charge de l'Arithmétique en tant que complexe de déterminations sémiotiques réclame des instruments d'une autre nature.

Au niveau des *termes* d'abord (habituellement sémiotisés par les algébristes au moyen de symboles) puisque des termes, objets ou éléments doués d'un caractère numérique devraient pouvoir être conçus et manipulés sans pour autant se confondre avec les nombres tel qu'ils apparaissent dans l'Arithmétique élémentaire. Nous l'avons dit, certains développements requièrent de résoudre le problème de termes capables à la fois de regrouper et de « représenter » l'ensemble de valeurs satisfaisant certaines conditions, tout en conservant des propriétés arithmétiques. Une telle intervention viendrait donner une réponse à la question du rapport entre des régimes disparates de répétition d'un signe, où prend naissance et appui le problème du nombre comme problème sémiotique. Ce qui veut dire encore qu'elle offrirait une solution à la différence de nature entre coefficients et termes numériques.

L'intervention de nouveaux instruments est exigée ensuite au niveau des *opérations*. Puisque les termes auxquels nous venons de faire référence sont définis directement en fonction des opérations possibles sur les nombres comme signes de lois complexes de répétition, et puisque ces termes sont eux-mêmes susceptibles d'être l'objet d'opérations à leur propre niveau, selon un lien interne aux opérations élémentaires d'addition et de multiplication qui reste toujours à déterminer. Les instruments sémiotiques concernant les opérations ont été sans doute les plus développés par le régime d'Abstraction symbolique, qui s'est somme toute constitué autour de l'invention des opérateurs. C'est à ce niveau donc qu'appartiennent les lois fondamentales telles que $x^2 = x$ ou $x + x = x$. Mais précisément à cause de l'évacuation de toute trace numérique, certaines possibilités restent inaperçues, voire inconcevables, et les problèmes qu'elles soulèvent ne sauraient pas être assumés comme tels. Ainsi, une loi comme $x + x = 2x$ n'est pas considéré comme une loi de cette nature, alors que si l'on accepte la radicalité de l'approche symbolique, elle n'a aucune raison de ne pas l'être. De la même manière, c'est par cette nature abstraite du symbolique que Jevons se montre incapable de percevoir une quelconque différence entre les expressions « $x^2 = x$ » et « $x^{100} = x$ » ou « $x^n = x$ ». Qui plus est, une telle conception de la symbolisation des opérations force à voir comme une absence de loi des indices pour l'addition chez Boole (Boole étant le premier à le comprendre ainsi) ce qui n'est qu'une loi implicite, dont les conséquences peuvent s'avérer décisives. C'est encore en libérant cette perspective que pourrait être envisagée l'adoption d'une loi comme $x + x = 0$, qui s'est tant de fois présentée aux yeux des Boole et des Booléens comme aux nôtres, et dont les conséquences pour l'articulation manquante s'annoncent capitales. Enfin, et plus profondément, un intérêt spécial est à porter sur les rapports formels qui s'établissent ou peuvent s'établir entre les deux opérations élémentaires d'addition et multiplication, dans la mesure où c'est dans l'accord non trivial entre elles que se joue la possibilité faire consister la dualité constitutive qui résiste contre l'abstraction du contenu dans la logique. La loi distributive (seule loi qui dans le cadre de l'Algèbre logique porte sur le rapport entre les deux lois) est sans doute décisive à cet égard ; mais elle est aussi insuffisante. Nous l'avons vu, les nombres de l'Arithmétique habitent au croisement des rapports bien plus complexes entre les deux lois (par exemple, le nombre 9 habite au croisement ambigu entre « $3+3+3$ » et « 3^2 », caché derrière l'expression ambigüe « 3×3 »). Les mathématiques sont sans doute une source incontournable des synthèses non triviales entre ces deux opérations, mais ces synthèses sont à chaque fois inséparables des synthèses sémiotiques qui les suggèrent, les stabilisent et les instituent.

Finalement, de nouveaux instruments sémiotiques deviennent nécessaires au niveau du *rapport d'égalité*. Nous avons vu comment la question de l'égalité agissait comme problème central dynamisant l'évolution des conceptions des algébristes anglais, de Woodhouse à Gregory. Le rabattement final de tous les termes sur la surface symbolique des opérateurs, opéré par Gregory, donnait à cette question une réponse simple, fournissant un socle et un principe pour l'organisation de l'Abstraction symbolique. Mais cette réponse revient à contourner le véritable problème. On ne s'étonnera pas dès lors que la réinjection des signes numériques dans le répertoire symbolique du fait de la résistance plus ou moins consciente de Boole à l'Abstraction symbolique fasse resurgir le problème de l'égalité. Nous l'avons vu apparaître au moment de mettre en évidence la disparité des lois des indices, sous la forme d'expressions comme « $3=9$ », mais aussi lorsque les conditions d'interprétabilité proposées par Boole obligeaient à considérer des égalités comme « $4=2$ », ou que l'adoption d'une loi comme $x+x=0$ obligeait à assumer des conséquences comme $x=-x$, pour tout x. Ces expressions n'interrogent pas moins la nature de l'égalité que celle des termes. Dans la mesure où le signe d'égalité incarne le principe d'identité du système, c'est de lui qu'il est question dans la différence de statut entre coefficients et termes, et si une différence de degré et de nature est à établir entre les nombres tel qu'ils apparaissent habituellement dans l'Arithmétique élémentaire, et des éléments ou termes numériques susceptibles de les « représenter », une telle différence ne saurait faire l'économie d'une distinction au niveau de l'égalité, comme le réclamait déjà Woodhouse. Mais plus profondément, la question sémiotique de l'égalité gagne des dimensions problématiques nouvelles, puisque non seulement les domaines déterminés par cette différence de nature définissent chacun une arithmétique, mais ces arithmétiques se veulent entièrement articulées l'une à l'autre, l'une étant comme la « représentante » de l'autre ; c'est alors l'essence même de cette « représentation » qui réclame des inventions au niveau du signe de l'égalité, car c'est précisément comme rapport d'égalité dans l'une de ces structures qu'exige d'être définie l'identité des éléments dans l'autre (par exemple : l'identité de 0 comme représentant de tous les termes du type $2x$, résultant d'une loi établissant $x + x = 2x = 0$, pour tout x).

Malgré l'inefficacité de sa résistance à l'Abstraction symbolique, Boole n'est pas resté entièrement inactif devant ces exigences imposées par le problème qu'il mobilisait. Plusieurs créations intimement attachées à son système propre en témoignent, mais l'Algèbre duale reste sans aucun doute le cas le plus abouti. En effet, l'Arithmétique de 0 et 1 comporte une évolution substantielle en direction d'une spontanéité sémiotique à même les mathématiques. Car à la différence du reste des rapports entre lois symboliques et synthèses mathématiques que nous avons relevés dans ses formulations, la mise en place de cette structure entraîne un reversement de direction. Si l'orientation privilégiée par Boole était d'aller des lois symboliques vers les structures mathématiques par une relation de conditionnement, nous voyons qu'ici, par la première fois, Boole va des propriétés mathématiques spécifiques qui ne trouvent pas de place dans la surface strictement symbolique (des *expressions*) vers les lois symboliques les *déterminant* selon la forme de cette spécificité. C'est notamment le cas lorsqu'il s'agit de déterminer le sens logique des valeurs numériques 0 et 1. Comme nous l'avons vu, Boole fait alors appel aux « lois propres » à ces éléments « dans le système de grandeurs numériques », à savoir :

$$0 \times y = 0 \text{ ou } 0y = 0, \text{ et}$$

$$1 \times y = y \text{ ou } 1y = y.$$

Ces lois sont censées rendre compte des *propriétés* singulières de 0 et 1 respectivement, en tant que nombres appartenant à l'Arithmétique. Mais ainsi exprimées, elles possèdent tout pour devenir de véritables lois symboliques *définissant* des termes. C'est d'ailleurs ce qu'elles font : elles *définissent* les termes « Univers » et « Rien ». Et même si Boole dissimule ce fait en parlant de « suggestion » de l' « interprétation logique » à donner aux nombres 0 et 1, il apparaît clairement que les classes « Univers » et « Rien » acquièrent un statut renouvelé du fait de cet attachement aux mécanismes de l'Algèbre duale : loin de tout appel à des explications irrémédiablement analogiques ou métaphoriques pour la définition de leur sens dans le système, leur simple soumission aux lois symboliques extraites des propriétés arithmétiques particulières suffit pour les déterminer. C'est-ce que Boole suggère lorsqu'il se défend des objections possibles concernant l'arbitraire de l'association de ces classes aux signes 0 et 1 :

> Is it necessary to the mathematical development of Logic that we should take into account its formal relation to the dual Algebra?
>
> To this I reply that it is certainly not necessary. We might for instance instead of representing Universe by 1 and Nothing by 0 have employed other symbols e.g. we might have represented Universe by *u* and Nothing by *n.* Only had we done this the symbols *u* and *n* would have required in virtue of the formal laws of Conception to be used according to the same rules as the symbols 1 and 0 in the dual Algebra. (Boole, 1856, p. 94)

Ces lignes trahissent encore les précautions, sinon les remords voire les faiblesses de Boole à l'égard de la puissance de l'outil même qu'il avait su créer, puisqu'en vertu de l'argument qu'il offre, on pourrait affirmer précisément que le rapport entre le développement mathématique de la Logique et l'Algèbre duale est bien nécessaire. Seulement, pour cela il aurait fallu assumer jusqu'au bout le statut numérique des nombres, pour affirmer que dans une telle situation les signes « u » et « n » *ne seraient rien d'autre* que les nombres 1 et 0, comme éléments de l'Algèbre duale.

Toujours est-il que les lois établies ici par Boole pour définir les termes 1 et 0 sont de la même nature que la loi $x^2 = x$, qui définit des classes. Seulement, ces deux lois *ne définissent pas des classes en général, mais deux classes ou termes* (1 et 0) *très singuliers*. Si bien que si la capacité de détermination est la même dans les deux cas, la nature de la détermination diffère. Conçue comme une détermination directe du logique par le symbolique (que Boole essaya par tous ses moyens de conditionner mathématiquement), les lois du premier type demeurent abstraites et profondément arbitraires. Dans le second cas, en revanche, des spécificités arithmétiques sont élevées au rang de lois, et déterminent de cette façon des éléments singuliers. Les signes ainsi déterminés, « 0 » et « 1 » ne sont pas de même nature que les signes de classe, tels que « x » ou « y » ; la généralité abstraite de ces derniers contraste avec la particularité des premiers. Dans ce sens, le « 0 » et le « 1 » déterminés par ces lois sont des symboles avec un *contenu* précis[349].

Mais s'ils sont singuliers, le 0 et le 1 comme éléments déterminés par ces lois ne sont pas *individuels*. Nous voulons dire par là que leur statut n'est pas celui des individus que les classes sont censées regrouper. Aussi singuliers qu'ils puissent être, le statut logique de ces éléments (le « type », selon une théorie qui n'a pas encore eu véritablement besoin d'être

[349] Ce caractère matériel ou de contenu (*meaning*) de ces symboles est d'ailleurs assumé explicitement par Boole lors d'énoncer la différence entre les deux régimes déterminés respectivement par ces deux types de lois : « The most remarkable difference between Logic and dual Algebra, a difference however *which is material and not formal*, is that their spheres of interpretation are not merely different but not even connected by a perfect correspondence and analogy. In the dual Algebra any general symbol *x* admits only of the *special and definite meanings* 0 and 1 but in Logic such general symbols admit of other special and definite interpretations than Nothing and Universe even of any class interpretation whatever i.e. of any meaning which can be expressed in language by a general name. » (1856, p. 95, nous soulignons).

formulée pour régler ce genre de problèmes) est le même que celui des symboles de classes. C'est en cela qu'ils peuvent prendre leur place dans des équations. Et c'est également en ce sens que Boole les appellera des « concepts » au même titre que les symboles de classes[350]. C'est dire qu'en tant que termes symboliques issus des lois puisant dans la spécificité concrète de l'Arithmétique, le 0 et le 1 se voient investis d'un statut conceptuel qui ne se confond pas néanmoins avec la généralité abstraite des classes.

De ce point de vue, le 0 et le 1 de l'Algèbre duale ne sauraient coïncider en tous points avec le 0 et le 1 comme racines de l'équation $x^2 - x = 0$. Par l'intervention originale de cette Arithmétique à deux termes, Boole réussit à soustraire ces deux signes numériques à la condition objectale et individuelle à laquelle la notion de « valeur » les reléguait, et à les revêtir d'un statut purement symbolique (termes conceptuels ou logiques), sans compromettre en rien leur singularité. De manière remarquable, *Boole découvre ainsi la nature algébrique des termes* 0 *et* 1, qui est celle d'être respectivement l'*élément absorbant* et l'*élément neutre* dans un système défini par des lois de composition (typiquement les lois multiplicative et additive). En conséquence, toute une série de propriétés formelles deviennent démontrables, qui viendraient contribuer au développement d'une théorie mathématique capable de rassembler les éléments jusque là dispersés et de poursuivre l'entreprise de formalisation du sens à l'écart de toute abstraction.

Mais la spontanéité sémiotique créatrice incarnée par les mécanismes de l'Algèbre duale apparaît avec une évidence toute particulière dans les développements de la méthode d'interprétation que cette structure est censée informer. Car les seuls éléments ou termes 0 et 1 de cette Arithmétique se révèlent insuffisants pour prendre en charge l'ensemble des expressions formelles à interpréter. Notamment, des fonctions faisant intervenir la division engendrent des expressions où 0 apparaît en dénominateur, à savoir « $\frac{0}{0}$ » et « $\frac{1}{0}$ ». Pourtant, à la différence du nombre 2 dans le processus de détermination des conditions d'interprétabilité, ces expressions ne sauraient être écartées par une méthode d'interprétation se prétendant générale. Et cela précisément malgré l'absence d'une signification autre que problématique dans le territoire des mathématiques. Aussi, Boole cherchera-t-il à leur attribuer une signification qui justifie leur existence et leur intégration au sein même du système qui les engendre. De cette façon, l'expression $\frac{0}{0}$ est investie symboliquement de la signification de « classe indéfinie », selon une analogie suggérée par l'Arithmétique, où le même symbole

[350] Boole (1856, p. 91) : « …representing any combination of symbols by V, whether that combination express a logical concept or a concept in dual Algebra, *i.e.* one of the numbers 0 and 1, it must by what has preceded equally satisfy the law $VV = V$ ».

« représente en arithmétique, un *nombre indéfini* à moins qu'il ne soit déterminé par quelque moyen spécial » (1854, p. 89). De la même manière, l'expression « $\frac{1}{0}$ » est reconnue comme « le symbole algébrique de l'infini », ce qui le rend incapable de satisfaire la loi fondamentale des symboles logiques, et justifie l'égalisation à zéro des constituants qu'il affecte (1854, p. 91).

Ces arguments ne sont certainement pas convaincants. De l'interprétation habilitée par le premier, Boole dira ouvertement qu'elle « ne saurait être déduite, sauf par analogie, de ses propriétés arithmétiques, mais doit être établie expérimentalement » (1854, p. 91). Les deux arguments seront d'ailleurs remplacés par d'autres non moins analogiques dans les développements postérieurs de l'Algèbre duale, qui justifieront de plus l'interprétation du symbole « $\frac{1}{0}$ » comme « classe impossible » :

> Respecting the ground of the two last interpretations let it be observed that $\frac{1}{0}$ would represent a class of things such that if we seek by Composition the class common to that class and to Nothing we shall obtain the class All-things ( ) now no such class exists or is conceivable. Retaining the language which is grounded upon the notion of Class we must interpret the coefficient $\frac{1}{0}$ by Things impossible. Again the expression $\frac{0}{0}$ represents a class of things such that if we compound it with Nothing we obtain Nothing. But this condition is answered by all concepts whatever. Hence $\frac{0}{0}$ must be interpreted as things indefinite or unlimited. (Boole, 1856, p. 100)

Le caractère ouvertement expérimental et analogique de ces synthèses n'est que l'autre face des limitations déjà observées de l'approche par Boole de la dimension sémiotique des mathématiques. On ne s'étonnera pas dès lors que, pour remédier à cette faiblesse sans trahir le dessein originel de Boole contre les Booléens, Hailperin fasse appel aux instruments de la Théorie des anneaux, vers lesquels pointent dans un certain sens nos analyses[351]. Toujours est-il qu'à aucun moment Boole n'a hésité à accepter l'incorporation de ces termes nouvellement engendrés par les exigences de l'Arithmétique de 1 et 0. Et cela, en donnant, à ce qui n'apparaissait d'abord que comme de simples « formes », « expressions » ou « symboles », la place des coefficients dans des fonctions ou équations logiques. Ce faisant, et en dépit de la pauvreté de ses moyens, Boole les investissait du même statut que celui de 0 et 1, suivant une spontanéité sémiotique qui, étayée sur le fonctionnement mathématique récemment découvert dans l'Arithmétique duale, cherche à structurer le sens constitutif d'une

[351] Cf. Hailperin (1986), chapitre 2, spécialement §2.7-§2.9.

logique originale. Aussi, les symboles « $\frac{0}{0}$ » et « $\frac{1}{0}$ » non seulement se verront attribuer le statut de concepts dont jouissaient déjà les termes 0 et 1, mais ils définiront même avec eux les quatre « catégories logiques » fondamentales, à distinguer soigneusement des concepts communs en ce qu'elles déterminent la façon dont tous les autres concepts acceptent d'être organisés logiquement :

> Considered then in the concrete the four coefficients of the development admit of the interpretation Universe Nothing Things impossible Things indefinite. Considered with reference to the abstract notions which they express we have the categories 1st Existence or Totality 2nd Non-Existence or Nothingness, 3rd Impossibility, 4th Indefiniteness. It is a remarkable circumstance that however numerous the terms of a conclusion those terms appear under no other relations or categories than the above. The categories do not however necessarily all present themselves in every conclusion nor in fact is there any other general observation to be noted than that the above are all which do appear. We may therefore with propriety term them logical categories. (Boole, 1856, p. 100)[352]

III.3.3. La singularité de l'œuvre de Boole

Après ce parcours, le bilan des contributions apportées par les travaux logiques de Boole à la logique du sens se montre étrangement positif. Étrangement, puisque ces apports résident précisément dans ce que ces travaux n'accomplissent pas. Notre bilan n'apparaît positif qu'en restituant la puissance des problèmes que ces travaux soulèvent. Ce sont ces problèmes que l'institution des solutions postérieures cherchera à épuiser et à effacer, pour les enfouir dans une histoire dont seule une archéologie pourrait les récupérer. C'est pourquoi notre bilan diverge de manière significative de celui que l'histoire de la logique a l'habitude de faire.

Revendiquant cette positivité problématique, nous avons pu mettre en relief une série de découvertes résultant de l'incursion de Boole dans le territoire de la logique, qui nous sont apparues comme des contributions décisives pour la pensée qui se tissait dans le nouage entre les mathématiques et la logique. Notamment, la compréhension de l' « événement Boole » sous le point de vue plus large d'une « formalisation du sens » que nous avons cherché à développer ici, permet de faire ressortir des dimensions nouvelles ou négligées qui nous semblent incontournables pour l'intelligibilité des ressorts fondamentaux de la pensée

[352] Sur la distinction entre ces symboles et les symboles des classes quelconques voir Boole (1856, p. 99; 1997, p. 115).

logique. Et cela, en faisant valoir entre le domaine des mathématiques et celui de la logique l'espace ouvert mais rigoureusement articulé du fonctionnement des signes et du langage à travers lequel s'étayent des régimes particuliers de formalité pour la signification et le sens. De cette manière, nous avons pu voir comment, aux différents aspects de la résistance de Boole à la déquantification ou dé-arithmétisation de l'Algèbre, correspondaient autant des figures du contenu logique, qui fonctionnaient pour le régime de l'Abstraction symbolique à la fois comme condition et comme limite, puisqu'il n'avait tout simplement pas de place pour elles. C'est ainsi qu'au bilan classique tant de fois réalisé à propos de l'œuvre de Boole, nos analyses permettent d'ajouter la présence larvaire de principes de contenu au sein des mécanismes d'une logique mathématisée, principes à partir desquels on peut rendre intelligibles les prétendues « fautes » dans son système. Ces principes agissent sous le double aspect d'une différence numérique et d'une différence conceptuelle incarnant respectivement la possibilité d'une forme objectale et d'une forme conceptuelle de contenu. Si par la première trouvent une détermination logique interne les objets que l'Abstraction symbolique ne pourra restituer qu'extérieurement par interprétation, sur la seconde prend appui l'internalisation des critères d'interprétabilité des concepts que la postérité de l'Abstraction symbolique se verra obligée, le moment venu, d'emprunter sous la forme d'une sémantique à un langage au-delà du langage (à un *métalangage*). Qui plus est, par cette double tentative d'intériorisation de ce que l'orthodoxie logique tentera de rejeter dédaigneusement au dehors, Boole ouvre à l'intérieur du système une dimension *expressive* entièrement insignifiante, qui ne saurait pour autant être considérée comme entièrement extra-logique, puisque c'est sur son fond que le territoire de la signification logique devient susceptible d'être dessiné. Néanmoins, cette dimension n'est nullement définie de façon négative et indéterminée, selon les habitudes métaphysiques des philosophes que Boole critique. Elle est, au contraire, comme nous l'avons vu, douée de la positivité même des pratiques mathématiques, et plus précisément de l'Arithmétique. Voilà une autre originalité majeure de la logique de Boole, si on peut s'exprimer ainsi par rapport à sa propre postérité : elle réserve dans la logique une place aux mathématiques qui est à la fois première, interne et constituante. Et c'est par cette place que, à l'aube de la formalisation de la logique, le problème d'une forme logique du contenu reste lié par des articulations minutieuses au quantitatif, à l'arithmétique et au nombre, dans l'attente d'une théorie formelle de l'expression qui vienne lui donner les solutions qu'il mérite.

Nous n'avons aucunement caché, cependant, la dispersion et le caractère hautement fragmentaire de ce que nous signalons comme l'intérêt principal des travaux de Boole pour une nouvelle mise en perspective des enjeux de la formalisation du sens. Nous n'y insisterons pas. Qu'il suffise de souligner ici que, du côté des mathématiques, le résultat fondamental qui pourrait établir le lien interne entre les signes « 0 » et « 1 » en tant que valeurs numériques satisfaisant l'équation $x^2 - x = 0$ et les signes « 0 » et « 1 » en tant qu'éléments d'une Algèbre ou Arithmétique duale, est constamment absent. On dirait même que Boole ne perçoit jamais ce problème comme mathématiquement pertinent. Ce qui pourrait être dit également de la question corrélée de la différence de statut des signes numériques. Malgré l'insistance avec laquelle ces problèmes se présentent dans ses réflexions, et l'incapacité à leur donner une réponse stable, Boole se contente à chaque fois d'arguments spéculatifs ou tout simplement rhétoriques, comme si la question du statut des symboles qui avait tant occupé les recherches mathématiques des algébristes de Cambridge ne pouvait au fond jamais concerner véritablement les nombres. De manière analogue, nul rapport ne semble pouvoir être établi entre ce que nous avons appelé principe objectal et principe conceptuel de contenu. Malgré l'incorporation symétrique des déterminations exclues par l'Algèbre symbolique que ces principes tendent à réaliser dans le système, les mécanismes qui les supportent persistent sous la forme de définitions contingentes, déconnectées, gratuites et souvent obstinées parce qu'inconsistantes. La situation est ici d'autant plus grave que Boole ne reconnaît pour le contenu ou le sens (*meaning*) aucune place explicite dans son système, empruntant ses mots et arguments à la rhétorique de l'Abstraction symbolique.

Mais il s'agit ici de bien plus que d'analogie entre ces deux absences. Car les principes que l'on reconnait du côté de la logique sont l'expression des propriétés qui émanent du côté des mathématiques. En effet, le principe des objets que nous avons repéré n'existe (ou plutôt, n'insiste) que comme effet logique de la présence des coefficients numériques affectant les termes symboliques de l'Algèbre, et la conceptualité dichotomique se trouve en correspondance interne avec les termes numériques de l'Algèbre duale, et définit les limites de son interprétabilité par rapport à d'autres termes numériques de même nature, quoique tombant hors de sa portée. Si bien qu'à l'absence de lien entre, par exemple, le 2 comme coefficient affectant un symbole algébrique et le 2 comme valeur pouvant prendre la place de celui-ci correspond, d'une façon obscure mais certaine, l'absence de lien entre les deux principes de contenu. Sans doute cette correspondance n'est-elle pas *directe*, et c'est ce qu'une approche comme la nôtre prétend révéler. Elle est structurée par la médiation de fonctionnements sémiotiques ; en l'occurrence par des lois faisant des signes le ressort et le véhicule de ce que nous avons identifié comme une différence numérique et une différence conceptuelle. Mais si médiation il y a, elle ne se résout pas en analogie, et c'est là l'idée la plus profonde de ce que nous avons voulu appeler « formalisation du sens ».

Ce qui importe, c'est que les défauts d'organicité au niveau des propriétés mathématiques mises en avant par le système de Boole n'impliquent pas que cette organicité soit elle-même impossible. Même Jevons, avec son refus ouvert du contenu numérique de la logique booléenne, se voit obligé d'admettre qu'il y a « quelque chose de hautement remarquable et mystérieux » dans le rapport entre la pensée logique et celle du nombre :

> Supposing it prove true that Professor Boole's Calculus of 1 and 0 has no real logical force and meaning, it cannot be denied that there is still something highly remarkable, something highly mysterious in the fact, that logical forms can be turned into numeral forms, and while treated as numbers, still possess formal logical truth. It proves that there is a certain identity of logical and numerical reasoning. Logic and mathematics are certainly not independent. (Jevons, 1864/1890, p. 77)

Peu importe si Jevons cherche alors à renverser le sens de la détermination faisant appel à la rhétorique de l'abstraction. Nous avons déjà critiqué les possibilités d'une telle tentative. L'important est que l'ensemble de ces dispersions se laisse coordonner pour intégrer la multiplicité de dimensions qui constituent *le problème du nombre*. En effet, le nombre, dont la mise hors circuit avait fait l'objet, la raison et le moteur des efforts sémiologiques de plusieurs générations de mathématiciens anglais, est pourtant présent dans chacune des articulations du système logique de Boole. Il y apparaît tantôt comme objet, tantôt comme signe, tantôt comme loi, tantôt comme effet de fonctionnement interne ou encore comme concept… Toutefois, engendré et exprimé comme effet des mécanismes intrinsèques au système formalisant la logique, il ne parvient pas à se cristalliser sous la forme d'une dimension cohérente, ni à être représenté par le système qui l'abrite. Les deux tentatives majeures de Boole à cet égard, à savoir celle des propositions numériquement définies et celle de l'Algèbre duale, n'arrivent pas à surmonter ces défauts de cohérence et de représentation. À chaque fois, c'est pourtant bien de lui qu'il s'agit. Mais cet éclatement des dimensions du nombre ouvre cependant la possibilité de réfléchir à une articulation générale d'une façon nouvelle. C'est en ce sens que l'on peut parler de bilan positif.

Mais de quoi cet éclatement témoigne-t-il après tout si ce n'est de ce que, comme Frege le dénoncera quelques décennies plus tard, Boole se montre incapable de tenir ensemble l'Arithmétique et la logique ? C'est pourquoi en donnant lieu à la notion de contenu formel dans le cadre d'une tentative pour édifier une théorie de l'expression, Frege ouvrira des voies inattendues, tant pour la logique que pour les mathématiques, qui proposeront des solutions à ces problèmes. L'étude de ses premiers travaux, qui a motivé notre retour à Boole, nous a déjà montré que l'Arithmétique y prend une place essentielle, non seulement comme contenu à construire logiquement, mais plus profondément comme modèle à partir duquel étayer la conception et la construction mêmes d'une logique du contenu. Après notre parcours à travers les travaux de Boole, nous avons pu constater que ce lien entre l'Arithmétique et une logique du contenu, loin de naître avec Frege, était inscrit dans la naissance même de la formalisation du sens, sous une forme certes problématique, mais suivant des mécanismes suffisamment précis.

Il reste donc à comprendre la façon dont Frege communique avec ces problèmes ainsi précisés et leur offre une solution, qui a été formulée de manière tout à fait indépendante puisque ces problèmes ne lui ont jamais été directement adressés comme tels. À plusieurs reprises nous avons suggéré que la possibilité de surmonter les difficultés soulevées par le système de Boole, sans renoncer aux intuitions profondes qui le motivaient, dépendait de la possibilité d'avoir recours à un autre type de mathématiques, capable de mener de l'Analyse, non pas jusqu'à l'Algèbre, mais jusqu'à l'Arithmétique que précisément l'Algèbre anglaise écartait. À la fin de notre parcours à travers les divers aspects problématiques de son œuvre, le sens d'une telle remarque exige d'être explicité. En reconnaissant derrière ces différents aspects les problèmes qui animent alternativement, entre autres, le *Théorème fondamental de l'algèbre*, la *Théorie des congruences*, la *Théorie des formes homogènes* ou la *Théorie des idéaux*, les synthèses mathématiques réclamées pointent toutes vers un seul et même endroit : la tradition mathématique qui, loin pourtant de toute conscience symbolique ou même sémiotique, s'ouvrait au commencement du XIXe siècle dans le Continent, fondamentalement à partir des travaux de Carl Friedrich Gauss, et notamment de la *Théorie de nombres*, dont l'ensemble d'éléments se trouvait exposé avec une systématicité entièrement nouvelle et originale dans ses immenses *Disquisitiones Arithmeticae*.

On ne s'étonnera pas dès lors que ce soit dans le contexte problématique aménagé par les travaux de Gauss que le jeune mathématicien Frege place explicitement les débuts de ses propres préoccupations. Les effets logiques de cet héritage gaussien de Frege ont rarement suscité d'intérêt et de ce fait n'ont guère été explorés. Notre enquête les a rendus nécessaires. Ils sont pourtant loin d'être évidents.

IV. Quatrième Partie L’Expressionnisme frégéen

IV.1. Retour à Frege

IV.1.1. Les deux régimes

Notre parcours à travers les conditions d'émergence, de constitution et de consolidation de la logique booléenne permet de confirmer et de donner un sens précis à la distinction entre deux types de configurations qui se dégageait discrètement du regard critique porté par Frege sur la signification de son travail par rapport à celui de ses précurseurs immédiats. Il apparaît ainsi que, au seuil même du processus de mathématisation de la logique, deux grands régimes d'articulation des trois dimensions mathématiques, logiques et sémiotiques de l'espace de la formalisation se laissent distinguer avec une certaine précision. Ces deux régimes définissent autant de « styles » de formalisation du sens, et par le même mouvement, de significations de la notion de « formel » que ce processus met en avant. Le trait essentiel de cette distinction, et le plus remarquable à plus d'un titre, est sans doute l'association de domaines mathématiques particuliers à de régimes sémiotiques déterminant des logiques dont la nature se veut hétérogène. Notamment, l'association de l'Algèbre à une logique abstraite, prétendant rejeter tout contenu hors de sa portée, face à une logique ayant la vocation du contenu par son association aux ressorts de l'Arithmétique.

Nous avons vu dans quelle mesure l'association, par laquelle s'inaugurait le processus de formalisation du sens, entre l'Algèbre et l'abstraction comme principe d'une logique formalisée n'était ni artificielle ni spéculative. Elle résultait d'une exigence interne de sémiotisation par laquelle l'Algèbre symbolique ou abstraite cherchait à se constituer comme telle et à affirmer son autonomie dans l'espace des mathématiques. Quant à l'association entre Arithmétique et logique du contenu, si elle nous est initialement apparue sous la forme de l'exemplarité que l'Arithmétique incarnait pour la logique en tant que *calculus* et *lingua* à la fois, la nécessité sémiotique interne de l'association entre Algèbre et abstraction vient lui donner des déterminations nouvelles. En effet, puisque l'abstraction du contenu des symboles s'effectue par une série d'opérations sémiotiques précises qui tendent à éradiquer toute présence d'éléments arithmétiques du plan des expressions algébriques, on peut retourner le mouvement et faire de ces traits qui ont été exclus les éléments à relever pour constituer de manière positive une figure du contenu qui prendrait de la nature linguistique qu'elle a dans l'Arithmétique ce qui est nécessaire pour fournir la logique sa dimension calculatoire. On se souviendra ainsi que le travail de symbolisation des algébristes de Cambridge s'est heurté à un certain nombre d'écueils au niveau de la compréhension symbolique de l'Algèbre, provenant du fonctionnement sémiotique de l'Arithmétique, qu'ils ont essayé plus ou moins vainement de contourner. Nous avons constaté alors une asymétrie ontologique liée à une ambigüité possible dans le signe d'égalité, une asymétrie logique concernant la différence de nature des symboles, l'individualité de certains signes (signes numériques) irréductible à la généralité des termes algébriques, et la nature irrémédiablement numérale de l'indication de répétition ou itération d'une opération. On ne s'étonnera pas dès lors que l'ensemble de ces marques du contenu arithmétique se laisse reconnaitre derrière l'essentiel des instruments sémiotiques qui dans le système proposé par Frege sont investis de la responsabilité du contenu. Ainsi, l'articulation fonctionnelle de la proposition récupère et incorpore l'asymétrie logique des termes faisant partie d'une expression algébrique. On se souviendra que cette asymétrie, qui restait inexplicitée dans le cadre des algébristes anglais, se trahissait néanmoins par la disparité dans l'usage des signes littéraux habilité par des expressions telles que « $x^2 + a = bx$ ». De cette expression, provenant d'une généralisation de l'équation $x^2 + 3 = 4x$, Babbage disait qu'il n'est pas en notre pouvoir de modifier la valeur de « x », mais que nous pouvons donner à « a » et « b » des valeurs numériques arbitraires. Or, si les formulations de Gregory effaçaient cette asymétrie par la généralisation de la notion d'opérateur, que la résistance de Boole faisait remonter en surface (par la présence des coefficients numériques), c'est précisément cette asymétrie entre le variable et l'invariant que le symbole de fonction dont Frege se sert en logique cherche à capturer et mettre en avant sémiotiquement. La distribution entre le variable et l'invariant effectuée par les généralisations respectives de Babbage et de Frege à partir d'une expression comme « $x^2 + 3 = 4x$ » ne sont certes pas les mêmes ; Frege aura tendance à généraliser une telle expression comme une fonction de « x » (c'est-à-dire : $f(x)$), tandis que la symbolisation de Babbage fait de « x » une fonction de « a » et de « b » ($x = f(a, b)$). Nous verrons à quel point cette différence comporte des conséquences décisives pour la logique. Qu'il suffise ici de dire que si l'homogénéisation logique des symboles envisagée par l'Algèbre abstraite sous l'impulsion de Gregory implique l'effacement de l'asymétrie ontologique qui se cache comme une menace derrière le symbole d'égalité, la prise en charge fonctionnelle de l'asymétrie logique des symboles ouvre la voie à une incorporation parallèle de l'asymétrie ontologique dans le système des signes. Celle-ci apparaît en effet positivement, bien que sous une forme problématique, comme la question de l'égalité des fonctions. L'asymétrie ontologique prend dès lors la forme d'une différence entre l'égalité des arguments et celle des fonctions, et le rapport entre ces deux égalités se laisse assumer à l'intérieur de la *Begriffsschrift*, grâce à cet autre instrument de contenu qu'est la généralité ou la quantification. C'est par ailleurs grâce à ce fonctionnement conjoint de l'articulation fonctionnelle et de la quantification que l'individualité qui faisait obstacle à la généralité des symboles algébriques se laisse exprimer dans le système frégéen (par la portée existentielle de la négation de la généralité). Enfin, si l'itération des opérations ne trouve pas une expression directe dans les instruments de la *Begriffsschrift*, le mécanisme de succession dans une suite sera néanmoins le premier instrument à être élaboré en vue, justement, de la construction logique du nombre, qui manifeste la plus haute puissance de la logique pour déterminer des contenus.

Les aspects sémiotiques de l'Arithmétique n'ont pas été les seuls aspects exclus par les algébristes anglais à être intégrés dans le système frégéen. Nous avons vu aussi que Frege se servait, d'une façon qu'il demandait de considérer comme essentielle, des traits, lignes, connexions, coudes et embranchements dont l'existence sémiotique coïncide avec celle de la géométrie (telle que les mathématiciens de Cambridge l'ont comprise). Au moyen d'un agencement de tels signes géométriques se laissait exprimer le système complexe des domaines emboîtés des quantificateurs. Qui plus est, l'hétérogénéité de régimes sémiotiques dans laquelle cette présence géométrique se trouvait par rapport aux signes provenant de l'Arithmétique permettait d'exprimer à l'intérieur du système le partage entre ce que Frege appelait expressions formelles et expressions de contenu.

Mais il ne s'agit aucunement d'affirmer ici une quelconque supériorité du système frégéen, qui serait fondée sur l'acceptation des déterminations sémiotiques que l'Algèbre anglaise avait tendance à rejeter. Il importe surtout de mettre en évidence la pluralité de régimes mathématico-sémio-logiques afin de mieux comprendre la constitution de la logique formelle. Plus profondément, il s'agit de remettre sur le devant de la scène le sol des déterminations prélogiques (ce qui ne veut pas dire informelles), dont cette pluralité trahit la nécessité et l'existence. Ce sol subtil, où se tissent des correspondances réglées entre des pratiques mathématiques, fonctionnements des signes et systèmes déductifs d'expression, est demeuré étrangement masqué par l'homogénéité et la neutralité présumées des conditions sémiotiques de la logique formelle naissante. Or si la critique par Frege de la logique booléenne nous en avait fait découvrir sa simple possibilité, la pluralité des configurations qui ressort de notre étude de l'émergence de la logique booléenne dans le contexte de l'Algèbre anglaise confirme son existence. Et cela précisément dans la mesure où cette pluralité s'est révélée induite et non arbitraire. En effet, elle ne relève pas de la divergence des principes épistémologiques, des élaborations purement spéculatives ou des positions métaphysiques personnelles des mathématiciens, logiciens et philosophes qui s'en sont préoccupés. Elle ne relève même pas d'un quelconque esprit d'époque, ou du contexte simplement historique, géographique ou sociologique auquel ces chercheurs et enseignants appartiendraient. Cette pluralité nous est apparue au contraire comme l'effet d'articulations fines issues des aspects sémiotiques du savoir mathématique, tels que ces aspects étaient dégagés et ces articulations élaborées par les agents mêmes de ce savoir. En tant que tels, ce dégagement et cette analyse ne relèvent pas moins des pratiques que des théories mises en œuvre dans ce savoir. Le rôle de cette analyse n'est pas passif pour autant, dans la mesure où elle habilite, justifie et fait évoluer les pratiques et les théories dont elle dépend par ailleurs.

C'est par cette analyse sémiotique des mathématiques que l'homogénéité neutre, attribuée de façon tantôt naïve tantôt intéressée aux signes de la logique, laisse la place à une surface hétéroclite, de fonctionnalité pure, peuplée de problèmes, de stratégies et de solutions partielles quant au fonctionnement de ces signes, agissant dans la genèse des logiques au moment de leur formalisation. Ce sont les multiples aspects de cette analyse, comme un faisceau ouvert de pratiques et de formes sémiotiques en acte dans le travail des mathématiciens et logiciens du XIXe siècle, qui doivent être tenus pour les véritables synthèses, celles qui définissent autant de « styles » au seuil du processus de mathématisation de la logique, suivant les conditions de ce que nous avons appelé, faute de mieux, « contextes problématiques ». Synthèses qui, quoique impliquées dans une analyse sémiotique, ne sauraient être entièrement justiciables de l'analytique logique susceptible d'en résulter. De cette façon, par la restitution de cette strate un peu en retrait mais fondamentale, agissant à la fois comme socle de positivité et comme source d'instruments critiques, le processus de mathématisation de la logique se laisse aborder, quant à ses conditions d'émergence comme quant à ses effets philosophiques, sous la forme du problème plus général d'une formalisation du sens.

C'est sur ce plan que l'on peut distinguer deux régimes sémiotiques, ou plutôt sémio-logiques, entre lesquels se partage la signification de cet évènement que fut au XIXe siècle la formalisation du sens. Dans la première de ces configurations, la notion de « formel » est définie par une opposition ouverte avec celle de contenu, selon un axe déterminé par une conception de l'abstraction dont les mécanismes précis résultent des effets de sémiotisation propres à l'Algèbre comme discipline mathématique. Dans la seconde, en revanche, la formalité se réalise en se distribuant symétriquement le long d'un axe inédit de détermination réciproque entre contenus et expressions, comme polarité émergente à partir d'une articulation entre variation et invariance, dont les ressorts empruntent leurs principes aux dimensions problématiques du langage arithmétique. S'il nous a semblé, selon une terminologie adaptée à la qualification de « styles », que le nom d' « Abstraction symbolique » caractérisait avec justesse la première de ces configurations, il faudrait parler d'un certain expressionnisme dans le cas du régime sémio-logique frégéen, puisqu'il se caractérise par cette inhérence complexe des contenus aux expressions. C'est par l'affirmation ouverte de cette inhérence, et par son instrumentalisation positive par des moyens radicalement différents, que ce régime assume les multiples défis soulevés par les expressions pures que Boole ne parvenait pas à sauver de l'insignifiance à laquelle les condamnait l'Abstraction symbolique. Ce faisant, la pensée frégéenne place le problème des expressions au centre de la question de la mathématisation de la logique, et s'efforce de construire pour elles une véritable théorie formelle de l'expression comblant les faiblesses de l'approche booléenne des contenus. Aussi, le régime frégéen de formalisation du sens mérite-t-il bien le nom d' « *Expressionnisme* ».

Dans la première partie de notre recherche nous avons présenté la conceptualité fondamentale, le fonctionnement élémentaire, et les instruments positifs de cet expressionnisme quant à l'intelligibilité et l'effectivité qu'il comportait pour la constitution d'une logique formelle. Cela nous a amené à constater une indétermination essentielle au sein de cet expressionnisme, qui nous a indiqué la voie vers le plan où se nouait l'assemblage mathématico-sémio-logique de la formalisation du sens. Après les précisions gagnées dans notre parcours à travers la constitution de la logique booléenne, montrant le rapport intime entre ces configurations et les aspects sémiotiques des différentes régions des mathématiques, nous sommes en mesure de qualifier cet expressionnisme indéterminé, et de le problématiser par l'exploration du lien particulier qu'il tisse avec l'Arithmétique.

IV.1.2. Les Arithmétiques du contenu

Dans le cadre de l'Abstraction symbolique, l'œuvre décisive de Boole occupe une place singulière, sinon paradoxale. Bien que ce soit sous son impulsion que s'opère pour la première fois l'articulation effective entre les déterminations d'une Algèbre opératoire et celles d'une logique des classes, son attribution timide d'une nature symbolique aux nombres et son attachement discret à une série de traits sémiotiques associés à l'Arithmétique animent une résistance aux dispositions de l'Abstraction symbolique qui catalyse l'apparition de principes de contenu à l'intérieur de son système formel. Si le rapport entre les traits arithmétiques exclus par les algébristes anglais et ceux assumés par Frege dans son système constituaient une première confirmation du lien interne entre Arithmétique et contenu, cette puissance de contenu dont la résistance de l'Arithmétique témoigne chez Boole en constitue une autre. Cette nouvelle confirmation est d'autant plus probante que l'inhérence entre Arithmétique et contenu y est éprouvée de façon positive et directe, bien que presque instinctive et irréfléchie. Qui plus est, par la présence de ces éléments dans son système, Boole fait preuve d'un certain expressionnisme, si l'on entend par là l'incorporation comme partie du langage de toute une région d'expressions qui sont en elles-mêmes insignifiantes mais qui contribuent aux effets de signification de l'ensemble, soulevant ainsi inlassablement le problème de leur propre interprétation. C'était notamment le cas des signes numériques dans les expressions logiques, mais aussi de l'intégration du domaine des mathématiques dans le système, comme instance opératoire insignifiante où les expressions logiques pouvaient plonger pour résoudre la dynamique de leur propre signification. De tels signes n'ont pas de signification selon les conditions du symbolisme, mais ils expriment bien quelque chose, ne serait-ce que cette impossibilité de leur donner une signification.

Les travaux de Boole constituent pourtant bien plus qu'une confirmation indirecte du lien entre Arithmétique et contenu. Car bien que Boole n'arrive pas à déjouer l'axe fondamental qui oppose la forme au contenu, pour faire place à une notion de contenu qui ne soit pas réfractaire à la forme et inversement, les développements des conséquences de son attachement aux éléments arithmétiques impliquent une exploration profonde des multiples dimensions sémiotiques du nombre. Nous avons vu dans la partie précédente comment ces dimensions s'organisaient selon une série de dualités (dualité des opérations, disparité des régimes de répétition, hétérogénéité des principes de différenciation, double forme du contenu). Dans l'ensemble des déterminations précises que chacune de ces dualités comporte à son niveau spécifique, ainsi que dans les rapports existants (ne serait-ce qu'en droit) entre elles, ce qui se dessine avec minutie, c'est la possibilité à l'intérieur d'un système formel d'une présence conjointe du nombre comme entité mathématique complexe, et du contenu comme puissance expressive inhérente à logique. Plus encore, par ces déterminations et ces rapports, les mécanismes par lesquels la présence de l'un entraîne celle de l'autre prennent une forme concrète, de telle sorte que le problème d'une logique du contenu dans le cadre de sa mathématisation se voit ainsi recevoir les conditions de sa positivité.

Les dualités du système booléen peuvent être vues comme la face positive des traits arithmétiques niés par les algébristes de Cambridge. C'est pourquoi les principes et figures qu'elles incarnent ne sauraient être absents du système frégéen, où ces traits sont assumés ouvertement. Seulement, les instruments sémiotiques étant radicalement hétérogènes par rapport à ceux de la logique booléenne, c'est d'une autre manière que leur action est matérialisée. Compte tenu de son rôle fondamental pour la prise en charge des asymétries propres à la sémiotique de l'Arithmétique, on ne s'étonnera pas que ce soit à partir du signe de fonction que l'essentiel de cette reprise s'effectue. À commencer par le double principe de différenciation que nous avons identifié dans le système de Boole.

On se rappellera que la distinction entre fonction et argument dans la *Begriffsschrift* était purement articulatoire, la fonction étant la marque d'une articulation capable de prendre des termes non articulés comme argument. Certes, les arguments ne sont pas tous nécessairement inarticulés ; il leur suffit d'être « saturés » ou « complets ». Mais au seuil le plus bas de la chaîne d'articulations, on bute sur des termes élémentaires définis par leur simplicité inarticulée, dont la seule efficacité est d'entrer dans des relations d'articulation fonctionnelle composant des termes d'ordre supérieur. Ces éléments, que Frege envisage comme des *individus*, et dont la nature est entièrement déterminée par le mécanisme articulatoire incarné par les fonctions, assurent, ne serait-ce que sémiotiquement, le fonctionnement correct des signes de fonction, qui risqueraient sinon de se perdre dans une articulation infinie. Or dépourvus de toute qualité intrinsèque, *ces individus ne sauraient constituer une multiplicité qu'en vertu d'une distinction purement numérique entre eux*. D'un point de vue logique, deux individus ainsi définis, dans la mesure où ils se veulent indépendants des concepts qui les contiennent de manière exclusive, ne peuvent être distincts que numériquement. Ce n'est pas par hasard si, au moment d'affirmer la genèse conjointe des concepts et individus, Frege fait appel à la comparaison avec le comportement des atomes, figure ontologique paradigmatique de la distinction numérique[353]. Ses remarques concernant l'énumérabilité de tout ce qui existe dans sa lettre à Stumpf vont d'ailleurs dans le même sens[354]. C'est dire à quel point *la différence numérique est la forme présupposée de ce niveau élémentaire du contenu*.

Cette forme des éléments sera d'une importance à la fois silencieuse et décisive pour la construction frégéenne du nombre dans les pages bien connues des *Grundlagen*. Elle sera la condition sémiotique préalable pour que l' « équinuméricité » des concepts puisse être envisagée. Mais avant même que la logique ne puisse exercer sa puissance constructive, la notion d'objectalité qui affleure à partir de la *Begriffsschrift*, sans coïncider entièrement avec celle d'individualité, héritera néanmoins de cette forme numériquement distincte qui caractérise les contenus élémentaires. Nous reviendrons sur cette cristallisation d'une notion d'objet dans le système de la *Begriffsschrift*. Qu'il suffise ici de remarquer que *le système frégéen rejoue de cette manière le lien entre différence numérique et objectalité qui s'était déjà noué dans le cadre du système booléen*.

D'autre part, outre cette différence numérique présupposée par les arguments, les fonctions incarnent un principe hétérogène de distinction ou différenciation. On pourrait l'appeler *articulatoire* ou *de relation*, dans la mesure où le signe de fonction, au niveau de son existence sémiotique, renferme la totalité des relations envisageables dans une articulation expressive, au moyen de la représentation d'une partie d'une expression prise à la fois comme

[353] Voir *supra* p. 70.
[354] Voir *supra* p. 127.

constante et insaturée (ou incomplète)[355]. Ainsi, à partir d'une expression articulée (par exemple : « $3+2$ »), les différentes fonctions envisageables constituent autant de différences dans les relations incarnées par l'articulation en question (que Frege exprime souvent au moyen de parenthèses vides, à savoir

$$\text{« } (\ ) + 2 \text{ »,} \qquad \text{« } 3 + (\ ) \text{ »} \quad \text{et} \quad \text{« } (\ ) + (\ ) \text{ »,}$$

pour notre exemple). Du point de vue des contenus, il en résulte que, deux éléments ou objets étant fixés, la différenciation purement fonctionnelle exprime la multiplicité des relations selon lesquelles ces éléments ou objets peuvent se rapporter l'un à l'autre, d'une façon en principe explicitable au moyen d'une articulation expressive. Ainsi, par exemple, étant donné le couple formé par les nombres 2 et 4, il existe une multiplicité, voire une infinité de relations selon lesquelles l'un peut être conçu comme résultant de l'autre ; multiplicité qu'une distinction entre des fonctions telles que :

$$f_1 = x + 2, \qquad f_2 = 2x \quad \text{ou} \quad f_3 = x^2,$$

par exemple, a pour tâche de saisir et de déterminer. Inversement, une fonction étant donnée, le choix d'un élément comme argument entraîne la sélection d'un autre comme valeur (dans notre exemple, le nombre 2 comme argument de la fonction x^2 entraîne la sélection du nombre 4 comme valeur). Aussi, ce principe sémiotique de différenciation articulatoire ou relationnelle recèle-t-il un principe de *différenciation sélective* agissant sur des contenus. Autrement dit, considérée en elle-même, indépendamment des termes susceptibles de la compléter, chaque fonction apparaît comme une manière particulière d'effectuer une sélection d'éléments de contenu (individus ou objets)[356]. Ce principe de différenciation sélective constitue un instrument de distribution ou de regroupement des contenus objectaux. C'est en ce sens précisément que ce principe s'apparente à celui actualisé par la loi des indices pour la multiplication dans le système de Boole, qui faisait de la multiplication des termes précisément un opérateur de sélection des individus dans un univers. Seulement, si chez Boole la distribution et le regroupement résultant de cette sélection *opératoire* se réalisaient selon une différenciation conceptuelle de l'univers (duale ou dichotomique pour le cas de $x^2 = x$), le regroupement habilité par la distinction sélective *fonctionnelle* n'a pas besoin de

---

[355] C'est bien la définition que Frege donne de la fonction dans la *Begriffsschrift* : « Si nous pensons qu'une expression peut être changée de cette manière, elle se sépare en un constituant constant, *qui représente la totalité des relations*, et en le signe que l'on pense pouvoir être remplacé par d'autres signes et qui signifie l'objet se trouvant dans ces relations. J'appelle fonction le premier constituant et son argument, le second. » (1879/1999, p. 29, nous soulignons).

[356] Que cette capacité sélective des fonctions constitue bien un principe de différenciation, cela apparaît avec clarté lors de l'introduction par Frege de la notion de « parcours de valeurs » qui cherche à la capturer. Car, comme le remarque justement Benmakhlouf (2001, p. 43), la notion de parcours de valeurs ne vaut pas pour elle-même, mais uniquement dans le cadre de la détermination d'une identité (ou symétriquement, d'une différence). Pour l'introduction de la notion de « parcours de valeurs », voir *infra* p. 410.

partitionner l'espace où elle s'exerce, mais agit avec beaucoup plus de plasticité et de finesse. C'est la fameuse puissance, dont se targuait Frege dans sa discussion avec les Booléens, de constamment tracer des lignes nouvelles au lieu de se contenter des lignes déjà existantes[357]. Il reste que, lorsque l'univers ou domaine des valeurs possibles pour une fonction est à la fois discret et fini, le regroupement ou distribution des objets susceptibles de prendre la place d'arguments constitue bien une partition. C'est notamment le cas des fonctions de vérité, qui puisent leurs valeurs au niveau le plus élevé du plan des contenus, c'est-à-dire celui qui est habité uniquement par le vrai et le faux. Pour de telles fonctions, l'ensemble de contenus se voit partagé en deux, à savoir ceux vérifiant et ceux falsifiant l'expression fonctionnelle. Il n'est pas surprenant dès lors que ce soient précisément ces fonctions de vérité effectuant des partitions dans le domaine des contenus qui détermineront, comme nous le verrons, ce qui dans le système frégéen aura le droit d'être appelé *concept*[358].

Se confirme ainsi, au-delà de l'hétérogénéité des moyens mobilisés par les deux mathématiciens-logiciens-philosophes, l'existence d'une structure élémentaire commune motivant la présence d'un contenu formel dans leurs systèmes logiques respectifs. Cette structure est constituée essentiellement par un double principe de différenciation, numérique d'une part, de partition conceptuelle de l'autre (directement ou à travers un principe de sélection), animant respectivement une forme objectale et une forme conceptuelle de contenu. De cette façon, ces logiques résistent ou s'opposent à une logique de l'abstraction, précisément dans la mesure où celle-ci tend à repousser les déterminations internes de ces principes vers les territoires de l'extra-logique.

Évidemment, ce n'est pas de la même façon que le système de Boole et celui de Frege actualisent et mettent en œuvre les principes en question. Si dans le cas de Boole la dualité des principes et des formes de contenu est associée à l'existence de deux lois régulant l'identité ou la différence dans la répétition nue d'un signe (*x, xx, xxx, …*), dans le cas de Frege elle est l'effet d'une différence interne à la répétition possible d'un signe articulé, qui se manifeste comme un rapport mobile de variation-invariance : le signe articulé « 3^2 », par exemple, définit l'articulation fonctionnelle $f(x) = x^2$, en se laissant virtuellement répéter comme « 4^2 », « 5^2 », « 6^2 »…, mais aussi $f(x) = 3^x$, en se laissant répéter comme « 3^3 », « 3^4 », « 3^5 »…, ou encore $f(x, y) = x^y$ au croisement de ces deux séries. Il en résulte qu'à la dualité sémiotique des lois prescrivant extérieurement une différence dans la répétition d'un signe simple (loi des indices pour l'addition et la multiplication) se substitue la dualité de la fonction et de l'argument, comme mise en relief des différences internes au croisement de

[357] Cf. *supra* p. 91.
[358] Cf. *infra* p. 412.

séries possibles de répétition d'un signe composé. Nous pouvons donc reconnaître dans cette différence interne à la répétition un principe à la fois élémentaire et essentiel de l'Expressionnisme en tant que tel.

Les dualités sémio-logiques booléennes ne sont pas absentes dans le dispositif frégéen pour autant. Mais elles s'y trouvent enveloppées dans le fonctionnement de ses mécanismes. En effet, il suffit de considérer les niveaux extrêmes du contenu sollicités par l'articulation fonctionnelle en vue de la constitution des figures internes de l'objectalité et de la conceptualité pour constater que leurs sémiotisations respectives correspondent avec celles que les lois de Boole viennent réguler. Ainsi l'expression des individus capables d'occuper la place de l'argument – expression qui ne fait pas immédiatement partie du matériau sémiotique élémentaire de la *Begriffsschrift* – réclame un principe sémiotique correspondant entièrement à celui effectué par la loi des indices de l'addition de Boole, où chaque indice (chiffre ou signe numérique) constitue une marque d'individualité[359]. D'autre part, comme nous l'avons mentionné, le partitionnement d'un domaine de contenus individuels ou objectaux, qui détermine des concepts, exige l'existence d'un autre domaine (ou « codomaine »[360]) à la fois discret et fini, dont l'ensemble éventuellement infini des contenus du premier domaine peut tirer son image à travers la fonction en question. Or les éléments d'un tel codomaine sont par cela même toujours susceptibles d'être mis en correspondance avec des signes dont le principe de distinction répond à celui effectué par la loi $x^n = x$, envisagée comme loi de régulation sémiotique. C'est notamment le cas de la dimension constituée par les valeurs de vérité (vrai et faux) par rapport à la distinction duale engendrée par la loi $x^2 = x$.

IV.1.3. Rôle de la fonction propositionnelle

Il ressort de ces analyses que ce qui a permis à Frege de surmonter la dispersion dans laquelle se trouvaient les principes du contenu dans le système de Boole, *c'est la conception fonctionnelle des expressions*. En effet, par la réactualisation au moyen de l'articulation fonctionnelle (fonction-argument) des mécanismes constitutifs des effets de contenu, ainsi que de leurs rapports internes, le système frégéen devient capable de proposer une intégration

[359] On a déjà remarqué comment ce principe sémiotique habituel en mathématiques pour individualiser des valeurs pour une variable ou un argument était à l'œuvre dans la loi additive des indices de Boole (cf. *supra* p. 304). Hermann Lotze l'emploiera explicitement vers la même époque dans le cadre de sa propre conception fonctionnelle de la conceptualité, où il écrit « $a^1\ a^2\ a^3 .. b^1\ b^2\ b^3 .. c^1\ c^2\ c^3 ..$ » pour référer à des formes individuelles (*Einzelformen*) correspondant aux « marques caractéristiques » A, B, C, dans une fonction qu'il notera « F[A B C] » (Lotze, 1874/1989, p. 51).

[360] Selon le terme employé par les mathématiques actuelles pour désigner le domaine des valeurs possibles pour une fonction.

des principes qui chez Boole se présentaient sous la forme de dualités sans commune mesure. Au niveau de leur constitution d'abord, puisque fonction et argument sont les figures d'une genèse conjointe. Au niveau de leur fonctionnement ensuite, grâce au signe de généralité qui permet de rapporter l'identité et la différence des fonctions à celles des arguments et inversement[361]. Il n'est pas étonnant d'ailleurs que le déplacement de l'axe forme-contenu vers l'axe d'expression-contenu soit intimement associé à cette conception fonctionnelle. Non pas que l'adoption de la fonction propositionnelle comme instrument privilégié de l'écriture logique motive ce déplacement. Comme nous l'avons montré dans la première partie de ce travail, c'est plutôt l'inverse qui arrive : la perspective du rapport entre variation et invariance qui constitue l'essence de l'axe expression-contenu est ce qui contribue à la conception de la fonction propositionnelle comme instrument effectif pour la logique. Mais si son introduction en *logique* est un effet de la mise en avant de la polarité expression-contenu, la notion *mathématique* de fonction précède amplement la constitution de ce régime « expressionniste ».

Ayant trouvé une thématisation au XVII^e^ siècle dans le contexte de la naissance du Calcul différentiel, la notion de fonction a vu son importance s'affirmer et grandir dans l'espace des mathématiques, jusqu'à devenir « l'objet central de l'Analyse » et « la joie mathématique du XIX^e^ siècle »[362]. En particulier, la notion de fonction connut au XIX^e^ siècle un développement inédit sous la forme de la Théorie des fonctions d'une variable complexe, suivant laquelle se sont ordonnés d'une manière générale les principes fondamentaux de l'Analyse. Il est inutile de retracer cette histoire maintes fois racontée, d'autant plus que nous aurons l'occasion de revenir sur les aspects qui nous concernent spécifiquement. Plus important, en revanche, est de constater que c'est bien à cette notion mathématique de la fonction que Frege rattache sa fonction propositionnelle. En effet, si dans la *Begriffsschrift* la seule référence de Frege au concept de fonction de l'Analyse mathématique se limitait à souligner sa portée plus restreinte par rapport à celle qu'il proposait pour la logique (1879/1999, p. 33), il n'hésitera pas quelques années plus tard à s'en réclamer ouvertement. Ainsi, dès la première page de son de son article « Fonction et concept » de 1891, Frege affirme :

> Je pars de ce que l'on appelle fonction en mathématiques. Ce mot n'a pas eu d'emblée une référence aussi vaste que celle qu'il a reçue par la suite. Il sera bon d'examiner en premier lieu l'emploi primitif du mot, et de porter ensuite notre regard sur les extensions qui y ont été apportées ultérieurement. […] C'est donc à l'époque de la découverte de l'analyse supérieure

[361] Voir *supra* p. 96.

[362] Voir Dahan-Dalmedico et Peiffer (1986, p. 224) et Kline (1972, p. 626).

> qu'il faut revenir, si l'on veut savoir ce que l'on a d'abord compris en mathématiques sous le terme de « fonction ». (Frege, 1891, p. 81)[363]

Qui plus est, Frege inscrit sa propre notion de fonction dans le sillage de l'évolution proprement mathématique de ce concept, suivant la reconstruction qu'il en fait en termes d'une double généralisation :

> On demandera maintenant comment il se fit, par le progrès même de la science, que la référence du mot fonction ait reçu une extension. On peut distinguer deux directions. On étendit d'abord le domaine des opérations qui interviennent dans la construction d'une fonction. À l'addition, la multiplication, l'élévation à la puissance et à leurs opérations inverses, on adjoignit les différents procédés d'évaluation des limites, sans d'ailleurs avoir toujours clairement conscience de ce que l'on avait admis d'essentiellement neuf. On alla plus loin, au point d'être contraint d'emprunter au langage parlé quand le langage des signes de l'analyse n'y suffisait pas ; dans le cas par exemple d'une fonction dont la valeur est 1 pour des arguments rationnels, 0 pour des arguments irrationnels.
>
> Dans une deuxième étape, on élargit le cercle des arguments et valeurs de fonction possibles en admettant les nombres complexes. Ce faisant, il fallut sans retard définir à nouveau le sens des expressions « somme », « produit », etc.
>
> Je poursuis pour ma part dans les deux directions. (Frege, 1891, pp. 87-88)

Aussi fruste que puisse être ce regard sur l'évolution de la notion mathématique des fonctions, il témoigne d'une connaissance intime des enjeux de son époque. En effet, d'une part la fonction attribuant les valeurs 1 et 0 aux arguments rationnels et irrationnels respectivement renvoie aux travaux de Dirichlet (d'après lequel cette fonction est nommée), et à ses efforts, à la suite des recherches de Fourier, pour proposer une notion générale de fonction, indépendante des opérations purement algébriques, grâce notamment à la possibilité de les représenter au moyen des séries (trigonométriques). D'autre part, la mention des fonctions prenant comme arguments et valeurs des nombres complexes renvoie aux travaux de Cauchy, et à sa vaste entreprise de fondation de l'Analyse complexe. Or ces deux directions signalées par Frege correspondent à ce que Philippe Jourdain reconnaissait au tournant du XX^e siècle comme les deux grandes branches suivant lesquelles s'était développée la Théorie des fonctions au siècle précédent (cf. Jourdain, 1915, p. 2 sqq.).

De ce point de vue, l'invention de la fonction propositionnelle, et l'édification de la logique prédicative qui s'organise autour d'elle peuvent être comprises comme les effets d'une prise de conscience sémiotique des enjeux de l'Analyse telle qu'elle se développait

---

[363] On pourra trouver d'autres références semblables, par exemple, dans Frege (1884/1969, p. 33; 1892-95, p. 140).

dans le contexte des mathématiques continentales. Tout se passe comme si, d'une manière analogue au processus suivant lequel les développements de l'Analyse algébrique avaient débouché outre-Manche sur la constitution d'une Algèbre logique, motivés par une exigence interne portant les mathématiques à réfléchir sur la nature des signes et à élaborer un concept de symbole, les mathématiques continentales accédaient avec Frege à l'intelligence de leurs procédures sémiotiques. Les mathématiques continentales avaient fait preuve, en effet, d'une grande créativité dès les premières années du XIXe siècle. De la Théorie (algébrique et analytique) des nombres jusqu'aux premiers pas de la Topologie, en passant par la Théorie des groupes, la Théorie des fonctions, l'Analyse complexe, ou la Géométrie non-euclidienne et différentielle, les mathématiciens du continent (allemands et français pour la plupart, mais pas uniquement) se sont livrés à d'innombrables inventions techniques et conceptuelles dans le but de faire face à d'anciens problèmes, mais aussi d'en susciter de nouveaux[364]. Pourtant, à la différence de leurs homologues anglais, ces créations dans l'espace des mathématiques ne furent pas accompagnées d'une véritable réflexion sur la nature des signes sous la condition desquels elles pouvaient voir le jour. Dans le cas anglais nous avons pu constater que l'existence d'une telle réflexion était associée à la sémiotisation de l'espace entier des mathématiques, exigée par la constitution d'une Algèbre abstraite, dont l'essence était symbolique. Mais s'il est possible de retracer les circonstances qui ont motivé quelque chose qui a eu lieu, il est cependant plus délicat d'expliquer pourquoi quelque chose n'a pas eu lieu, en particulier quand il s'agit d'un mouvement réflexif. Toujours est-il que les mathématiques du continent semblent avoir été plus intéressées par la nature des objets mathématiques (nombres, fonctions, espaces…) que par les lois qui les régissent[365]. De ce fait, le travail immense de création mathématique réalisé par les mathématiciens continentaux du XIXe siècle s'est déroulé en faisant l'économie de toute problématisation sémiotique. Non pas que les inventions proprement mathématiques n'aient comporté aucune création d'ordre sémiotique. Celles-ci ont été multiples et profondes, et il est d'ailleurs difficile d'imaginer comment une véritable invention mathématique saurait s'en dispenser. Mais ces créations spontanées ne semblent pas avoir eu besoin du développement concomitant d'une conscience spécifique sur la nature et le fonctionnement des signes employés.

Du moins pas pendant les trois premiers quarts du siècle. Car le dernier quart de siècle verra apparaître une série de travaux concernés spécifiquement par la question de la

[364] Pour un aperçu général du paysage mathématique du XIXe siècle, on pourra consulter le chapitre 43 (« Mathematics as of 1900 ») de l'ouvrage de Kline (1972).

[365] À l'exception sans doute de la théorie des groupes qui finirait par rejoindre l'évolution ultérieure de l'Algèbre abstraite anglaise, qui s'était développée sous l'impulsion fondamentale précisément de Cayley, mais aussi de Sylvester. Cf. par exemple Nový (1973, p. 215 sqq.).

légitimité, la justification et les fondements des mathématiques issues de ce foisonnement créatif. Les travaux de Dedekind, Cantor ou Peano, mais aussi de Weierstrass et Kronecker dans un certain sens, et bien entendu, de Frege lui-même, appartiennent à ce contexte problématique où la question des fondements s'impose de l'intérieur même des pratiques mathématiques, avec l'urgence propre à toute interpellation critique. On remarquera néanmoins que, parmi les auteurs de cette liste maintes fois répétée, seul Peano partage avec Frege le geste d'amener la question des fondements sur le terrain des signes[366]. Mais même cette prise de conscience de la place des signes dans les mathématiques ne débouche pas chez Peano sur la constitution d'une formalisation originale de la logique engageant une réflexion sur la signification en général. La raison en est certainement que, en matière logique, Peano se réclame ouvertement de la logique booléenne, de Boole à Schröder[367]. Présupposant la validité d'un tel système, les contributions de Peano se concentrent pour l'essentiel au niveau de l'écriture et des constructions qu'elle habilite (notamment, le célèbre système d'axiomes pour l'Arithmétique qui porte son nom). Ce qui fait dire à Frege que le système de Peano constitue un progrès dans la direction de l'expression des contenus, mais aux dépens de la dimension inférentielle[368].

Peano, pour sa part, malgré certaines critiques adressées à l'idéographie frégéenne qui coïncident partiellement avec celles des Booléens[369], reconnait l'indépendance, sinon l'originalité, du système frégéen par rapport à la tradition booléenne :

> M. G. Frege, professeur à l'Université d'Iéna, à qui l'on doit beaucoup de travaux intéressants en logique mathématique, le premier datant de 1879, est arrivé à son tour, et par un chemin relativement indépendant*, dans son livre *Grundgesetze der Arithmetik* (1893) à l'expression en symboles d'une suite de propositions concernant le concept de nombre. [Note : *Les travaux de Frege sont indépendants de ceux de nombreux auteurs en logique

[366] En effet, Peano a été l'auteur du célèbre « Formulaire de mathématiques », comptant plusieurs éditions à partir de 1895, où est proposé un système général d'expression pour les mathématiques au moyen des « notations de la Logique mathématique » (1895, p. III). Peano a aussi écrit un certain nombre de textes réfléchissant à la question des signes dans les mathématiques et dans la logique, notamment un article en 1915 intitulé « L'importance des symboles en mathématiques » (Peano, 1915). Comme nous l'avons vu, Frege critique le système de notation de Peano dans son article « Sur l'idéographie de Mr. Peano et la mienne » (Frege, 1897).

[367] Les références à Boole et à Schröder, mais aussi à Peirce, comme sources pour sa « Logique mathématique » sont constantes dans les textes de Peano. On pourra regarder spécialement Peano (1888) et (1889).

[368] Frege (1984, p. 242). Frege souligne notamment l'introduction du signe d'appartenance « ε », qu'il considère comme « un enrichissement substantiel de la notation de Boole » (p. 242).

[369] Peano ajoute néanmoins une critique concernant l'inutilité des traits de jugement et assertion (donc de l'expression de la vérité d'une proposition) ainsi que la déductibilité ou inférence. Cf. Peano (1897, p. 191 sqq.), mais surtout Nidditch (1963) et Dudman (1971).

mathématique. Voir, par exemple, *Symbolic Logic* of Venn […]]. (Peano, 1897, pp. 191-192)[370]

La référence à Venn renvoie aux reproches des Booléens concernant la négligence dont Frege avait témoigné envers leur tradition. Pourtant, cette circonstance ne prend pas la forme d'un reproche sous le regard de Peano. Quoi qu'il en soit, nous ne saurions confirmer cette idée d'une « indépendance » de Frege à l'égard de la logique booléenne : d'après les analyses que nous avons menées jusqu'ici, cette indépendance recèle une dépendance plus profonde, non pas par rapport à d'autres traditions logiques, mais par rapport aux pratiques mathématiques de son contexte, dont sa logique singulière est le résultat, qui passe par une appropriation des instruments sémiotiques au moyen desquels ces pratiques se développaient. C'est pourquoi il est pour nous légitime de considérer Frege avant tout comme le nom, non pas du système logique qu'il édifie, mais du moment même où les mathématiques continentales du XIX[e] siècle atteignent leur point décisif de réflexion ou de conscience sémiotique.

Parce qu'elle est au croisement de cette indépendance logique et de cette dépendance mathématique, la notion de fonction propositionnelle apparaît précisément comme la marque de la singularité frégéenne dans ce moment de conscience critique : d'une part, ordonnant l'ensemble des instruments d'expression des contenus, elle constitue l'élément même par lequel la logique frégéenne demeure irréductible à la logique booléenne ; d'autre part, issue d'une certaine appropriation des dispositifs sémiotiques en acte dans son contexte mathématique, elle s'enracine, à travers la dimension fondamentale de la Théorie des fonctions, dans l'espace entier des mathématiques continentales de son siècle. Que l'introduction de la fonction propositionnelle comme instrument logique primordial soit un effet d'une élaboration sémiotique à partir d'un emprunt d'outils propres au contexte des mathématiques continentales, cela se voit clairement dans le fait que la tentative de Frege n'est pas la première. En effet, avant lui, Hermann Lotze, l'une des influences philosophiques majeures de Frege[371], avait déjà proposé une conception du concept logique en termes fonctionnels[372]. Sans doute, la tentative de Lotze pour donner au concept une forme

[370] Nous traduisons de l'anglais.

[371] Sur l'influence de Lotze sur Frege, voir Sluga (1980, p. 27 sqq.).

[372] Comme l'explique Sluga suivant un article de Bruno Bauch de 1918 : « According to Lotze, concepts are formed out of simpler ones as marks of the new concepts. But the combination of marks is not always a mere conjunction. 'In general, marks are not co-ordinated into concepts in the same way'. That is why the correct symbol for the construction of a concept is not the equation $= a + b + c + d + \cdots$, but the designation $S = F(a, b, c, \ldots)$ in which the mathematical expression indicates only that a, b, and c must be combined to form the value of S in a way that can be given precisely in every special case, but which in general is most varied. » (Sluga, 1980, pp. 56-57). Et Sluga cite ensuite Bauch : « The notion of a function which was taken by Lotze from mathematics and made fruitful in logic has received a brilliant development in mathematics again on the

fonctionnelle n'est-elle pas aboutie. Elle montre nonobstant que celle de Frege n'est pas isolée, et qu'elle participe d'une sorte d' « air du temps », ou plutôt d'un *style* comme nous préférons l'appeler, qui prend source dans les pratiques mathématiques qui en sont contemporaines. Aussi, peut-on confronter, dans le cadre de la formalisation du sens, cette capture du concept comme *fonction,* à celle de l'Abstraction symbolique qui associe le concept à un *opérateur*. Toutes les deux aussi capables de se dire « formelles », elles diffèrent cependant tant par la nature de la conceptualité qu'elles animent que par celle des signes qui les incarnent. Nous avons suffisamment analysé comment la formalisation opératoire de la logique, en envisageant les concepts comme des opérateurs de sélection, les déterminait comme *abstraits*, en mobilisant la dimension *symbolique* des signes (d'où notre caractérisation en termes d' « Abstraction symbolique »). En saisissant le fonctionnement complexe de variation-invariance comme principe sémiotique essentiel des fonctions, Frege parvient à mettre en avant la dimension *expressive* des signes, et à investir les fonctions d'une portée proprement conceptuelle, d'une façon qui fait consister dans le concept des principes formels *de contenu*. C'est donc cette approche fonctionnelle des concepts qui a permis à Frege de réaliser ce que l'Abstraction symbolique opératoire avait empêché Boole de faire, malgré les intuitions et la volonté silencieuses mais tenaces de ce dernier.

Mais alors nos analyses semblent rejoindre la thèse de Baker et Hacker déjà évoquée, d'après laquelle les systèmes de Boole et de Frege résultent des généralisations des développements mathématiques propres à leurs contextes respectifs, expliquant notamment la création de la fonction propositionnelle à partir de la Théorie abstraite de fonctions en mathématiques. Dans les termes de ces auteurs :

> Boole sought to clarify and generalize syllogistic reasoning in terms of algebraic operations on sets. Logic he regarded as the algebra of thought, and he characterized abstract algebra as a 'cross-section' of rational thinking. Frege followed a similar strategy, but appealed to a more *avant-garde* branch of mathematics. He subsumed syllogistic reasoning within a logical system displaying all sound patterns of reasoning as theorems derived from a few function-theoretic axioms. (Baker & Hacker, 1984, p. 13)

C'est ainsi qu'ils finissent par affirmer : « Là où Boole avait généralisé l'algèbre, Frege généralisa la Théorie des fonctions » (p. 14). La position élaborée par ces auteurs autorise une critique des visions comme celle de Dummett qui présentent les créations de Frege comme le produit d'une inspiration spontanée devant des problèmes strictement logiques ; ou même des travaux comme celui de Sluga qui ne font dépendre l'invention d'instruments logiques que de

---

basis of Logic. The altogether classical proof of this is the mathematical work of Frege… » (cité dans Sluga, 1980, p. 57).

la simple critique du langage[373]. Nous ne pouvons être qu'entièrement d'accord avec ces critiques, tout comme avec leur effort pour remettre la dimension mathématique au premier plan. Mais notre accord ne saurait s'étendre au-delà de ces aspects, après tout assez élémentaires. Nous avons déjà indiqué à quel point le lien si souvent relevé entre la fonction propositionnelle de Frege et ce que Baker et Hacker appellent « Théorie abstraite des fonctions » (ainsi que celui de l'Algèbre logique de Boole par rapport à l'Algèbre anglaise) demeure dans leur travail profondément vague et indéterminé. À la lumière du parcours que nous avons tracé dans toutes ces pages, parler d'une opération analogue de « généralisation » pour les cas de Boole et de Frege ne constitue pas une simplification injustifiable, mais une faute décisive qui occulte l'ensemble d'opérations complexes de sémiotisation (d'abstraction dans un cas, d'expression dans l'autre) qui agissent à la base de la constitution de la logique formelle. Qui plus est, par cette association hâtive de la démarche de Frege à celle de Boole, la différence essentielle entre une logique abstraite et une logique du contenu, que Frege a essayé de montrer avec tant de soin et sur laquelle portent tant d'enjeux pour la philosophie, se trouve entièrement effacée.

Aussi, notre analyse en termes de régimes sémiotiques au moyen desquels les propriétés formelles des mathématiques sont transférées vers la logique, ne partage-t-elle avec le travail de Baker et Hacker que l'apparence superficielle de certaines conséquences. Intéressée par les conditions sémiotiques de possibilité de mathématisation de la logique, la volonté qui anime nos analyses n'est pas *polémique*, comme l'est après tout le travail de ces auteurs, mais fondamentalement *critique*. La découverte de cette strate sémiotique permet dès lors de mettre en lumière de façon détaillée et positive le problème du contenu, capital tant pour la philosophie de la logique que pour la question de la philosophie dans la logique. C'est de cette manière que la différence subtile mais décisive entre Frege et les Booléens se laisse capturer, en même temps d'ailleurs que la singularité de l'œuvre de Boole par rapport à l'un et aux autres. Qui plus est, un tel dégagement des principes précis de genèse et de consistance du contenu logique ouvre des nouvelles perspectives sur la question que Beaney posait sans savoir véritablement y répondre : « s'il n'y a aucune raison essentielle pour laquelle un logicien booléen n'aurait pas pu formuler une notion de « contenu conceptuel », pourquoi Frege a-t-il été le premier à le faire ? » (1996, p. 62). Question majeure, dans la mesure où elle soulève le problème, déterminant pour la contemporanéité de la pensée, de l'essence et de la naissance de la formalisation du sens comme nouvelle condition pour la philosophie.

[373] Sur ces critiques, voir Baker & Hacker (1984, p. 15, note 23).

IV.2. Le sens de l'Arithmétique

IV.2.1. Sous les fonctions, l'Arithmétique

La mise en relief de la dimension sémiotique engagée dans les projets de mathématisation logique exige de distinguer avec soin les procédures singulières par lesquelles logique et mathématiques s'empruntent des solutions, selon la spécificité de leurs régions respectives. Mais par la même raison, elle exige en même temps de critiquer l'idée après tout commode (et au premier chef pour Frege !) selon laquelle la logique frégéenne est directement issue de la Théorie des fonctions mathématiques du XIX^e siècle. Ce faisant, elle nous prévient de souscrire trop rapidement à la commodité d'une perspective simplement contextuelle, comme semble être celle de Baker et Hacker et plus généralement celle des différentes études critiques menées pendant les dernières décennies. Et cela dans la mesure où l'exigence d'une réflexion sémiotique interne aux mathématiques continentales que nous avons signalée n'est pas directement associée à la Théorie des fonctions en tant que telle, comme elle l'était au processus d'algébrisation de l'Analyse en Angleterre. Motivée par l'interrogation sur les fondements des mathématiques, l'exigence d'une réflexion sur le langage et les signes semble plus directement associée à ce que le domaine des mathématiques de la fin du XIX^e siècle avait l'habitude d'appeler *arithmétisation de l'Analyse*. Ce nom réfère de manière générale à l'ensemble non nécessairement homogène de programmes cherchant à répondre à la question d'un fondement de l'Analyse entièrement indépendant de l'intuition (et notamment de l'intuition géométrique) en faisant appel aux seules ressources de l'Arithmétique, et aux propriétés des nombres entiers en particulier. Malgré la divergence de perspectives, de stratégies et de ressources mobilisées, toutes ces tentatives partageaient une quête de la rigueur mathématique par la construction du domaine continu des nombres réels (sur lequel portait l'essentiel de l'Analyse) à partir des nombres entiers, en passant par différentes formes d'ensembles infinis de nombres rationnels. La série des mathématiciens que nous avons mentionnés, de Weierstrass à Peano, reconnaissent leur tâche dans cette réponse, qui constitue le contexte problématique manifeste des mathématiques de la seconde moitié du XIX^e siècle. C'est donc sous la forme de cette construction appuyée entièrement sur l'Arithmétique que la question des fondements était arrivée à se définir à cette période-là. C'est donc à elle que non seulement les motivations de Frege, mais aussi ses buts et ses moyens ont l'habitude d'être directement rattachés. Que ce soit par le problème des fondements *arithmétiques* que la question du langage et des signes est soulevée dans l'évolution des mathématiques continentales, c'est exactement ce que Frege affirme dès l'ouverture de la *Begriffsschrift* :

> …je devais d'abord chercher jusqu'où l'on pourrait aller dans l'arithmétique grâce aux déductions seules, appuyé uniquement sur les lois de la pensée, qui sont au-dessus de toutes les particularités. À partir de là, ma démarche était de chercher d'abord à réduire le concept de succession dans une suite à la conséquence *logique*, puis à progresser vers le concept de nombre. Pour que, ce faisant, quelque chose d'intuitif ne puisse pas s'introduire de façon inaperçue, tout devait dépendre de l'absence de lacunes dans la chaîne de déductions. Tandis que je visais à satisfaire cette exigence le plus rigoureusement, je trouvai un obstacle dans l'inadéquation de la langue ; malgré toutes les lourdeurs provenant de l'expression, plus les relations devinrent complexes, moins elle laissa atteindre l'exactitude que mon but exigeait. De ce besoin résulta l'idée de l'idéographie dont il est question ici. (Frege, 1879/1999, pp. 5-6)

Le motif explicite de la *Begriffsschrift* renvoie donc à cette dimension « fondationnelle » attribuée au nombre par un contexte problématique qui dépasse l'initiative frégéenne. Mais si nous ne croyons pas nécessaire de nous attarder sur le processus de l'arithmétisation de l'Analyse, c'est qu'en dernière analyse ce n'est pas dans ce contexte mathématique-là que s'enracinent les véritables problèmes qui animent la formalisation frégéenne de la logique[374]. En effet, le rapport à l'Arithmétique certes conteste la primauté de la Théorie des fonctions, mais ne l'associe à l'arithmétisation de l'Analyse que de manière seconde et dérivée. La *Begriffsschrift* tire sans doute de celle-ci son but ou son horizon. Elle en tire même, par inspiration mais aussi par contraste peut-être avec les autres tentatives, la nécessité de poser le problème des fondements au niveau de signes. Que le problème du fondement de l'Arithmétique soit traité au moyen d'une analyse sémiotique de l'Arithmétique, voilà ce qui fait l'originalité de l'œuvre frégéenne dans le contexte des recherches fondationnelles de la fin du XIX[e] siècle et ce qui lui assurera une certaine célébrité. Notre compréhension de cette œuvre en termes de conscience sémiotique des mathématiques continentales ne veut pas dire autre chose. Mais la *Begriffsschrift* ne tire pas cependant de

[374] Beaucoup a été écrit sur l'arithmétisation de l'Analyse. Les études de Petri et Schappacher (2007) et de Ferrreirós (2007) restent néanmoins pour nous les plus remarquables sur cette question. Nous renvoyons donc à eux pour restitution détaillée des multiples facettes de ce processus. Dans le premier on pourra trouver d'ailleurs des références abondantes à la littérature sur la question.

l'arithmétisation de l'Analyse les problèmes et les ressources qui l'animent et la conditionnent ; au point que nous pourrons dire que ce besoin et ce but, Frege ne les rencontre que sous l'impulsion des problèmes qui, au-delà de la Théorie des fonctions, trouve leur source dans une Arithmétique d'une autre nature.

Pour le montrer, il faut rappeler que, si le lien entre la logique et l'Arithmétique évoqué dans les premières pages de la *Begriffsschrift* est d'ordre fondationnel, il existe également un autre rapport entre elles, que nous avons appelé *constitutif*. C'est précisément celui par lequel l'idéographie est dite construite « à partir du langage formulaire arithmétique », suivant une analyse sémiotique de l'Arithmétique se rapportant de façon non analogique à ses « pensées fondamentales » concernant l'usage de ses signes (Frege, 1879/1999, p. 6). Nous avons suffisamment insisté sur ce rapport constitutif et non fondationnel de l'Arithmétique à la logique, ainsi que sur le lien intime avec la notion de contenu qu'il enveloppe. Si nous y revenons maintenant c'est pour montrer à quel point l'intérêt de Frege pour la Théorie mathématique des fonctions n'est pas premier, mais se trouve entièrement subordonné à l'intelligibilité de ce fonctionnement sémiotique de l'Arithmétique, et au cadre général problématique d'une *Théorie générale de grandeurs* (*allgemeine Grössenlehere*) dont elle provient. Autrement dit, la vision fonctionnelle qui articule l'Expressionnisme frégéen et permet d'intégrer les éléments dispersés du contenu logique qui erraient dans le système de Boole, est une interprétation sémiotique moins des fonctions de l'Analyse, que des nombres de l'Arithmétique en tant que grandeurs[375]. Du point de vue constitutif, les premiers écrits logiques de Frege, et la *Begriffsschrift* notamment, présentaient la fonction propositionnelle dans toute sa généralité, comme directement issue de la conception des expressions d'un langage en termes de variation-invariance. La place des fonctions mathématiques y était dès lors réduite à celle de simple illustration. Certes, la nature arithmétique de ces fonctions, c'est-à-dire le fait qu'il s'agisse de fonctions portant sur des entiers, se trahissait déjà dès le début, lorsque Frege excluait d'emblée toute considération des fonctions proprement analytiques comme *log*, *sin* ou *Lim* (1879/1999, p. 15). Mais ce sera seulement plus tard, au début des années 1890, que les fonctions strictement arithmétiques apparaîtront ouvertement comme la véritable source de la conception fonctionnelle dans la logique.

En effet, la décennie qui suivit la publication de la *Begriffsschrift* fut marquée par l'écriture et la publication des *Fondements de l'arithmétique* (1884/1969). On sait que cet ouvrage, véritable monument de la pensée logique (auquel on a l'habitude de se référer par le nom de « *Grundlagen* », d'après son titre allemand, *Grundlagen der Arithmetik*), accomplit

[375] Pour le passage de l'Arithmétique comme une théorie des grandeurs à une théorie du nombre, voir Petri et Schappacher (2007, p. 34 sqq.). Nous aurons l'occasion d'y revenir.

l'essentiel de la construction du nombre que Frege promettait dans les premières pages de la *Begriffsschrift*. Le style en diffère cependant de manière remarquable. Frege n'y fait pas appel à l'écriture idéographique qu'il avait introduite dans son premier opuscule et si intensément défendue dans les articles immédiatement postérieurs. Les critiques adressées contre la difficulté de lecture de son écriture l'ont certainement convaincu de ce changement radical de style, qu'il n'envisagera que comme provisoire dans l'attente de la réalisation de son projet idéographique de construction de l'Arithmétique dans ses tristement célèbres *Lois fondamentales de l'Arithmétique* (ou « *Grundgesetze* »[376]) (1893-1903/1966). Le style des *Grundlagen* est donc entièrement en langue naturelle, et à la différence de son ouvrage précédent, ses pages abondent en discussions subtiles et lucides avec l'ensemble des conceptions ou traitements du nombre existant dans la tradition tant philosophique que logique et mathématique. On ne s'étonnera pas que la série des arguments avancés par Frege contre ces conceptions rejoigne naturellement les dualités propres aux nombres que nous avons dégagées dans l'œuvre de Boole et reconnues dans les instruments de l'idéographie : leur nature à la fois générale et singulière (§ 39), leur incompatibilité avec la figure de l'individualité à l'intérieur d'une espèce (§ 10), leur irréductibilité à un processus de simple abstraction (§ 44), enfin, leur existence au croisement d'un principe double de détermination donné par l'*identité* d'une part, et la *discernabilité* de l'autre (§ 39). Qui plus est, l'introduction s'ouvre de manière significative sur la différence de nature entre les signes algébriques (du type « a ») et les signes proprement numériques qui incarne l'essence du problème *sémiotique* des nombres :

> Si dans $a + a - a = a$ on remplace a par un nombre quelconque, mais toujours le même, on obtient toujours une équation vraie. C'est en ce sens qu'on emploie la lettre a. Avec 1, il en va tout autrement. Pouvons-nous, dans l'identité $1 + 1 = 2$, substituer à 1 deux fois le même objet, la lune par exemple ? Il faudrait au contraire substituer au premier et au deuxième 1 des objets différents. D'où vient qu'il faille faire ici ce qui serait fautif dans l'autre cas ? Au demeurant, l'arithmétique ne saurait, avec la seule lettre a, exprimer dans leur généralité des rapports entre nombres différents ; elle doit utiliser simultanément d'autres lettres, telles que b, c... Et l'on devrait penser que le signe 1 ne pourrait non plus suffire s'il devait, de la même manière, conférer aux propositions un sens général. Mais le nombre 1 n'a-t-il pas, au contraire, l'apparence d'un objet déterminé, aux propriétés assignables – par exemple de demeurer identique si on le multiplie par lui-même ? a n'a aucune propriété assignable en ce sens. (Frege, 1884/1969, pp. 115-116)

[376] D'après son titre allemand *Grundgesetze der Arithmetik*.

Toutefois, toutes ces réflexions sont placées par Frege à un niveau strictement fondationnel ; c'est-à-dire qu'elles concernent uniquement la question de la construction du nombre à partir d'un système de signes, et non pas le problème inverse et préalable que nous avons identifié comme décisif pour une approche critique de la question de la formalisation du sens. C'est pourquoi ce n'est pas dans ces pages, qui contiennent les éléments fondamentaux de l'attachement de Frege à l'arithmétisation de l'Analyse, que nous devons chercher l'action de l'Arithmétique sur la logique naissante. Elles ont été après tout déjà trop commentées. Nous devons nous pencher, en revanche, sur les réaménagements d'ordre constitutif qu'elles rendent nécessaires, mais qu'elles n'accomplissent pas. Car en conséquence des développements et découvertes que Frege commence à introduire dans ces pages, et en vue sans doute de l'accomplissement de son grand projet dans les *Grundgesetze*, les principes sur lesquels l'idéographie s'appuyait réclamaient d'être révisés et étayés. Cette mise au point du cadre général de la *Begriffsschrift*, qui passe fondamentalement par un réaménagement des concepts sémiologiques qui la soutiennent, a eu lieu dans une série d'articles célèbres rédigés et publiés au début des années 1890. De façon symptomatique, ils prennent tous pour titre les couples des termes ou concepts sur lequel porte de manière primordiale le réaménagement : « Fonction et concept » (1891), « Sur le sens et référence » (1892/2009) et « Concept et objet » (1892)[377].

C'est dans le premier de ces articles[378] que la dimension constitutive de l'Arithmétique par rapport aux fonctions se présente avec une évidence particulière. Dans ce texte, issue d'une conférence devant la *Société savante d'Iéna pour la médecine et les sciences naturelles*, Frege part d'une définition de la notion de fonction qu'il attribue à la découverte de l' « Analyse supérieure », à savoir : « par fonction de *x*, on entendait une expression de calcul qui contient *x*, une formule où figure la lettre *x* » (1891, p. 81). Aussi large que cette définition puisse paraître, la référence à une « expression de calcul » (*Rechnungsausdruck*) restreint d'emblée l'univers des fonctions considérées. On pourrait dès lors penser que cet univers correspond à celui des fonctions algébriques, déterminées par l'ensemble d'opérations algébriques élémentaires (addition, multiplication, exponentiation), avec leurs inverses respectives (soustraction, division, extraction de racine). Seulement, Frege ne précise pas ce qu'il entend par « expression de calcul », se contentant de donner les deux exemples suivants à la place : « $2 \cdot x^3 + x$ » comme fonction de *x*, et « $2 \cdot 2^3 + 2$ » comme fonction de 2. La critique qu'il s'empresse d'adresser contre cette conception de la fonction trahit pourtant ce

[377] En allemand : « *Funktion und Begriff* », « *Über Sinn und Bedeutung* » et « *Über Begriff und Gegenstand* ».

[378] Le premier à avoir été publié, bien qu'il ne soit pas le premier écrit, car, comme l'indique l'éditeur, ce n'est que par une contingence que « Sur le sens et la référence » a été publié après « Fonction et concept » (cf. Frege, 1891, p. 80, note de l'éditeur).

qu'il a à l'esprit. Car pour lui le défaut principal d'une telle définition est de ne pas distinguer « la forme du contenu, le signe du désigné » (p. 81). On aurait tort de croire que Frege revient ainsi à une configuration conceptuelle que ses formulations initiales avaient le mérite de contester. Si Frege s'exprime dans ces termes (« forme-contenu »), c'est sans doute par commodité de langage, devant un auditoire qui, comme il ne manque pas de le rappeler dans sa préface, n'était pas spécialisé. C'est sans doute la raison pour laquelle Frege ressent l'obligation dans ce texte de rectifier à chaque fois l'opposition forme-contenu par celle de *signe-désigné* (*Zeichen-Bezeichnetes*), qui n'est rien d'autre que celle de l'expression et le contenu. Le véritable sens de cette objection consiste cependant à signaler l'existence d'éléments de contenu au niveau même de la forme expressive, et ce non pas pour les dénoncer et demander leur éradication, mais bien au contraire, pour régler le fonctionnement des formes expressives sur les contenus qu'elles sont censées véhiculer. L'Arithmétique est alors immédiatement sollicitée comme modèle pour la compréhension de cette circonstance :

> J'ai déjà attiré l'attention sur les défauts des théories formelles de l'arithmétique actuellement reçues. On y parle de signes qui n'ont aucun contenu et n'en doivent pas avoir, mais on leur donne cependant des propriétés qui ne peuvent convenir sans absurdité qu'à leur contenu. Il en va de même ici [pour les fonctions] : une simple expression, la forme destinée à recevoir un contenu, ne peut être l'essence de la chose, seul peut l'être le contenu lui-même. (Frege, 1891, pp. 81-82)

Le sens de l'objection est donc clair : tant qu'on envisagera la forme comme vide de contenu, on sera forcé de lui attribuer des propriétés de contenu, sous peine d'absurdité, et cela dans la mesure où l'essence des expressions (ou de ce qu'elles sont censées exprimer) réside dans leurs contenus. On remarquera notamment la façon dont la notion d'expression se substitue de manière subtile mais perceptible dans ces lignes à celle de forme lorsque l'inhérence des contenus aux formes est assumée comme telle. C'est ainsi que le nouvel axe expressions-contenus est mis à l'œuvre pour gagner une intelligibilité sémiotique nouvelle des fonctions de l'Analyse, qui débouche sur l'exigence de régler les expressions fonctionnelles sur les contenus. L'inspiration (sinon la source) arithmétique de cette nouvelle intelligibilité est ici explicite. Mais plus décisive encore est la forme des contenus sur laquelle Frege suggère de régler les expressions fonctionnelles :

> Quel est donc le contenu, la référence[379] de « $2 \cdot 2^3 + 2$ » ? C'est la même que la référence de « 18 » ou de « $3 \cdot 6$ ». L'équation « $2 \cdot 2^3 + 2 = 18$ » exprime que la référence du groupe de signes à droite [du signe d'égalité] est la même que la référence des signes de gauche. Je me refuse à penser que $2 + 5$ et $3 + 4$ soient bien égaux mais non identiques. Cette idée

[379] Voir note 406 ci-dessous.

> repose sur la confusion signalée entre forme et contenu, signe et désigné. C'est tout comme si on voulait distinguer la violette odorante de la *viola odorata* parce que ces noms sonnent différemment. La différence des désignations n'est pas une raison suffisante pour qu'il y ait différence du désigné. (Frege, 1891, p. 82)

Voilà donc le *nombre* ainsi élevé à la place archétypale du contenu. On pourrait croire néanmoins qu'il ne constitue qu'un cas particulier du rapport expression-contenu comme rapport linguistique général de variation-invariance, tel que le suggère l'exemple de la violette odorante sur lequel Frege semble le rabattre immédiatement. C'est pourtant l'inverse qui se produit. Car si entre « violette odorante » et « *viola odorata* » a lieu une variation expressive susceptible de renvoyer à un contenu, aucune articulation interne à ces expressions ne permet d'en extraire une structuration fonctionnelle. *Du moins pas dans les termes selon lesquels Frege propose de concevoir la fonctionnalité* (c'est-à-dire, comme fonction propositionnelle). Cela se laisse voir bien plus clairement lorsque, au lieu de la traduction française on se rapporte à l'expression allemande effectivement employée par Frege. En effet, aucun trait *au niveau des expressions elles-mêmes* ne permet d'affirmer avec évidence qu'une invariance *expressive* pouvant occuper la place du contenu se cache derrière la variation « wohlriechendes Veilchen » et « *viola odorata* ». Il en ressort que le rapport absolument général de variation-invariance tel qu'il se donne dans les expressions d'un langage reste insuffisant pour déterminer entièrement une conception fonctionnelle comme celle de Frege. On rétorquera peut-être que la fonction propositionnelle résulte d'une mise en variation qui met en relief une articulation expressive. Ainsi, la considération de l'expression « wohlriechendes Veilchen » à côté d'autres comme « Steppen Veilchen », « Gelbes Veilchen », « Langsporn Veilchen »… suggère de manière naturelle une articulation proprement fonctionnelle. Néanmoins, cette mise en variation ne résout aucunement le difficile problème de l'identité de contenu entre « wohlriechendes Veilchen » et « viola odorata ». Mais plus profondément, il suffit de considérer des cas de variation linguistique, comme par exemple dans la langue allemande : « aufmachen », « zumachen », « einmachen », « vormachen », « hermachen »… pour comprendre que la question de l'identité des contenus est loin d'être déductible de manière simple de l'articulation fonctionnelle des expressions générales d'une langue.

Aussi, le passage cité de Frege révèle-t-il que *l'identité des contenus est une condition et non pas un effet de l'instrument fonctionnel qu'il cherche à mettre en avant*. Sans doute l'articulation expressive d'une langue est capable de fournir des identités de contenu. Mais de par sa nature intrinsèque la variation expressive dans une langue demeure intimement incapable de présenter des identités susceptibles de déterminer une fonction *propositionnelle*, du moins non pas de manière simple. C'est pourquoi le recours aux expressions linguistiques ne fait pas appel dans le passage cité à leur articulation interne, qui était censée constituer l'essence de la fonction propositionnelle d'après la *Begriffsschrift*. Non pas que Frege ait abandonné cette conception entretemps, mais au moment où une mise au point de la portée conceptuelle de la fonctionnalité s'impose, l'articulation proprement *propositionnelle* du langage apparaît comme un effet qui ne résulte pas directement de son articulation *expressive*. Autrement dit, articulation *propositionnelle* et articulation *expressive* ne se correspondent dans le système semio-logique frégéen que par un forçage.

On comprend dès lors le rôle primordial de l'Arithmétique, et du nombre en particulier, tel que ces pages de 1891 le mettent en lumière : *il vient assurer l'existence et l'unicité des contenus des expressions sous la condition desquelles une articulation fonctionnelle de forme propositionnelle pourra être élaborée*. Si le rapport de variation-invariance est inhérent à tout expressionnisme comme tel (qu'il soit linguistique ou autre), la fonctionnalité suivant laquelle Frege prétend le capturer (c'est-à-dire, la fonctionnalité *propositionnelle*) est proprement *arithmétique*. Plus précisément, *elle est le résultat d'une interprétation de l'Arithmétique en termes fonctionnels*. C'est en ce sens que les rapports de variation-invariance linguistique sont rabattus sur l'Arithmétique et pas inversement, comme la suite de l'article de Frege le laissera voir. Et c'est aussi dans ce sens précis que, plus profondément, comme nous l'avons pressenti au début de notre enquête, l'Arithmétique vient combler les lacunes ouvertes par l'indétermination essentielle de l'axe expression-contenu comme principe d'intelligibilité du langage en général.

Mais comment le nombre parvient-il à assurer l'identité des contenus pour une différence expressive ? Malgré ce que laissait entendre la définition générale du contenu conceptuel dans la *Begriffsschrift*, cette identité n'est pas directement extraite de la forme même des expressions (comme cette partie qui est « la même » dans des expressions différentes[380]). C'est ce que trahissent les trois exemples avancés par Frege pour étayer l'identité des contenus face à la variation expressive (pp. 82-83) ; identité entre :

1) $2 \cdot 2^3 + 2$ $\qquad 18 \qquad$ $3 \cdot 6$;

entre :

2) $2 + 5$ $\qquad 3 + 4 \qquad$ 7 ;

et entre :

3) $2 \qquad 1 + 1 \qquad 3 - 1 \qquad 6 : 3$

Dans aucun de ces trois cas une identité n'est décelable par la seule reconnaissance d'une articulation à l'intérieur d'une variation strictement expressive. Il suffirait de remplacer les

[380] Voir *supra* p. 64.

chiffres de notre système arabe de numération par d’autres qui nous seraient étrangers (par exemple,

$$\bowtie \cdot \bowtie^{\odot} + \bowtie \qquad \wedge \ominus \qquad \odot \cdot \boxminus$$ [381],

pour s’apercevoir du fait que la source de l’évidence de l’identité mise en avant par Frege n’est autre que notre expérience courante de l’Arithmétique et de ses signes. Si bien que, du point de vue de leur nature expressive, ces cas sont en tout assimilables à celui de la *viola odorata*, ce qui n’échappe surement pas à Frege. Mais les cas comprenant des chiffres et des signes d’opération relèvent d’une identification implicite qui est susceptible d’explicitations supplémentaires et que Frege fera porter sur la nature du nombre. Cette identification et l’explicitation, ou plutôt les explicitations, dont elle est capable, n’ont pourtant rien de naturel ; elles dépendent d’une véritable *synthèse* qui est comme enveloppée dans notre expérience et notre pratique sémiotique ordinaire de l’Arithmétique. Synthèse qui s’incarne, comme Frege ne manque pas de le remarquer, dans une expression d’égalité (*Gleichung*) comme « $2 \cdot 2^3 + 2 = 18$ », et que nous devrions nous garder, suivant le conseil même de Frege, d’envisager comme une simple forme vide de contenu.

Que Frege se serve de l’expérience ordinaire de l’Arithmétique, cela semble clair du fait que tous les cas exposés pour justifier l’identité du contenu renvoient à des nombres naturels ; Frege évite soigneusement des expressions du type « $1 - 3$ » ou « $3 : 6$ », dont le contenu cesse d’être immédiatement évident. C’est ce qui détermine la nature avant tout arithmétique (et non algébrique) des fonctions considérées : sollicitées pour leur capacité à capturer la variation expressive autour d’un contenu identique, seules celles-ci semblent immédiatement aptes à remplir cette tâche, conformément à une conception qui s’accorde parfaitement avec l’esprit de l’arithmétisation de l’Analyse. Toujours est-il que si Frege fait subtilement appel à l’expérience sémiotique de l’Arithmétique pour effectuer la synthèse selon laquelle des expressions acceptent d’être identifiées en fonction d’un contenu, ce n’est pas sur une telle expérience qu’il peut la fonder. Aussi explicite-t-il cette synthèse de la façon suivante :

> Si donc l’on doit distinguer les signes numériques de leur référence, on doit tout autant accorder une même référence aux expressions « 2 », « $1 + 1$ », « $3 - 1$ », « $6 : 3$ » ; car on ne voit pas quelle serait la différence. On peut dire : $1 + 1$ est une somme tandis que $6 : 3$ est un quotient. Mais qu’est donc $6 : 3$? Le nombre qui multiplié par 3 donne 6. On dit « *le* nombre », non pas « un nombre » ; l’article défini[382] indique qu’il n’y en a qu’un seul. Or

---

[381] Et cela en gardant le sens usuel des signes d’opérations, qui n’auraient quant à eux aucune raison de demeurer inchangés.

[382] La traduction française rend, sans doute par erreur, « mit dem bestimmten Artikel » par « l’article indéfini ».

$$(1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1) = 6,$$

> $(1 + 1)$ est donc précisément le nombre désigné par $(6 : 3)$. (Frege, 1891, p. 83)

On voit de cette façon que si des expressions entièrement hétérogènes, au point de ne partager aucun trait expressif, telles « 2 », « $1 + 1$ » et « $6 : 3$ », peuvent être mises dans un rapport d'égalité à partir duquel l'identité d'un contenu pourra être affirmée, c'est grâce à une série d'opérations sémiotiques précises, soit de nature purement définitionnelle comme dans le cas de l'égalité entre « 2 » et « $1 + 1$ » (ce qui vaudrait aussi pour les signes « 3 » et « 6 »), soit de façon plus complexe, liant l'un à l'autre le fonctionnement des signes « + » et « : ». Ces opérations sémiotiques *ne font qu'un avec l'Arithmétique elle-même*. L'Arithmétique, en tant que régime mathématique de signes, devient ainsi le lieu d'une synthèse, qui est la condition même de l'existence d'un contenu définissant la formalité selon laquelle ces mêmes propriétés arithmétiques pourront ensuite être établies analytiquement. Ces synthèses ne sont d'ailleurs pas uniquement arithmétiques. On peut le voir lorsque Frege revient sur son argument purement linguistique qui fait de l'article défini une sorte de garant de l'unicité du contenu. En fait, Frege finit par avouer, face aux objections de Kerry, que l'article défini dans une langue ne fait qu' « indiquer » l'unicité, ce qui ne saurait valoir comme une preuve[383]. C'est ainsi que Frege ajoute aussitôt :

> Les expressions sont différentes mais correspondent toujours à la même chose, bien qu'elle soit saisie différemment et sous différents aspects. Sinon l'équation $x^2 = 4$ aurait, outre les racines 2 et -2, $(1 + 1)$ et d'innombrables autres, différentes les unes des autres encore que semblables à un certain égard. Dès lors qu'on admet deux racines réelles et deux seulement, on refuse l'idée que le signe d'égalité pourrait ne pas référer à une coïncidence complète mais seulement une concordance partielle. (Frege, 1891, p. 83)

C'est donc en reconnaissant ou admettant (*anerkennen*) deux racines pour l'équation de deuxième degré $x^2 = 4$ que l'on peut arriver à l'idée d'une identité de contenu pour des expressions différentes. Le même type de synthèse sera d'ailleurs invoqué lorsqu'il s'agira de présenter avec évidence l'identité de contenu des expressions comme « $x^2 - 4x$ » et « $x(x - 4)$ », justifiant l'introduction des parcours de valeurs (p. 86). Mais où s'agence-t-il, ce rapport entre degré des équations et nombre de racines sinon dans la pratique mathématique, et

[383] Cf. l'article « Concept et objet » dans Frege (1892, p. 130 sq), où cette question déclenche pourtant des considérations profondes à propos du rapport entre la logique et le langage courant : « On a tendance, semble-t-il, à surestimer l'importance de la proposition et de la lettre, à croire que diverses expressions d'un langage ne sont jamais parfaitement équivalentes et qu'un mot ne peut jamais être rendu avec exactitude dans un autre langage. On pourrait aller plus loin et dire que jamais le même mot n'est compris de la même manière par les locuteurs d'un même langage. Je ne chercherai pas quelle est en ceci la part de vérité ; j'insisterai seulement sur le fait que l'on peut trouver un élément commun en diverses expressions, ce que j'appelle le sens et, dans le cas des propositions, la pensée. […] Si on voulait proscrire toute reformulation d'une expression sous prétexte que le contenu en serait altéré en même temps, la logique serait frappée d'interdit. » (1892, p. 131, note).

algébrique en particulier ? Frege conditionne de cette manière l'identité générale des contenus exprimée par l'égalité des expressions à des résultats de nature strictement mathématique (arithmétique pour l'établissement des égalités, algébrique, ou d' « Algèbre arithmétique », dans le cas particulier du nombre de racines pour une équation). C'est d'ailleurs sous la garantie rassurante de ces résultats « admis » qu'il se permet d'étendre l'univers des contenus au-delà des nombres naturels (par exemple, l'entier relatif « -2 »), ainsi que, bizarrement, au-delà de l'unicité (par exemple : deux contenus, 2 et -2, pour l'expression « $x^2 = 4$ »). Ceci ne fait qu'étendre le lieu de la synthèse. Ce faisant, il accorde implicitement aux mathématiques, voire aux mêmes régions des mathématiques (c'est-à-dire, aux régions des mathématiques concernées par les mêmes problèmes), le même statut synthétique qui soutenait les différentes dimensions de la résistance du contenu dans l'œuvre de Boole.

Une fois l'existence, voire l'unicité[384], des contenus ainsi assurées sur le modèle du nombre (entier), et seulement alors, Frege est prêt à introduire des variations expressives susceptibles d'une analyse fonctionnelle correspondant à la définition générale initialement donnée dans la *Begriffsschrift*. Il présente alors les 3 expressions suivantes :

$$2 \cdot 1^3 + 1,$$
$$2 \cdot 2^3 + 2,$$
$$2 \cdot 4^3 + 4,$$

qui, par le principe de variation-invariance, se laisse sémiotiser fonctionnellement comme :

$$2 \cdot (\,)^3 + (\,)$$

ou encore :

$$2 \cdot x^3 + x$$

C'est à partir du découpage particulier commandé par la forme spécifique du nombre que Frege étendra aussitôt la portée de ses formulations pour saisir la logicité des contenus du langage en général. L'opération est connue, mais la clarté gagnée concernant l'origine arithmétique de cette forme justifie la relecture de Frege dans le texte :

> Nous n'en resterons pas aux équations et aux inéquations. La forme linguistique d'une équation est une proposition affirmative. Une telle proposition a pour sens une pensée – tout au moins prétend-elle en contenir une – et cette pensée est en règle générale vraie ou fausse. Je veux dire qu'elle a en général une valeur de vérité, qui doit justement être comprise comme la référence de la proposition, *tout comme le nombre* 4 *est la référence de l'expression* « $2 + 2$ », ou comme Londres est la référence de l'expression « capitale de l'Angleterre ».

[384] Malgré l'exemple de la double racine.

> On peut envisager de décomposer les propositions affirmatives, *comme les équations, les inéquations, et les expressions analytiques*, en deux parties dont l'une est fermée sur soi et dont l'autre réclame un complément, est insaturée. (Frege, 1891, pp. 90-91)

C'est donc bien à l'Arithmétique et au nombre que Frege finit par nouer le sort de la notion de contenu[385]. Si bien que l'expression fonctionnelle « $F(x)$ » introduite par Frege, issue en apparence d'une généralisation de la Théorie analytique des fonctions, constitue en fait un moyen de transférer dans le langage naturel la forme numérique, telle qu'elle résulte de sa compréhension fonctionnelle. Et cela dans la mesure où dans « $F(x)$ », le contenu de l'expression « x » est décalqué sur celui des signes numériques « 1 », « 2 », « 3 »…, celui de « $F(\ )$ » sur celui déterminé par l'ensemble, à la fois infini et restreint, des expressions opératoires arithmétiques dans l'articulation desquelles les nombres sont susceptibles d'entrer, et enfin celui de « $F(x)$ » sur celui des expressions de cet ensemble qui sont susceptibles d'être égalées à un signe numérique de type « 1 », « 2 », « 3 »…

Ce n'est pas par hasard si ce transfert effectué par le signe de fonction nous permet d'y reconnaître le dessein originel de Frege, celui d'ériger une logique du contenu en assumant le problème d'une *lingua characterica* telle qu'elle se trouvait déjà incarnée dans l'Arithmétique envisagée comme un langage. Mais on comprend maintenant dans quelle mesure son entreprise analytique reste par là même sous-tendue par un socle synthétique en accordant un rôle à la fois constitutif et prélogique aux synthèses mathématiques, et à l'Arithmétique en particulier. Ce faisant, les constructions frégéennes rejoignent la résistance booléenne dans la position implicite d'une strate mathématique où s'agencent pour la logique des principes du contenu. Que cette strate soit habitée par la question du nombre, et des propriétés arithmétiques et algébriques à lui rattachées, c'est là un trait commun à ces deux entreprises logiques singulières et aux rapports hétérogènes mais intimes qu'elles entretiennent avec le contenu. Que l'appropriation de ces synthèses se fasse dans un cas à travers l'organisation propre à une conception opératoire, tandis que dans l'autre elle résulte d'une compréhension en termes fonctionnels, voilà ce qui explique non seulement la divergence dans les régimes d'intelligibilité que ces entreprises mettent en œuvre, mais aussi le succès de l'approche frégéenne dans son effort pour offrir une architecture logique capable d'intégrer dans une articulation harmonieuse les éléments du contenu que Boole avait fait proliférer dans son système dans une dispersion en fin de compte irrémédiable.

[385] Cela explique d'ailleurs que même lorsqu'il envisagea la possibilité de considérer des fonctions à la place des arguments, définissant des fonctions d'ordre ou degré supérieur, et suscitant l'introduction d'une véritable proto-théorie des types, toutes ces expressions fonctionnelles demeurent pour lui dénuées de contenu tant que le renvoi qu'elles sont censées opérer ne se produit pas entre deux contenus de type numérique, comme dans le cas élémentaire des fonctions arithmétiques (cf. par exemple, Frege, 1893-1903/1966, pp. 36-37).

Toujours est-il que cette intégration au niveau de la conceptualité logique, non moins que de ses instruments, n'efface pas la nature synthétique des déterminations mathématiques sur lesquelles elle s'assoie. Synthèse qui est de plus, comme nous venons de l'indiquer, double, dans la mesure où elle combine les déterminations d'un domaine particulier (celui de nombres et de l'Arithmétique) avec celles qui correspondent à la façon particulière de l'approcher et de le saisir (opérationnelle ou fonctionnelle). Dès lors, aussi général que se veuille le système constitué par Frege, et aussi universelle que sa langue se présente, il ne saurait se déprendre de la particularité qui est la marque indélébile de ces synthèses. Cette particularité est bien celle des aspects sémiotiques des fonctions arithmétiques. Elle est déterminée par le fait somme toute très particulier qu'une expression fonctionnelle comme « $2 \cdot x^3 + x$ » est comprise comme l'intermédiaire *entre deux nombres* (par exemple, entre 1 et 3, entre 2 et 18 ou entre 4 et 132). Ce sont des nombres qui doivent remplir les blancs dans la fonction, et ce sont encore des nombres qui résultent de ce remplissage. L'analyse des expressions en termes de variation-invariance (ou de fonction et argument) sera dès lors contrainte implicitement par l'exigence de n'admettre que des nombres, tant comme argument que comme résultat du remplissage des expressions fonctionnelles par ces arguments. C'est ce que Frege veut dire lorsqu'il affirme que tant le signe « x » que l'expression fonctionnelle où il figure, « indique toujours un nombre même s'il est indéterminé » (p. 84). Si bien que lorsque ces expressions fonctionnelles viendront pourvoir la forme des contenus en général, le nombre, la forme du nombre, se verra de cette manière élevée au rang de forme privilégiée du contenu sur laquelle les expressions auront à se régler.

Cette contrainte est décisive. Puisqu'après tout rien n'empêche, en termes d'analyse des variations strictement expressives, de tracer la limite entre partie variable et constante aussi librement que les signes le permettent, en attribuant par exemple une place variable aux signes d'opérations. Ainsi, des expressions comme « $2 + 2$ », « $2 - 2$ » et « $2 : 2$ » se laisseraient exprimer fonctionnellement comme « $2(\ )2$ » ou « $2x2$ », où le signe « x » attendrait sa substitution par un signe de fonction pour que l'expression renvoie à un nombre. On pourrait même imaginer des expressions fonctionnelles telles que « $2x$ », voire « $+x$ », où le remplissement de la place de l'argument par un signe d'opération (et non pas un signe numérique) renverrait à une autre fonction. Une telle possibilité, habilitée *a priori* par le principe de variation-invariance que la notion de fonction est censée exprimer dans toute sa généralité, aurait peut-être conduit Frege à se confronter à la question des opérateurs, renouant avec les ressorts intimes de la tradition booléenne[386], et préfigurant certains des développements les plus fertiles de la logique du XX^{e} siècle[387]. Qui plus est, elle aurait eu à se mesurer avec une conception du langage en tant que milieu de contenus ouverts et fragmentaires.

C'est au nombre et à ses articulations spécifiques que Frege décide pourtant d'attacher le sort de la logique, et avec elle, de la logicité de tout langage. Les mathématiques, et l'Arithmétique en particulier (à laquelle Frege pense sans doute pouvoir réduire l'Algèbre en dernière instance), fournissent de cette façon les conditions préalables et suffisantes pour brider le principe de détermination, après tout trop large, du rapport variation-invariance incarné par l'axe expressions-contenus que l'instrument fonctionnel avait pour but d'incarner. Plus précisément, comme nous l'avons anticipé dès le début, l'Arithmétique pourvoit, grâce à ces propriétés issues de son interprétation fonctionnelle, des solutions particulières pour le double problème de l'identification des contenus par rapport à la déduction, et du signe d'égalité avec l'excès du plan expressif dont il témoigne. Mais elle ne le fait qu'en forçant l'émergence d'une conceptualité sémiologique (c'est-à-dire, d'une théorie des signes) entièrement nouvelle, que nous avons commencé à voir apparaître dans cette mise au point de la notion de fonction, et qui compte parmi les contributions les plus originales et célèbres de Frege pour la pensée logique non moins que philosophique.

IV.2.2. Concept et objet : la détermination des unités de contenu

Rappelons ce que nous avons identifié comme le drame fondamental de la logique frégéenne, ce « problème du contenu » qu'elle pose à la pensée philosophique. Cherchant à constituer une logique rigoureuse capable de déterminer de façon intrinsèque des éléments de contenu, en accord avec une tradition logico-philosophique qui s'enracine dans l'Idéalisme allemand, Frege opère un déplacement de la polarité fondamentale forme-contenu qui se trouvait à la base tant de la tradition philosophique continentale que des innovations de la logique mathématisée anglaise. Il la remplace par un axe expressions-contenus, suivant lequel tant les contenus que les expressions deviennent susceptibles d'admettre un caractère formel,

---

[386] En effet, suivant son approche opératoire, Gregory était par exemple parvenu à envisager des expressions comme « $(+)^{\frac{d}{dx}}$ », « $(-)^{\frac{d}{dx}}$ » ou « $(-)^{\log}$ », malgré leur manque d'interprétation immédiate (Gregory, 1838/1865, p. 6).

[387] En effet, la Géométrie de l'interaction de J.-Y. Girard trouve une interprétation au moyen des algèbres d'opérateurs. Cf. Girard (2007), ch. 19.

dans une détermination réciproque qui assure l'intimité entre la distribution structurée des contenus propre à une langue et la puissance déductive ou inférentielle animant un calcul. Par la mise en avant de ce nouvel axe, la pensée logique se trouve engagée dans le problème général des contenus tels qu'ils sont véhiculés par tout langage ou système expressif. Mais ce n'est pas moins par cet axe, et par son effectivité intrinsèque appuyée sur un principe de variation-invariance, qu'une nouvelle organisation de la pensée logique est opérée et que de nouveaux instruments doués d'une efficacité inédite ont pu être conçus. Nous avons vu ainsi le paysage du contenu se peupler des figures stratifiées de l'individu, du concept, du jugement et de la valeur de vérité, ainsi que les expressions se structurer en expressions formelles (implication et négation) et expressions de contenu (fonction propositionnelle et quantificateurs). Seulement, une lacune paraît séparer la position de l'axe expressions-contenus en tant que principe général de détermination. En effet, rien dans le principe de variation-invariance qui actualise l'axe expressions-contenu ne permettait de dessiner d'une telle manière le territoire de la logique. Cette lacune se manifestait, d'une part, à travers le fait que le principe déductif du système ne permettait pas de déterminer les unités de contenu comme il était censé de le faire (par la définition même de la notion de contenu), et de l'autre, par le fait que l'égalité des contenus engendrait un excès inattendu du plan des expressions sur celui des contenus.

Nous avons alors suggéré que si une telle définition avait lieu malgré tout, c'était dans la mesure où elle n'était pas l'effet du principe de variation-invariance dans toute sa généralité, mais résultait de l'exercice de ce principe dans le cadre restreint de l'Arithmétique, comme domaine mathématique spécifique abritant des pratiques et des synthèses singulières. D'ailleurs, l'Arithmétique s'annonçait déjà avant Frege comme responsable de l'introduction du contenu formel dans la logique, comme nous avons pu le constater en étudiant la place singulière occupée par l'œuvre de Boole dans le contexte d'émergence de la logique booléenne. L'interprétation fonctionnelle de l'Arithmétique vient de nous révéler comment ces pratiques et ces synthèses constituent bien l'infrastructure des formulations frégéennes. Il reste maintenant à montrer par quels moyens elles parviennent à conférer une détermination particulière aux indéterminations dont fait preuve le double problème des unités déductives et des identités expressives.

La réponse viendra d'une double élaboration conceptuelle directement issue de l'interprétation fonctionnelle de l'Arithmétique que nous venons de mettre en relief, à savoir la reformulation du couple *concept-objet*, et la proposition de la célèbre distinction entre *sens* (*Sinn*) et *référence* (*Bedeutung*). Ces élaborations ont lieu à l'occasion de la mise au point de l'appareillage conceptuel de l'idéographie du début des années 1890. En tant que telles, elles constituent une explicitation des dimensions inhérentes à l'Expressionnisme frégéen, articulé par l'axe expressions-contenus, qui demeure, quant à lui, implicite (c'est-à-dire non-thématisé) bien qu'omniprésent et doué d'une efficacité certaine du début à la fin de l'œuvre de Frege. En ce sens, elles peuvent être pensées comme correspondant à l'élaboration des concepts sémiologiques comme celui d'interprétation, de symbole ou de classe, sous le régime de l'Abstraction symbolique. Les développements conceptuels dont il sera ici question se comptent parmi les formulations les plus commentées, étudiées et analysées de l'œuvre de Frege, voire de l'histoire et la philosophie de la logique tout court. Aussi, nous contenterons-nous de les exposer de façon sommaire, en mettant l'accent sur leur extraction arithmétique et leur efficacité devant la double indétermination problématique de l'Expressionnisme frégéen[388].

La distinction entre concept et objet était déjà présente dans les *Grundlagen* comme l'un des trois principes guidant la recherche entreprise par Frege. Dans cet ouvrage on lit, à côté de la formulation du principe antipsychologique et du principe contextuel : « Il faut ne jamais perdre de vue la différence entre concept et objet », que Frege commente aussitôt, bien que laconiquement : « il est illusoire de penser que l'on peut faire d'un concept un objet sans l'altérer » (1884/1969, p. 122). Mais la vérité est que, plutôt que de s'appuyer sur cette distinction, l'ouvrage de Frege la rend nécessaire. En effet, dans ce texte célèbre où il découvre l'essentiel de sa construction logique du nombre, l'élément central de sa découverte réside dans ce fait que le nombre est le résultat d'une attribution portant, non pas sur des objets, comme on tend intuitivement à le croire, mais sur des concepts. D'après sa formulation bien connue : « Attribuer un nombre, c'est dire quelque chose d'un concept » (p. 182). Pourtant, cette circonstance demeure entièrement masquée par les expressions du langage courant :

> …je reconnais que le langage attribue par ailleurs le nombre aux objets, non aux concepts, dans l'expression « le nombre des billes » analogue à « le poids des billes ». Il semble qu'on parle d'objets, alors qu'en vérité c'est d'un concept qu'on énonce quelque chose. Cet usage est trompeur. L'expression : « quatre nobles chevaux » donne l'illusion que « quatre » ajoute une détermination au concept « noble cheval », tout comme « noble » pour le concept « cheval » : mais seul « noble » est un caractère du concept, et par le mot « quatre » nous énonçons quelque chose d'un concept. (Frege, 1884/1969, p. 180)

La confusion a ainsi lieu à des niveaux multiples, ce qui fait que les notions de concept et d'objet ne sont pas uniquement requises au niveau de l'attribution du nombre. D'une part,

---

[388] Il est rare qu'un ouvrage ou article dédié à Frege ne touche plus ou moins directement ces questions. Parmi les plus incontournables, justes ou suggestifs on pourra se rapporter à Dummett (1973), Sullivan (2004), Benmakhlouf (1997; 2002) et de Rouilhan (1988).

la relation entre ces notions devient nécessaire pour la définition du concept porteur, pour ainsi dire, d'un nombre (c'est-à-dire, le concept sur lequel un concept de nombre pourra être attribué à son tour), dans la mesure où cette attribution aura lieu en tenant compte des objets qui tombent sous lui. D'autre, et de façon plus complexe, l'articulation entre ces deux notions devient indispensable du fait que le nombre ne s'épuise pas pour Frege dans son existence conceptuelle (par laquelle il dit quelque chose sur un autre concept), mais est lui-même un objet. Il devient clair dès lors que le couple de notions concept-objet est partout nécessaire dans cette construction. Sa définition rigoureuse à l'intérieur d'un milieu expressif qui a tendance à les confondre apparaît ainsi comme une condition nécessaire pour mener à bien son projet. Pourtant, dans cet ouvrage de 1884 la signification de cette distinction reste pour l'essentiel sous-entendue, ne recevant que des éclaircissements marginaux[389]. La rigueur extrême visée par l'entreprise des *Grundgesetze* réclame l'achèvement de cette distinction par la mise en avant d'un critère à la fois simple, univoque et appuyé sur les instruments formels de l'idéographie.

Cette élaboration sera envisagée de façon directe dans « Concept et objet », paru dans le *Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie* en 1892. Frege annonce cet article à deux reprises dans « Sur le sens et la référence » (1892/2009, pp. 53-54 et 63) comme le lieu où serait réalisé l'examen détaillé de la distinction et du rapport entre concept et objet : cela montre assez à quel point cette élaboration faisait partie pour lui d'un plan général de réaménagement conceptuel de l'ensemble de son système. Dans ces pages de 1892, Frege prend comme prétexte les critiques adressées par Benno Kerry à son usage de la notion de concept. Kerry conteste notamment le caractère absolu de la distinction frégéenne entre objet et concept, avançant l'argument que les concepts peuvent eux aussi être des objets. Le premier réflexe de Frege est alors de rappeler le caractère prédicatif du concept face à l'impossibilité des noms d'objet (des « noms propres ») d'être employés comme des prédicats grammaticaux (1892, p. 128). Il présente alors l'exemple suivant :

---

[389] En effet, les idées fondamentales concernant la nature de la distinction entre concept et objet apparaissent seulement comme de simples remarques figurant presque exclusivement dans des notes en bas de page. Ainsi, après avoir distingué les représentations subjectives (*subjectiven Vorstellungen*) des représentations objectives (*objectiven Vorstellungen*), Frege affirme : « On peut diviser les représentations objectives en objets et concepts. » (1884/1969, pp. 155-156, note). Et bien que la détermination de ces deux notions soit déjà rapportée aux parties d'un jugement susceptibles d'être remplacées (cf. p. 196), ces parties restent encore associées vaguement aux sujets et prédicats : « Un concept est pour moi prédicat possible d'un contenu de jugement singulier ; un objet est sujet possible d'un tel contenu de jugement » (p. 192, note). Enfin, la distinction entre un concept et, non pas les objets tombant sous lui, mais l'objet lui correspondant (par ex. le concept déterminant le nombre quatre et l'objet que le nombre quatre est), est ici associée à la distinction entre le concept et l'extension de ce concept, considérée comme un tout, dont Frege dit : « Je supposerai que l'on sait ce qu'est une extension de concept » (p. 194, note).

> Le « est » de la proposition « l'étoile du matin est Vénus » n'est évidemment pas une simple copule : si l'on consulte le contenu, « est » est une partie propre du prédicat ; en conséquence, le mot « Vénus » ne constitue pas à lui seul le prédicat. […] Nous avons ici un mot, « Vénus », qui ne peut pas être un prédicat, bien qu'il puisse constituer une partie d'un prédicat. La référence de ce mot ne peut pas être un prédicat, elle ne peut être qu'un objet. (Frege, 1892, pp. 129-130)

Prédicat et sujet sont présentés ainsi « dans leur sens linguistique » comme les principes de la définition de la distinction entre concept et objet, le concept constituant le contenu d'une expression prédicative, l'objet ne pouvant l'être que d'une expression de sujet (p. 133). Frege ne nie pas qu'un concept puisse tomber sous un autre concept d'ordre supérieur, mais ce n'est pas pour autant que ce concept peut se confondre avec le ou les objets qu'il subsume. Appuyé sur le critère principal de la prédicativité, Frege est alors capable d'établir les distinctions nécessaires. D'une part, un concept ne peut tomber sous un autre *directement* ; un objet lui correspondant doit prendre sa place :

> Dans le cours d'une recherche logique, il n'est pas rare qu'on ait besoin d'énoncer quelque chose d'un concept et donc de revêtir le concept de la forme linguistique usuelle pour de tels énoncés. D'où il résulte que l'énoncé est le contenu d'un prédicat grammatical. On s'attendrait alors à ce que le concept soit la référence du sujet grammatical. Mais le concept, de par sa nature prédicative, ne peut pas jouer d'emblée ce rôle, il doit d'abord être changé en un objet ou, pour parler plus précisément, il doit être représenté [*vertreten*] par un objet que nous désignons en préposant les mots « le concept », par exemple : « Le concept *homme* n'est pas vide. » (Frege, 1892, p. 132)

La difficulté de cette approche réside, comme Frege ne manque pas de le souligner, dans son caractère parfois contre-intuitif ; car si « est un homme » définit un concept, « le concept d'homme » n'est pas un concept, mais un objet (correspondant à ce concept). Quant à la nature de cet objet, Frege se contente de renvoyer aux *Grundlagen* pour se défendre contre l'accusation de Kerry d'avoir confondu concept et extension du concept. La notion d'extension du concept était pourtant supposée connue dans l'ouvrage de 1884 (1884/1969, p. 194, note).

Or, si le critère de prédicativité ordonne d'une part de ne pas confondre le concept avec l'objet qui lui correspond et le représente lorsqu'il tombe sous un concept de degré supérieur (objet que Frege identifie ici implicitement à l'extension du concept), d'autre part il oblige à bien distinguer le concept et son extension des objets tombant sous lui, même dans le cas où il n'y en aurait qu'un seul[390]. Ce qui se laisse voir dès que l'on essaie de substituer un objet par son concept dans le contexte d'un jugement : dans l'expression « il y a au moins une racine carrée de 4 », on ne peut pas remplacer « une racine carrée de 4 » par « le concept *racine carrée de* 4 » sans en altérer profondément le sens (1892, p. 135). Il en découle deux conséquences majeures pour la cohérence d'un système logique : d'abord, la différence de nature des concepts qui diffèrent par l'ordre ou le degré[391] ; et, associée à elle, la différence de nature de la relation « tomber sous », suivant qu'il s'agisse d'objets ou de concepts[392] :

> Les concepts de deuxième degré, sous lesquels tombent des concepts, sont essentiellement différents des concepts de premier degré sous lesquels tombent des objets. Le rapport entre un objet et un concept de premier degré sous lequel il tombe est différent du rapport, analogue d'ailleurs, existant entre un concept de premier degré et un concept de second degré. On pourrait, si l'on voulait marquer équitablement la ressemblance et la différence, dire qu'un objet tombe *sous* [*falle* unter] un concept de premier degré et qu'un concept tombe *dans* [*falle* in] un concept de second degré. La différence entre concept et objet demeure donc dans toute sa netteté. (Frege, 1892, p. 136)

Voilà donc la manière dont l'essence de la distinction entre concept et objet se trouve entièrement renouvelée dans le cadre du système frégéen. Suivant ces déterminations, non seulement la construction logique du nombre trouve ses conditions conceptuelles, voire ontologiques, mais plus généralement des principes fondamentaux se trouvent parfaitement définis pour l'établissement d'une relation d'appartenance distincte de celle de l'inclusion, et pour l'élaboration d'une théorie de types – deux des aspects principaux pour la Théorie des ensembles naissante.

Mais cette présentation de la distinction concept-objet en termes purement prédicatifs est en dernière instance fallacieuse. La raison en est simple : la distinction entre sujet et prédicat « dans leur sens linguistique » n'a, depuis le début de l'œuvre logique de Frege, aucun droit de cité dans son système. Justifié certainement par le caractère didactique, voire polémique, de ce texte, le recours à la prédicativité dissimule le fait que les notions d'objet et de concept se trouvent déterminées par la distinction non pas entre sujet et prédicat mais *entre argument et fonction* (auxquelles Frege a déjà réduit de manière définitive celles de sujet et prédicat). Si bien que la distinction concept-objet n'est pas prédicative, *mais fonctionnelle*.

[390] Frege (1892, p. 129) : « …*rien d'autre que Vénus*. Ces mots réfèrent à (*bedeuten*) un concept, sous lequel il est vrai ne tombe qu'un seul objet. Mais un tel concept doit toujours être distingué de l'objet qu'il subsume. »

[391] Dans les *Grundlagen* Frege parlait de l' « ordre » (*Ordnung*) d'un concept, terme auquel il préférera celui de « *Stufe* » à partir des années 1890, habituellement traduit par « degré » ou « niveau ». Cf. Frege (1891, p. 98, note).

[392] C'est pourquoi Frege saluera l'introduction par Peano du signe « ε » à côté du singe « Ↄ ». Cf. Frege (1984, pp. 240, 242).

Frege ne cache pas d'ailleurs dans ce texte le caractère fonctionnel de son critère de prédicativité. Et cela à deux reprises, qui sont pourtant reléguées, l'une dans une note en bas de page, l'autre dans une allusion faite dans le paragraphe final du texte, renvoyant toutes les deux à son article « Fonction et concept »[393]. C'est donc dans cet article qu'il faut chercher les véritables déterminations de l'objectalité comme de la conceptualité de l'Expressionnisme frégéen.

On remarquera alors que la question de l'objectalité est soulevée dès le début de cet article de 1891, à propos précisément de l'objectalité des nombres. Aussi, Frege affirme-t-il immédiatement après son exemple de la « viola odorata » :

> La différence des désignations n'est pas une raison suffisante pour qu'il y ait différence du désigné. Ce principe n'a pas la même évidence en arithmétique pour la seule raison que la référence du signe numérique 7 n'est rien qui soit perceptible par les sens. Cette tendance, si commune aujourd'hui, à ne pas reconnaître pour objet ce qui n'est pas perçu par les sens, a pour conséquence que l'on prend les signes des nombres pour les nombres eux-mêmes, pour les véritables objets de recherche, auquel cas 7 et $2 + 5$ seraient différents. (Frege, 1891, p. 82)

La possibilité d'attribuer une nature objectale aux nombres est essentielle pour le projet frégéen de formalisation du sens. Comme le laisse voir ce passage, l'opération frégéenne est telle qu'elle étend d'abord l'objectalité aux nombres, dont la nature d'objet est pour le moins problématique, pour renverser ensuite le sens de la détermination en faisant du nombre le modèle de tout objet, par la généralisation de la notion de fonction initialement conçue de façon purement numérique. Autrement dit, c'est par l'attribution d'une nature objectale aux nombres que Frege sera habilité à transférer les propriétés de ceux-ci aux objets en général. Cette primauté du nombre est explicite lorsque Frege écrit : « Il n'y a plus lieu de se limiter aux nombres, on doit admettre comme argument tout objet en général » (1891, p. 91). La nature objectale du nombre est ainsi chez Frege une condition constitutive de la logique avant d'être un effet du fondement logique de l'Arithmétique. Et cela malgré le fait que les nombres ne remplissent pas la condition d'objectalité typiquement exigée par la philosophie, et par le criticisme kantien tout particulièrement, d'être donné dans une intuition sensible[394]. C'est

[393] Frege (1892, p. 133, note) : « Ce que j'appelle la nature prédicative du concept n'est qu'un cas particulier de l'incomplétude ou insaturation, que j'ai donnée comme un trait essentiel de la fonction dans mon article *Fonction et concept* » ; et aussi Frege (1892, p. 141) : « « Clos sur soi-même », « insaturé » sont des expressions imagées, mais je ne peux faire mieux que de signaler ainsi ce que je veux dire. Le lecteur aura la tâche plus aisée s'il se reporte à mon article *Fonction et concept*. Si l'on demande ce que l'Analyse appelle fonction, on butera sur le même obstacle. Et un examen serré révélera que la difficulté gît dans la chose même et dans la nature de notre langage, qu'on ne peut remédier à une certaine inadéquation de l'expression parlée, qu'il n'y a enfin rien d'autre à faire que d'en prendre conscience et d'en tenir compte. ».

[394] Frege adresse explicitement cette critique à la philosophie kantienne dans Frege (1884/1969, § 89).

pourquoi au lieu de montrer par des constructions logiques comment le nombre est un objet selon les critères établis de l'objectalité philosophique, Frege modifie les critères mêmes de l'objectalité pour rendre possible une telle constructibilité[395].

C'est alors que l'interprétation fonctionnelle de l'Arithmétique montrera sa supériorité pour une logique du contenu face à la compréhension opérationnelle de Boole. Car la fonction, envisagée dans son caractère strictement arithmétique d'intermédiaire entre un nombre et un autre, permet de fournir un critère pour l'unification des deux modes d'existence sémiotique fondamentaux des nombres, critère qui n'est autre que la *saturation* (*Sättigkeit*). En effet, 7 et $5+2$ ne partagent strictement rien d'un point de vue purement expressif, si ce n'est d'être des termes saturés dans le cadre d'une fonction les reliant. C'est dire que la vision fonctionnelle de l'arithmétique non seulement permet de lier des expressions numériques sémiotiquement hétérogènes, mais qu'elle est aussi capable, grâce à l'articulation qui la définit, de les accorder un statut commun. La saturation comme propriété de la fonctionnalité expressive constitue ainsi le critère idéal dont Frege a besoin pour proposer une notion d'objet à la mesure de son entreprise de formalisation du sens. Et c'est exactement le critère qu'il donnera lorsque, toujours dans « Fonction et concept », le transfert des déterminations du nombre aux objets en général rendra la question de la définition de l'objectalité incontournable :

> Dès lors que l'on admet tout objet sans restriction comme argument ou valeur d'une fonction, la question est de savoir ce que l'on entend par objet. Une définition dans les règles de l'École est impossible à mon sens, car nous touchons à quelque chose dont la simplicité ne permet aucune analyse logique. On peut seulement dire brièvement ceci : un objet est tout ce qui n'est pas fonction, c'est ce dont l'expression ne comporte aucune place vide. (Frege, 1891, p. 92)

La nature de l'objectalité est ainsi déterminée d'une manière purement logique : Frege passe de l'affirmation que les nombres doivent eux aussi être vus comme des objets, à cette autre que l'objectalité comme telle n'est rien d'autre que la forme expressive du nombre dans le cadre de la fonctionnalité (c'est-à-dire, la saturation). Étant donné que Frege avait établi quelques pages auparavant que « ce que l'on appelle concept en logique est étroitement lié à ce que nous appelons fonction » (p. 90), fournissant ensuite les critères précis de cette liaison, il devient évident que le couple concept-objet se trouve entièrement déterminé

[395] C'est précisément dans le passage référé dans la note précédente que Frege suggère le besoin de fournir une autre notion de l'objectalité capable de comprendre l'ensemble de nombres de l'Arithmétique : « Peut-être Kant a-t-il employé le mot « objet » dans un sens quelque peu différent ; mais alors le zéro, le un, notre ∞_1 tombent en dehors des bornes de son examen, car ce ne sont pas non plus des concepts. Et Kant exige aussi bien des concepts qu'on leur ajoute un objet dans l'intuition. » (Frege, 1884/1969, p. 213).

fonctionnellement. On comprend dès lors que le fait que le critère pour la distinction entre ces deux notions soit fonctionnel et non pas prédicatif ne constitue pas une simple subtilité. Bien au contraire, *c'est précisément par là que les déterminations arithmétiques vont se glisser dans la constitution d'une logique formelle du contenu dans le cadre de l'Expressionnisme frégéen*. Et cela dans la mesure où c'est par la fonctionnalité arithmétique qu'un statut sémiotique commun a pu être fourni pour l'ensemble des expressions numériques (saturation), non moins que pour la multiplicité des relations les rapportant les unes aux autres (insaturation). C'est de ce double statut commun, capable d'être érigé en essence même des principes objectal et conceptuel, que s'autorise la portée générale (logique, linguistique, ontologique…) des déterminations particulières de l'Arithmétique et du nombre.

Mais on comprend, plus profondément, dans quelle mesure derrière cette notion d'objet nouvellement établie au moyen de la fonctionnalité arithmétique se cache la solution à la première des lacunes de l'Expressionnisme frégéen dans sa vocation d'ériger positivement une logique formelle. Devant les faiblesses des formulations de Frege concernant la définition première des unités de contenus, nous nous demandions si une synthèse provenant de l'Arithmétique ne procurait pas le principe du découpage de ces figures du contenu, que Frege avait prétendu déterminer, du moins en principe, à partir de l'ensemble des expressions modulo l'inférence. Le principe d'objectalité issu de la double synthèse constituée par l'interprétation fonctionnelle de l'Arithmétique nous donne maintenant la réponse : *les différentes figures du contenu ne sont que les formes de la saturation correspondant aux différents niveaux d'articulation fonctionnelle.*

À commencer par les individus, constituants élémentaires ou atomiques du contenu, dont le caractère inarticulé qui les définit, les investit d'un statut objectal immédiat, devenant par là la figure paradigmatique de l'objectalité. C'est sur ces individus qui seront rabattues les expressions fonctionnelles saturées d'ordre immédiatement supérieur. Autrement dit, à supposer que x_0 soit un individu déterminé, $F(x_0)$ sera investi du même statut objectal que x_0 (par exemple, « $5 + 2$ » sera identifié à « 7 », qui possède le même statut individuel que « 5 » ou que « 2 » en tant qu'arguments possibles d'une fonction capturant l'articulation expressive de « $5 + 2$ »). D'autre part, la généralisation de la compréhension fonctionnelle à des expressions dont l'articulation est d'ordre plus élevé, c'est-à-dire des expressions articulant des expressions elles-mêmes articulées, nécessite l'introduction de deux figures nouvelles de contenu. Frege opère cette généralisation en incluant les signes « $=$ », « $<$ » ou « $>$ » parmi les signes fonctionnels. Il devient alors capable d'envisager des expressions telles que « $x^2 = 1$ » comme des expressions fonctionnelles, où « x » indique toujours la place de l'argument. La question se pose alors de savoir quelle serait la valeur d'une telle fonction. En considérant différents arguments possibles (par exemple « $0^2 = 1$ », « $1^2 = 1$ », « $2^2 = 1$ »…) Frege constate que l'expression résultante devient vraie ou fausse selon les cas. Il pose ainsi le vrai et le faux comme valeurs de ces fonctions :

> Je dis donc : « la valeur de notre fonction est une valeur de vérité », et je distingue la valeur de vérité du vrai de celle du faux. J'appellerai la première plus brièvement le vrai, l'autre le faux. D'où il suit que « $2^2 = 4$ » réfère [*bedeuten*] au vrai tout comme « 2^2 » réfère à 4. (Frege, 1891, p. 88)

Cette dernière remarque de Frege montre suffisamment à quel point la naissance des figures du contenu pour ces fonctions d'ordre supérieur a lieu d'après le modèle des fonctions arithmétiques de base. La notion d'objectalité cristallisera, tout comme pour les nombres en tant qu'individus, l'appartenance des valeurs de vérité au plan des contenus :

> Une proposition affirmative ne comporte aucune place vide, il faut donc voir dans sa référence un objet. Mais cette référence est une valeur de vérité. Les deux valeurs de vérité sont donc des objets. (Frege, 1891, p. 92)

On pourrait se demander quelles figures nouvelles de contenu sont susceptibles d'engendrer les niveaux d'articulation supérieurs des fonctions. La considération par Frege de l'expression :

$$(2^4 = 4^2) = (4 \cdot 4 = 4^2)$$

comme renvoyant également au vrai (1891, pp. 88-89) annonce déjà que le vrai et le faux représentent la limite supérieure des contenus : des fonctions prenant pour argument des valeurs de vérité renvoient également à des valeurs de vérité comme valeur[396]. Si bien que le vrai et le faux avec les individus en tant que limites inférieures, constituent les figures extrêmes d'un plan du contenu, découpé d'après l'objectalité correspondant aux différents niveaux d'articulation. Il n'est pas difficile de voir dès lors que les figures intermédiaires du contenu (le concept et le contenu jugeable) correspondent en principe respectivement aux deux niveaux des expressions fonctionnelles dont individus et valeurs de vérité sont le résultat ou la valeur. Ainsi, reprenant les figures du contenu de la *Begriffsschrift*, les concepts correspondent aux fonctions du premier ordre ou expressions du type « x^2 » par exemple, tandis que les contenus jugeables sont ceux qui correspondent à des expressions du type « $x^2 = 4$ ». Seulement, ces expressions étant fonctionnelles, c'est-à-dire, non saturées, elles ne disposent pas du caractère d'objet dont Frege s'autorise pour les ériger en figures du contenu. Frege introduit alors un instrument inédit qui est le résultat direct du remaniement conceptuel du début des années 1890, à savoir le *parcours de valeurs*. Comptant comme l'une

---

[396] Frege développe les détails de ces fonctions, correspondant aux fonctions logiques, quelques pages plus tard. Cf. Frege (1891, p. 93 sqq).

des innovations principales du matériel symbolique des *Grundgesetze* par rapport à la *Begriffsschrift*, le parcours de valeurs donne une signification précise à la correspondance ou représentation (*Vertretung*) des concepts par des objets, que l'article « Concept et objet » associe vaguement à l'extension d'un concept puisque Frege y affirme que le concept d'homme n'est pas un concept mais un objet. Frege le définit dans le cadre d'une identité, suivant un expressionnisme qui ne cache pas ici les limites arithmétiques du domaine qui l'anime : on dira de deux fonctions ayant les mêmes valeurs pour les mêmes arguments qu'elles ont le même parcours de valeurs. Il propose de les exprimer à l'aide de voyelles grecques minuscules accentuées, de telle sorte qu'à la fonction $f(x)$ correspond le parcours de valeurs $\acute{\alpha}\big(f(\alpha)\big)$. Le parcours de valeurs donne ainsi le moyen pour les expressions fonctionnelles de devenir des figures de contenu, par l'attribution d'un statut objectal. Aussi, immédiatement après avoir postulé le caractère d'objet du vrai et du faux, Frege affirme-t-il :

> Nous avons établi plus haut quelques identités entre parcours de valeurs, par exemple :
>
> « $\acute{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \acute{\alpha}[\alpha(\alpha - 4)]$ »
>
> Cette expression peut être décomposée en « $\acute{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$ » et
>
> « $(\ ) = \acute{\alpha}[\alpha(\alpha - 4)]$ ».
>
> Cette dernière partie a besoin d'un complément car elle montre une place vide à gauche du signe d'égalité. La première partie « $\acute{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$ » est entièrement fermée sur soi, elle réfère donc à un objet. (Frege, 1891, p. 92)

Grâce à cet instrument d'« objectalisation » des fonctions, on comprend que les parcours de valeurs des fonctions dont la valeur peut être rattachée à un individu déterminent une figure conceptuelle du contenu, et que ceux qui correspondent aux fonctions dont la valeur est une valeur de vérité dessinent la figure du contenu jugeable.

On voit de cette manière que les quatre figures du contenu qui se dégageaient du système frégéen à l'époque de la *Begriffsschrift* (individu, concept, contenu jugeable et valeur de vérité) se révèlent après notre parcours comme autant de figures objectales susceptibles d'être définies dans le cadre positif mais circonscrit de l'interprétation fonctionnelle de l'Arithmétique. C'est de cette manière précise, complexe mais effective, que s'opère la détermination par l'Arithmétique d'un système logique que les simples principes de l'expressionnisme frégéen ne suffisaient secrètement pas à déterminer. On remarquera pourtant que cette reconstitution de la détermination effective de la forme du système logique révèle une circonstance aussi subtile qu'essentielle : *la déduction est entièrement absente dans la définition des formes du contenu logique*. Posée initialement comme le critère même selon lequel la multiplicité expressive pouvait et devait se résoudre en unité de contenu, la déduction se trouve cependant court-circuitée par l'objectalité comme moyen d'extraire des unités des expressions fonctionnelles de l'Arithmétique et de les inscrire directement sur le plan des contenus logiques. Si bien que *si la déduction joue un rôle dans ce processus constitutif, ce ne peut être qu'au niveau même des synthèses mathématiques, et arithmétiques en particulier*, comme ce qui, caché derrière les expressions fonctionnelles, justifie les passages entre des expressions numériques – comme entre « 2^2 » et « 4 » par exemple, ou encore entre « $x^2 - 4x$ » et « $x(x-4)$ ».

Mais il se trouve que cette notion de l'inférence comme rapport purement fonctionnel entre nombres entiers à même les synthèses mathématiques, *se voit entièrement effacée par la démarche frégéenne*. Car ce qui pouvait détenir le secret de ces passages à l'intérieur du système logique était le contenu proprement conceptuel (et non jugeable ou propositionnel) comme figure logique des fonctions arithmétiques (par exemple : « x^2 », liant les contenus individuels 2 et 4[397]). Mais cette forme particulière du contenu appartenant par principe au système se verra subtilement conjurée. Et cela parce que Frege définira le concept uniquement à partir des fonctions n'admettant comme valeurs que des valeurs de vérité :

> Nous avons vu que la valeur de la fonction $x^2 = 1$ est toujours une des deux valeurs de vérité. Si la valeur de la fonction pour un argument déterminé, par exemple -1, est le vrai, nous pouvons l'exprimer ainsi : […] « -1 tombe sous le concept racine carrée de 1 ». Si la valeur de la fonction $x^2 = 1$ pour un argument, 2 par exemple, est le faux, on peut dire : […] « 2 ne tombe pas sous le concept racine carrée de 1 ». On voit combien ce que l'on appelle concept en logique est étroitement lié à ce que nous appelons fonction. On pourra même dire simplement : un concept est une fonction dont la valeur est toujours une valeur de vérité… (Frege, 1891, p. 90)[398]

C'est dire que des parcours de valeurs comme $\acute{\alpha}(\alpha^2)$ ou $\acute{\varepsilon}(\varepsilon + 5)$, ou encore $\acute{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$ ou $\acute{\alpha}[\alpha(\alpha - 4)]$, parcours que Frege associe directement aux courbes de la géométrie analytique[399], n'auront finalement pas de véritable place assignée dans le paysage des contenus logiques, puisque les valeurs des fonctions qu'ils représentent ne sont pas des valeurs de vérité. Dépourvus des raisons arithmétiques par lesquelles se structuraient de l'intérieur leurs rapports respectifs, les parcours de valeurs ne pourront exister logiquement que dans des contextes propositionnels ou de jugement. De cette manière, l'essentiel de l'inférence arithmétique, en tant qu'enchainement d'expressions numériques grâce auquel

[397] Ou plus exactement son représentant objectal $\acute{\alpha}(\alpha^2)$.

[398] Frege donne cette définition du concept à plusieurs reprises, par exemple dans des écrits posthumes (1892-95, p. 140) ou bien sûr dans les *Grundgesetze* (1893-1903/1966, § 3).

[399] Voir Frege (1891, p. 90).

sont déterminés les contenus numériques (les nombres), est mis hors-jeu. Il en découle que la logique n'héritera que des figures vides des contenus arithmétiques.

IV.2.3. Sens et référence : la détermination de l'identité des contenus

Si l'interprétation fonctionnelle s'avère pertinente pour analyser de façon efficace la forme expressive des contenus arithmétiques, en revanche le couple de notions concept-objet montre quant à lui ses limites pour une logique du contenu. Certes, la notion d'objectalité permet de transférer la forme des unités de contenu de l'Arithmétique à la logique, qui resterait sinon plongée dans l'indétermination. Mais comme nous venons de voir, elle ne les importe dans la logique que détachées de tout principe d'inférence. De ce fait, le projet d'une logique du contenu en tant que langue d'un calcul et calcul d'une langue se trouve mis en péril. Car détachées des principes spécifiques (arithmétiques) d'inférence qui agissent dans la genèse même des formes des contenus (arithmétiques) dont la logique hérite, ces formes se voient obligées d'interagir suivant un principe déductif qui leur est externe. Plus précisément, tout comme les expressions numériques composées à l'aide d'opérations, comme « $2+5$ » ou « 2^2 », sont rabattues sur le statut de l'individualité attribuée à des expressions numériques simples comme « 7 » ou « 4 », les contenus jugeables (ou « pensées » (*Gedanken*), comme Frege commencera à les appeler à l'époque où il écrit ces textes[400]) sont rabattus sur les valeurs de vérité auxquelles ils renvoient en tant que fonctions propositionnelles[401]. Ce qui implique que les parcours de valeurs ne sauraient compter en dernière instance que sur une attribution entièrement externe de valeurs de vérité pour justifier les enchainements déductifs entre eux du point de vue de la logique résultante (car les seules fonctions acceptées dans ce contexte, ce sont les fonctions à valeurs de vérité, c'est-à-dire, les concepts). Et ce malgré la puissance du principe déductif de la *Begriffsschrift* pour agir en indépendance d'une telle attribution[402].

---

[400] Sur ce passage des « contenus jugeables » aux « pensées », lié à l'introduction de la distinction entre sens et référence, voir Frege (1892/2009, p. 60), où le contenu d'une proposition est appelé « pensée » par définition, et (1893-1903/1966, p. x), où le passage des contenus jugeables aux pensées est explicitement rattaché à l'introduction de la distinction sens-référence.

[401] Frege (1891, pp. 90-91) : « Nous n'en resterons pas aux équations et aux inéquations. La forme linguistique d'une équation est une proposition affirmative. Une telle proposition a pour sens une pensée — tout au moins prétend-elle en contenir une — et cette pensée est en règle générale vraie ou fausse. Je veux dire qu'elle a en général une valeur de vérité, qui doit justement être comprise comme la référence de la proposition, tout comme le nombre 4 est la référence de l'expression « $2+2$ », ou comme Londres est la référence de l'expression « capitale de l'Angleterre ». »

[402] Voir *supra* p. 106.

À bien y regarder, le problème réside en ceci que l'essentiel des rapports internes entre les éléments du contenu se loge dans la partie de l'expression fonctionnelle constituée par le signe de fonction (et non pas dans la partie de l'argument), ou plus précisément, comme le dirait Frege, dans la partie « insaturée ». Autrement dit, si deux individus tels que 2 et 7 peuvent être liés par un enchainement déductif, la possibilité d'un tel enchainement est donnée soit par $f(2) = 7$, soit par $g(7) = 2$. C'est donc dans la constitution interne des fonctions $f(\ )$ et $g(\ )$ que réside le fondement de l'inférence (non moins que des inférences capables de rapporter f à g et inversement). Or, la distinction entre concepts et objets pour rendre intelligible la fonctionnalité place les fonctions, et toutes les déterminations qu'elles recèlent, du côté de la conceptualité. Dans l'indétermination propre au caractère incomplet qui les définit, les concepts ne sauraient pourtant pas appartenir sans contradiction au plan des contenus tel que Frege le conçoit. Tout se passe comme si la distinction classique entre concept et objet portait avec elle une distribution selon laquelle les objets monopolisaient la charge de contenu face à des concepts purement formels parce que coupés (que ce soit par abstraction ou par insaturation) de leur rapport aux objets.

L'introduction des parcours de valeurs dans le système frégéen avait pour but de remédier à cette situation, en inscrivant les fonctions parmi les contenus, en leur attribuant un statut objectal. Mais cette solution manque la capacité qu'ont les fonctions de déterminer plastiquement des contenus. Et cela pour deux raisons au moins. D'abord, cette procédure recouvre sous l'immobilité étanche des objets la variabilité expressive et l'ouverture incarnées par les fonctions. Mais surtout, comme nous l'avons dit, elle ne prévoit pas de place dans les figures du contenu pour les parcours de valeurs correspondant à des fonctions pour lesquelles le renvoi fonctionnel ne se réduit pas au domaine élémentaire et clos des valeurs de vérité. De cette manière, la seule chose que le système logique permet d'exprimer à propos de la fonction $f(\ )$ est qu'elle renvoie bien ou qu'elle ne renvoie pas de 2 à 7, c'est-à-dire que $f(2) = 7$ est soit vrai soit faux.

Malgré la redéfinition originale du couple concept-objet dans le cadre de l'interprétation fonctionnelle et les efforts de Frege pour échapper aux oppositions qu'il motive, ce couple semble irrémédiablement associé à une configuration axée sur la polarité forme-contenu que l'Expressionnisme frégéen cherche à dépasser. Aussi, insaisissables par le principe uniquement objectal du contenu, les déterminations fonctionnelles réclament-elles une tout autre distribution des places en accord avec la dynamique inhérente à l'Expressionnisme. Notamment, étant donné qu'objet et concept ne peuvent être confondus sans contradiction, une distinction s'impose *dans le sens même de la notion de contenu*, capable d'en isoler une *dimension non objectale*, sur fond de laquelle le couple nouvellement défini de concept et objet saurait éventuellement se comprendre.

Le lieu où se tracera cette nouvelle distinction s'annonçait déjà lorsque nous montrions la façon dont Frege, au début de « Fonction et concept », s'efforçait de déplacer la notion de forme jusqu'à celle d'expression dans le but de fléchir la polarité forme-contenu pour l'amener à coïncider avec l'axe expressions-contenus[403]. À y regarder de plus près, on remarquera que dans le passage qui mène des formes vides aux expressions en tant que formes inséparables des contenus, Frege interpose systématiquement la distinction entre signe (*Zeichen*) et désigné (*Bezeichnetes*). Il reformule ainsi le problème de la forme et du contenu en affirmant que « La différence de la désignation[404] (*Bezeichnung*) n'est pas une raison suffisante pour qu'il y ait différence du désigné (*Bezeichnete*) » (1891, p. 82). La question sera donc de savoir comment deux signes peuvent désigner le même désigné. La réponse ne peut pas se trouver dans le signe lui-même, que Frege tend à associer à sa matérialité nue. Elle ne saurait néanmoins se trouver ailleurs. En effet, Frege critique aussitôt la procédure de définition comme attribution d'un contenu externe aux signes. Mais ce faisant, il indique le lieu où aura à s'ouvrir la nouvelle dimension du contenu :

> …aucune recherche microscopique ou chimique, si loin qu'elle soit poussée, ne pourrait découvrir cette propriété [du nombre 1 de donner 1 à nouveau lorsqu'on le multiplie par lui-même] dans l'innocente figure que nous appelons le chiffre un. Peut-être voudra-t-on y voir une définition ? Mais aucune définition n'a le pouvoir créateur de conférer à une chose des propriétés que cette chose n'a jamais eues ; elle donnera tout au plus à une chose la propriété d'*exprimer* et de *désigner* ce en place de quoi la définition l'a introduite comme signe. (Frege, 1891, p. 82, nous soulignons)

C'est donc dans la *désignation* en tant que dimension propre aux *signes*, quoique irréductible à leur matérialité, que la différence des signes est censée trouver la raison interne les liant aux *désignés*[405]. Une telle désignation, en tant qu'intimement associée à un désigné, peut alors être appelée : *expression*. Le contenu, dans la mesure où il n'est pas externe aux expressions mais leur est immanent, trouve dans l'espace d'une sémiotique ou d'une théorie du signe le double principe de sa déclinaison : désignation et désigné, ou, comme Frege s'empresse de les nommer dans une note de ce même passage, *sens* (*Sinn*) et *référence* (*Bedeutung*)[406] : « La définition associe à un signe un sens ou une référence. Là où sens et

---

[403] Ci-dessous, p. 393 sqq.

[404] La traduction française parle des « désignations » en pluriel. L'original allemand dit pourtant bien : « *Die Verschiedenheit der Bezeichnung* ».

[405] On remarquera au passage que Frege ouvre cet article en se référant à sa *Begriffsschrift* comme un « ensemble des désignations » (*das Ganze von Bezeichnungen, das ich Begriffsschrift genannt habe*). Dans la traduction française on lit : « l'ensemble des signes et procédés de désignation » (Frege, 1891, p. 82).

[406] La notion frégéenne de *Bedeutung* a été traduite en français par « dénotation », « référence » ou « signification » selon les cas ; la traduction la plus connue étant celle de « dénotation », due à C. Imbert. Nous

référence font totalement défaut, on ne peut proprement parler ni de signe ni de définition. » (1891, p. 82, note). Quelques pages plus bas, Frege donnera toute sa portée à cette distinction fondamentale :

> On voit par là que l'égalité de la référence[407] n'a pas pour conséquence l'égalité de la pensée[408]. En disant « l'étoile du soir est une planète dont le temps de révolution est inférieur à celui de la terre », on exprime une autre pensée que celle exprimée dans la proposition « l'étoile du matin est une planète dont le temps de révolution est inférieur à celui de la terre ». […] La référence des deux propositions doit cependant être la même, car seuls ont changé les mots « étoile du soir » et « étoile du matin », mots qui ont la même référence, qui sont noms propres du même corps céleste. Il faut distinguer le sens de la référence. « 2^4 » et « $4 \cdot 4$ » ont bien la même référence mais n'ont pas le même sens… (Frege, 1891, p. 89)

Cette distinction capitale entre *sens* et *référence* fait bien sûr l'objet du célèbre article éponyme, qui est paru en 1892, mais était déjà prêt au moment de la publication de « Fonction et concept », auquel celui-ci renvoie explicitement d'ailleurs dans les lignes que nous venons d'évoquer. On se contentera d'en rappeler les thèses capitales à travers quelques extraits :

> Il n'y a alors qu'un pas à franchir pour tenir pour lié au signe (nom, combinaison de mots, signe graphique), outre le désigné, qui est ce que j'aimerais appeler la référence [*Bedeutung*] du signe, également ce que je voudrais appeler le sens [*Sinn*] du signe, dans lequel le mode de l'être-donné est contenu. […] La référence de « étoile du soir » et « étoile du matin » serait la même, mais pas le sens. (Frege, 1892/2009, p. 53)

> La connexion régulière entre le signe, son sens et sa référence est d'un genre tel qu'au signe un sens déterminé et à celui-ci à son tour une référence déterminée correspondent, tandis

---

préférons dans notre travail celle de « référence », qui semble plus répandue de nos jours, bien que la traduction italienne « *significazione* », proposée par Frege lui-même dans une lettre sans date à Peano (cf. 1976, p. 197), suggère que la plus fidèle serait celle de « signification ». C'est pourquoi nous préférons la traduction récente de J. Benoist du célèbre article « *Über Sinn und Bedeutung* », en présentation duquel Benoist offre une justification pour ce choix de traduction, à laquelle nous renvoyons. C'est aussi pourquoi, dans l'ensemble des citations dont nous nous servons dans notre travail, nous substituons le terme « référence » chaque fois qu'une autre traduction est donnée.

[407] La traduction française rend « *die Gleichheit der Bedeutung* » par « l'identité des dénotations ». Cette traduction est inacceptable dans la mesure où toute la question depuis le début de ce texte (et tout le problème qui se cache derrière la distinction entre sens et référence) porte sur la possibilité (ou non) d'une divergence entre égalité et identité. Comme on lit dans les premières pages de cette même traduction, Frege affirme : « Je me refuse à penser que $2 + 5$ et $3 + 4$ soient bien égaux mais non identiques (*Ich muß hier der Ansicht entgegentreten, daß z. B.* $2 + 5$ *und* $3 + 4$ *zwar gleich, aber nicht dasselbe seien.*). Nous avons déjà abordé la question de la traduction de « *Gleichheit* » par « identité » dans la première partie de notre travail (cf. *supra* note 137 p. 109). La traduction de « *Bedeutung* » au pluriel nous semble au demeurant non seulement injustifiée, mais dommageable, étant donné que le principe d'individuation du contenu référentiel est lui aussi, comme nous l'avons montré, un enjeu problématique.

[408] Le texte français traduit ici « *die Gleichheit des Gedankens* » par « l'identité du contenu des pensées ». Au-delà des questions de l'identité et du pluriel critiquées ci-dessus, l'expression « contenu de pensée » nous semble justifiée à des fins de clarté. Frege se garde bien pourtant d'employer ici librement le terme de contenu (*Inhalt*) qui, une fois substitué à celui de référence pour en distinguer celui du sens (ou pensée), n'apparaît plus dans ce texte.

> qu'à une référence (un objet) ce n'est pas un signe unique qui appartient. (Frege, 1892/2009, p. 54)
>
> La référence d'un nom propre est l'objet lui-même que nous désignons par ce nom ; la représentation [*Vorstellung*] que nous avons alors est tout à fait subjective ; entre les deux, il y a le sens, qui n'est certes plus subjectif comme la représentation, mais n'est pourtant pas non plus l'objet lui-même. (Frege, 1892/2009, p. 57)
>
> Un nom propre (mot, signe, combinaison de signes, expression) exprime son sens, réfère à ou désigne sa référence. Nous exprimons par un signe le sens du nom propre et nous désignons par ce signe sa référence. (Frege, 1892/2009, p. 59)

L'idée d'un mode de donation par laquelle Frege caractérise la notion de sens n'est pas entièrement nouvelle dans son œuvre. La question de l'égalité des contenus dans la *Begriffsschrift* le faisait déjà parler de « manières de détermination » (*Bestimmungsweisen*) par lesquelles un même contenu est donné (*gegeben werden*), d'une façon en tout assimilable à celle des « modes de l'être-donné » (*Art des Gegebenseins*) dont parle l'article de 1892. D'autant plus que c'était grâce à ces manières de détermination que la différence des noms ne se réduisait pas à une différence purement « formelle »[409]. Ce n'est donc pas la différence des modes de détermination ou de donation comme éléments du contenu que Frege découvre dix ans plus tard. C'est plutôt *la nature strictement sémiotique d'une telle différence, et la dimension interne au signe dans laquelle il faut l'asseoir*. Autrement dit, c'est l'idée que les modes de *détermination* ou de *donation* peuvent être conçus comme des modes de la *signification* ou de la *désignation* (*Bezeichnung*). Mais si ces modes sont associés ou « liés » aux signes, ils n'appartiennent pas moins au plan des contenus. Plus précisément, un ensemble de signes étant donné, on verra se disposer, d'une part, un ensemble de sens déterminés correspondant à ces signes, et d'autre, un ensemble de références déterminées, correspondant à ces sens. Les signes correspondant à une même référence pouvant être multiples, et ne renvoyant à cette référence que par l'intermédiaire de leurs sens respectifs, la dimension du sens devient le lieu où cette multiplicité s'organise. Mais si la multiplicité des modes est associée à la multiplicité des signes, le rapport entre ces modes par lequel la multiplicité se résout en unité référentielle est, quant à elle, de l'ordre du contenu. Cela explique certainement que Frege parle du sens, non pas comme d'un mode de donation, mais

[409] Frege (1879/1999, p. 29) : « …le même contenu peut être complètement déterminé de manières différentes ; mais le fait que, dans un cas particulier, *la même chose* soit effectivement donnée par *deux manières de détermination* [*durch* zwei Bestimmungsweisen *wirklich* Dasselbe *gegeben werde*] est le contenu d'un *jugement*. […] Il en résulte que les différents noms pour le même contenu ne sont pas toujours qu'une question indifférente de forme, mais qu'ils concernent la nature de la chose même lorsqu'ils sont liés à différentes manières de détermination. »

comme d'un lieu « *dans lequel* le mode de l'être-donné *est contenu* » (*worin die Art des Gegebenseins enthalten ist*).

Le dégagement de la dimension du sens, irréductible à la fois à la matérialité du signe et à la référence, peut ainsi être vu comme une *scission au sein du plan des contenus*. Et c'est bien de cette manière que Frege le présentera dans ses *Grundgesetze* à l'occasion de la présentation de ce que la *Begriffsschrift* appelait « trait de contenu » :

> L'ancien « trait de contenu » apparaît à nouveau comme l' « horizontal ». Ce sont des conséquences d'un développement survenu dans mes points de vue logiques. J'y ai précédemment distingué entre deux espèces dont la forme externe est une phrase déclarative : 1) la reconnaissance de la vérité, 2) le contenu qui est reconnu comme étant vrai. J'ai appelé le contenu un « contenu jugeable ». Celui-ci s'est maintenant, pour moi, subdivisé en ce que je nomme « pensée » et « valeur de vérité ». Ceci est la conséquence de la distinction entre le sens et la référence d'un signe. Dans ce cas, le sens d'une phrase est la pensée, et sa référence est sa valeur de vérité. (1893-1903/1966, p. x)[410]

Certes, Frege ne se réfère ici qu'à l'une des figures du contenu, à savoir, le contenu jugeable. Mais on y voit déjà à quel point l'introduction de cette nouvelle dimension du contenu exige une réorganisation du plan des contenus dans son ensemble. Si la distribution qui se dégageait à l'époque de la *Begriffsschrift* portait sur les quatre figures de l'individu, le concept, le contenu jugeable et les valeurs de vérité, suivant un niveau croissant d'articulation, le passage des *Grundgesetze* ci-dessus envisage la valeur de vérité et la pensée (associée au contenu jugeable) comme des figures corrélatives dans des dimensions différentes du contenu (référence et sens respectivement). D'autre part, le type de signe (« forme externe ») auquel ces figures corrélatives sont associées est nommé comme tel : proposition déclarative (*Behauptungssatz*). La distribution de l'ensemble des figures dans les différents plans et dimensions nouvellement définies est dressée par Frege dans une lettre à Husserl, datant précisément de l'époque des textes qui nous occupent (24 mai 1891)[411] :

[410] *Der frühere Inhaltsstrich erscheint als Wagerechter wieder. Das sind Folgen einer ein- greifenden Entwickelung meiner logischen Ansichten. Ich hatte früher in dem, dessen äussere Form ein Behauptungssatz ist, zweierlei unterschieden: 1) die Anerkennung der Wahrheit, 2) den Inhalt, der als wahr anerkannt wird. Den Inhalt nannte ich beurtheilbaren Inhalt. Dieser ist mir nun zerfallen in das, was ich Gedanken, und das, was ich Wahrheitswerth nenne. Das ist die Folge der Unterscheidung von Sinn und Bedeutung eines Zeichens. In diesem Falle ist der Sinn des Satzes der Gedanke und seine Bedeutung der Wahrheitswerth*.

[411] Cf. Husserl et Frege (1987, p. 25). Pour une analyse détaillée de ce tableau, voir de Rouilhan (1988, p. 48 sq) et Benoist (2004, p. 90 sq), qui le confronte, dans un bel « exercice » de « philosophie comparée », aux tableaux analogues qui pourraient correspondre aux formulations de Husserl et de Russell.

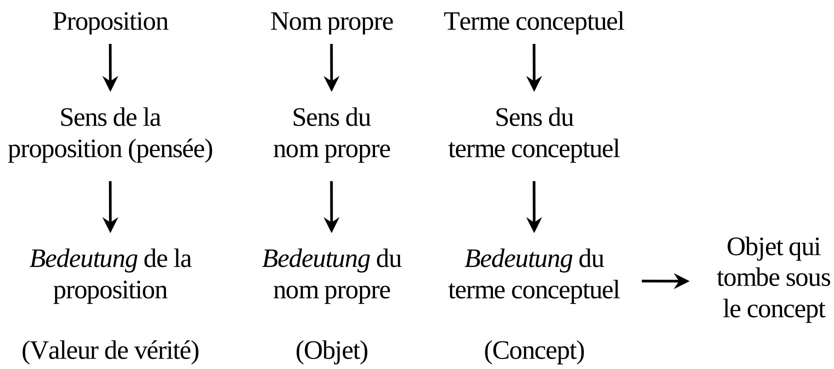


Figure 3

On reconnaîtra dans les types de signe en tête de chaque colonne les différentes formes d'expressions données par l'interprétation fonctionnelle (« $f(x_0)$ », « x_0 » et « $f(\ )$ » respectivement[412]). Le tableau ainsi dressé par Frege accentue la correspondance étroite entre expressions et contenus, qui constituait l'ambition première de la *Begriffsschrift.* Mais qu'en est-il de l'excès expressif témoigné par le signe d'égalité des contenus qui venait la perturber ? Bien que le signe d'égalité « $=$ » soit ici absent, tout dans cette nouvelle configuration est faite pour lui trouver une place[413]. En effet *c'est sur les figures du sens en tant que nouvelle dimension du contenu que peuvent maintenant porter les rapports d'égalité*. Il est aisé de comprendre ainsi en quoi la différence entre sens et référence résout le problème de l'indétermination engendrée par l'excès expressif. Rappelons que cette indétermination provenait d'une autonomie inattendue du plan expressif par rapport à celui des contenus sur lequel il était censé se régler, dont la source restait incertaine. Cet excès était défini par le fait que le signe d'égalité constituait une forme d'expression ne répondant à aucune figure du contenu en tant que telle. D'autre part, il rendait ambigüe l'existence des autres signes connectés par lui, en les forçant à renvoyer à eux-mêmes au lieu de renvoyer à leurs contenus usuels. Enfin, il trahissait qu'il existait plus d'expressions que des contenus (d'où le besoin de les réduire au moyen du signe d'égalité), et cela malgré la restriction prétendue du système d'expression à l'expression exacte des seuls contenus. Or, en associant au signe une nouvelle dimension du contenu en plus de celle des références objectales, ces trois difficultés se trouvent simultanément surmontées. D'abord, on restitue au signe d'égalité en tant que forme d'expression son correspondant dans le plan des contenus, à savoir les rapports entre des modes de détermination, appartenant à la dimension du sens comme dimension interne du

[412] Où « x_0 » exprime un individu particulier déterminé, c'est-à-dire n'est pas une variable.

[413] Ce n'est d'ailleurs nullement un hasard si la question de l'égalité ouvre le fil de la problématisation de l'article « Sur le sens et la référence », dont les tous premiers mots sont : « L'égalité appelle la réflexion par des questions qui s'y attachent et auxquelles il n'est pas aisé de répondre. Est-elle une relation ? Une relation entre des objets ? Ou entre des noms ou des signes pour des objets ? » (1892/2009, pp. 51-52)

plan des contenus. Ensuite, l'ambiguïté des signes n'oscille plus entre renvoi aux contenus et renvoi aux expressions (des signes renvoyant à eux-mêmes), mais entre deux dimensions du contenu (renvoi à sa référence et renvoi à son sens). Dès lors, l'ambiguïté au niveau des expressions mêmes peut être apprivoisée à l'aide de nouveaux outils expressifs ; notamment, par l'introduction des guillemets indiquant les cas où un signe renvoie à sa référence et ceux où il renvoie à son sens. Ainsi, le signe « *A* » renvoie à sa référence habituelle, tandis que ce même signe entouré des guillemets « '*A*' » renvoie à son sens, que Frege considère comme sa référence indirecte[414]. Enfin, s'il y a plus d'expressions que de contenus objectaux, il n'y en a pas plus que des modes de détermination. Or par ce dégagement de la dimension du sens, la multiplicité des modes de détermination n'appartient pas moins au plan des contenus. De cette manière, tout véritable excès des signes par rapport aux contenus (c'est-à-dire toute existence d'un signe auquel, non seulement nulle référence, mais encore nul mode de détermination ne correspondrait) trouve le moyen d'être réparé par l'élimination pure et simple d'un tel signe, selon une procédure de référence (directe ou indirecte) qui recouvre entièrement la surface portante de la démarche scientifique[415].

L'excès expressif, en tant qu'excès des contenus sur eux-mêmes (excès du sens par rapport aux références), s'avère ainsi être un élément capital pour une logique du contenu se voulant à la fois une langue et un calcul. Car c'est dans cet excès en bordure du plan référentiel que se joue le problème des rapports internes entre les différentes unités objectales du contenu, que nous avons soulevé à partir de l'insuffisance du couple concept-objet. Si cet excès apparaissait comme une indétermination du système de la *Begriffsschrift*, la distinction sens-référence qu'il nécessite dans la suite de l'œuvre frégéenne trahit, en tant que distinction sémio-logique, que cette indétermination était le résultat d'une *insuffisance dans l'élaboration de la notion de signe*. Ou plus exactement, dans une inadéquation de la notion de signe par rapport aux exigences de l'Expressionnisme fonctionnel, héritier des pratiques mathématiques se développant tout au long du XIX^e^ siècle dans le Continent. En effet, dans un espace sémiotique fait des signes multiples réduits à une existence purement matérielle, renvoyant à des contenus uniques, la mise en avant décisive des modes de déterminations multiples par

---

[414] Frege (1892/2009, pp. 55-56) : « Lorsqu'on emploie les paroles de la façon habituelle, ce dont on veut parler est leur référence. Mais il peut aussi arriver qu'on veuille parler des paroles elles-mêmes, ou de leur sens. […] À l'écrit, on met, dans ce cas, le signe graphique des mots entre guillemets. Un signe graphique qui est entre guillemets ne doit donc pas être pris selon sa référence usuelle. Lorsqu'on veut parler du sens d'une expression « *A* », on peut le faire simplement au moyen de la tournure « le sens de l'expression "A" ». […] La référence indirecte d'un mot est donc son sens usuel. Il faut toujours conserver un œil sur de telles exceptions, si on veut appréhender correctement le mode de connexion du signe, du sens et de la référence au cas par cas. »

[415] Frege (1891, p. 93) : « Veiller à ce qu'aucune expression ne puisse être dépourvue de référence, à ce qu'on ne puisse jamais calculer sans y prendre garde sur des signes vides tout en croyant opérer sur des objets, c'est là ce qu'exige la rigueur scientifique. »

l'élévation de la notion de fonction à la qualité de principe sémiotique général ne saurait trouver sa place. En tant qu'ils sont multiples, ces modes ne pourraient appartenir aux contenus qui sont quant à eux définis par leur unicité ; en tant qu'ils sont déterminants pour les contenus, ils ne sauraient être attribués à des signes réduits à une matérialité ne renvoyant à des contenus que de façon arbitraire et contingente. On remarquera au passage que cette conception insuffisante du signe n'est pas indépendante d'une distribution des places en termes de polarité forme-contenu. C'est ce qui obligeait Frege à alerter du fait, après tout incompréhensible dans le cadre d'une telle distribution, que les modes de détermination ont le pouvoir d'associer la multiplicité sémiotique à « l'essence de la chose même » (*das Wesen der Sache selbst*) et de ne pas rester à une « question indifférente de forme » (*gleichgiltige Formsache*). Sans véritable place susceptible de désamorcer cette hésitation, c'était à la matérialité des signes que Frege finissait par associer ces modes de détermination au moment de la *Begriffsschrift*, non sans lester les signes d'une épaisseur nouvelle que leur plate matérialité s'avérait incapable de gérer. En découlaient toute la série des déviations que nous avons signalées : des signes ne renvoyant à aucun contenu, des signes renvoyant à eux-mêmes, des signes en trop. Aussi, faut-il comprendre l'introduction de la différence entre sens et référence comme l'élaboration d'une notion de signe attachée de manière interne au passage de la polarité forme-contenu à l'axe expressions-contenus. Les notions de sens et de référence comme principes déterminants du signe constituent ainsi les concepts fondamentaux de la sémiologie motivée de façon plus ou moins directe par les exigences internes d'intelligibilité propres au fonctionnalisme continental. Et cela de la même façon que la notion de signification (*meaning*), définie selon la double direction de l'interprétation et la représentation, au long de l'axe abstrait-concret, constituait le principe fondamental de la sémiologie qui avait émergé de l'Algèbre anglaise.

Les effets de ces développements sémio-logiques sur la logique sont immédiats. En permettant de préciser l'idéal d'une correspondance parfaite entre expressions et contenus, ils localisent la tâche fondamentale de la logique dans l'établissement d'égalités entre des expressions fonctionnelles douées de contenu, et ils fournissent à cette fin de nouveaux instruments expressifs, écartant les possibles ambiguïtés ou paradoxes. Les guillemets sont exemplaires de ce point. Tel le signe d'égalité, les guillemets ne se trouvent pas au même niveau que les signes exprimant directement des unités simples de contenu (signes fonctionnels simples), dans la mesure où ils portent sur ces derniers. La théorie du discours indirect qui en résulte suggère une stratification du plan expressif en différents ordres ou degrés, qui ne serait pourtant pas autonome dans la mesure où les contenus admettent une structuration corrélative. Par cette double stratification, une véritable théorie élémentaire de types pourra voir le jour à l'intérieur même de l'œuvre frégéenne[416].

Mais si la dimension du sens nouvellement dégagée parvient à attribuer une place à cet excès à l'intérieur du système, et à développer la formalisation dans de nouvelles directions, localisant la tâche fondamentale de la logique dans l'établissement d'égalités de contenus maîtrisant l'excès expressif, elle ne fournit pas pour autant de façon immédiate et automatique un moyen positif pour maîtriser l'indétermination que l'excès incarne, voire pour établir si elle est maîtrisable tout court. Autrement dit, la différence entre « les Grecs ont vaincu les Perses à Platée » et « les Perses ont été vaincus par les Grecs à Platée » peut bien être comprise maintenant comme une différence de contenu (sens), renvoyant à une identité de contenu (référence, donnée par la circonstance que la victoire des Grec sur les Perses est un fait). Mais la communauté de contenu qui veut garantir la résolution en unité référentielle des différences de sens ne fournit pas les moyens concrets par lesquels l'identification des sens différents pourrait être opérée. En effet, en exprimant ces deux propositions comme des fonctions à trois arguments (deux agents et un lieu) par « $V(a,b,c)$ » et « $EV(d,e,f)$ » respectivement (avec $V =$ vaincre et $EV =$ être vaincu), qu'est-ce qui permet d'établir, *en général*, que :

$$V(a,b,c) = EV(b,a,c),$$

si jamais cela admet d'être établi tout court ?

Si les exemples proposés par Frege à ce sujet montrent quelque chose, c'est avant tout que ce problème est loin d'être assumé comme tel par rapport au langage courant. Ainsi, nous avons vu qu'au moment de l'introduction de la distinction sens-référence dans « Fonction et concept », la raison pour laquelle Frege affirme que « l'étoile du soir est une planète dont le temps de révolution est inférieur à celui de la terre » et « l'étoile du matin est une planète dont le temps de révolution est inférieur à celui de la terre » ont le même contenu référentiel, c'est que la seule chose qui varie dans ces expressions, sont des expressions ayant elles-mêmes la même référence, à savoir « étoile du soir » et « étoile du matin ». Mais comment savoir que ces deux dernières ont à leur tour une même référence ? Le même argument fait cette fois défaut, puisque la seule chose qui change dans ces deux expressions ce sont les mots « soir » et « matin », mots qui n'ont pas quant à eux la même référence. On pourra alors dire, suivant la définition originelle du contenu conceptuel, qu' « étoile du soir » et « étoile du matin » ont le même contenu référentiel puisque leur substitution dans le contexte d'une proposition ne change pas les conséquences qu'on peut en tirer. La circularité cependant est évidente :

[416] Frege déploiera en détail les aspects centraux de sa théorie des ordres ou degrés (*Stufe*) définissant des types (*Art*) à la fin de l'introduction des signes primitifs dans ses *Grundgesetze* (1893-1903/1966, §§ 21-25).

l'identité référentielle de deux propositions dont le sens est différent se voit ainsi dépendre d'une identité référentielle des termes qui ne devrait pas pouvoir être établie indépendamment de la multiplicité des sens des contextes propositionnels dans lesquels ils s'articulent. Sans doute l'identité référentielle ne fait défaut dans aucun des exemples que Frege emprunte à la langue courante. Et cela tant dans le cas des termes (puisque « étoile du soir » et « étoile du matin » réfèrent après tout bien à la même planète Vénus), que dans le cas des propositions résultant de substituer ces termes (dont l'identité référentielle des termes voudrait se justifier). Identités multiples qu'une attribution de valeurs de vérités viendrait exprimer et corroborer. Mais aucune raison *interne au langage* ne justifie leur établissement.

Les exemples empruntés au langage naturel ont certes le mérite d'être clairs lorsqu'il s'agit de fournir une explication d'une distinction aussi inédite que celle entre sens et référence (distinction d'autant plus obscure pour les contemporains de Frege que les termes *Sinn* et *Bedeutung* passent pour de parfaits synonymes dans la langue allemande[417]). On comprend d'autre part que ne soit pas négligeable la possibilité d'une validité sans limites de cette distinction, suggérée par son effectivité dans le langage naturel. Ces raisons se trouvent certainement au fondement de l'appel fait par Frege au langage naturel pour la présentation approfondie de cette distinction dans son article célèbre de 1892. Mais c'est pour ces raisons aussi que la question des conditions de l'égalité des sens n'y est jamais véritablement posée. Cela ne devrait pas étonner dans la mesure où, négligeant toute détermination simplement linguistique des contenus, l'égalité des sens dans l'ensemble des exemples empruntés à la langue naturelle ne peut être qu'externe au système expressif lui-même et de ce fait, de nature purement empirique. Comment savoir autrement que par l'astronomie comme science empirique que c'est le même soleil qui se lève chaque matin, ou que l'étoile du soir est la même que l'étoile du matin, et qu'elle n'est pas une étoile du tout, mais une planète, à savoir la planète Vénus ? Comment savoir sinon par l'histoire qu'Aristote a été à la fois l'élève de Platon et le maître d'Alexandre le Grand, ou que celui qui a découvert la forme elliptique des orbites planétaires n'est autre que Kepler ? Quoi sinon un savoir empirique (géographique, historique ou autre) fournirait la certitude que la capitale de l'Angleterre est Londres, savoir et certitude affectés de la fragilité même qui a fait que Berlin ne soit plus la capitale de l'Empire Allemand ?[418].

Aussi, Frege esquive-t-il dans « Sur le sens et la référence » la question fondamentale de l'égalité des sens, en affirmant avec légèreté dans les premières pages que « le sens d'un

[417] Husserl se plaindra dans sa première Recherche Logique de cette volonté de Frege de faire des distinctions à partir des mots que « l'habitude solidement enracinée » emploie comme synonymes (cf. Husserl, 1901/1991, p. 60).

[418] Pour tous ces exemples comme cas linguistiques d'égalité des sens différents, cf. Frege (1891; 1892/2009).

nom propre est appréhendé par toute personne qui connaît suffisamment la langue ou l'ensemble des désignations auquel il appartient… » (Frege, 1892/2009, p. 54). De cette manière, la possibilité d'une identité référentielle résultant des égalités des sens est présupposée pour les noms propres[419], c'est-à-dire précisément *pour ce niveau d'articulation pour l'identité duquel Frege n'a pas prévu d'instrument logique* (puisque seules les fonctions de vérité constituent pour lui de véritables concepts logiques). Une fois la possibilité de cette identité supposée, l'égalisation des sens propositionnels différents admet d'être rabattue sur celle des sens des noms propres les composant. Et seulement sous la condition de cette présupposition le problème peut être ramené et réduit à celui de l'existence d'un objet capable d'y répondre.

On comprend dès lors que si les notions de sens et référence fournissent un principe d'intelligibilité nouveau pour la compréhension du langage naturel, la résolution du sens en référence ne constitue pas pour lui un principe opératoire, mais purement *normatif*, qui suit une opérativité venue *d'ailleurs*. Cet ailleurs, ce n'est pas l'article « Sur le sens et la référence » qui le révèle. Mais il ne provient pas non plus d'une expérience profonde que les sciences empiriques auraient la tâche de réguler ou de retrouver pour nous, comme ces pages ne cessent malgré elles de le suggérer. C'est pourquoi, en dépit de son développement détaillé dans l'article de 1892, la vérité et la nécessité de la distinction entre sens et référence ne sont effectivement mises en évidence que dans « Fonction et concept ». C'est bien dans les pages de cet autre texte que la raison non moins que la nécessité des égalités des sens différents se trouvent, sinon problématisées, du moins résolues, avant même que la possibilité d'une extension au langage naturel des propriétés formelles de la fonctionnalité puisse être envisagée. Ce qui ressort de ces pages, c'est que l'ailleurs normatif du langage *n'est pour Frege nul autre que l'Arithmétique*, sur le modèle de laquelle l'appareil de la *Begriffsschrift* n'a jamais caché l'intention de se concevoir.

Il suffit de revenir au moment de l'introduction de la distinction entre sens et référence dans « Fonction et concept » pour remarquer à quel point la possibilité d'une égalité des sens différents reste appuyée sur l'égalité des fonctions arithmétiques. On y reconnaitra que le même principe de « Sur le sens et la référence » y est d'abord présenté en termes

---

[419] Jocelyn Benoist (2001) a mis l'accent sur cette présupposition de la référence chez Frege, pour en découvrir toute sa portée philosophique. Notamment, dans la lignée de la philosophie de Bolzano, Benoist voit dans cette présupposition, une possible figure frégéenne de la question de la représentation sans objet agissant comme principe dynamique de la philosophie du XIX[e] siècle débouchant sur la naissance de la phénoménologie. C'est dans une autre lignée, pourtant, que nous inscrivons cette présupposition de la référence, moins incertaine que celle de Bolzano (bien que non pas entièrement étrangère à elle), à savoir celle de l'analyse fonctionnelle de l'Arithmétique. Notre approche ne contredit pas, pour autant, celle de Benoist, mais permet, par la mise en avant des pratiques mathématiques sur lesquelles prennent appui les formulations de Frege, de restituer les raisons et les mécanismes de cette présupposition référentielle.

d'expressions numériques, à savoir la possibilité de ramener l'identité référentielle des propositions à celle de ses composantes non propositionnelles. Ainsi, après avoir affirmé que « $(2^2 = 4) = (2 > 1)$ » est une identité correcte, Frege affirme :

> On pourrait objecter que « $2^2 = 4$ » et « $2 > 1$ » disent des choses différentes, expriment des pensées totalement différentes. Mais « $2^4 = 4^2$ » et « $4 \cdot 4 = 4^2$ » expriment également des pensées différentes et cependant on peut remplacer « 2^4 » par « $4 \cdot 4$ », les deux signes ayant même référence. Il s'en suit que « $2^4 = 4^2$ » et « $4 \cdot 4 = 4^2$ » ont la même référence. On voit par là que l'identité des références n'a pas pour conséquence l'identité du contenu des pensées. (Frege, 1891, p. 89)

Alors, et alors seulement, Frege fait appel à son exemple d'une proposition composée alternativement de « l'étoile du soir » et « l'étoile du matin », qui se conclut, rappelons-le, par un retour aux expressions numériques :

> Il faut distinguer le sens de la référence. « 2^4 » et « $4 \cdot 4$ » ont bien la même référence mais n'ont pas le même sens, ils sont des noms propres du même nombre mais n'ont pas le même sens. (Frege, 1891, p. 89)

Placée au milieu de ce traitement des expressions numériques, la référence au langage des mots n'a ici qu'un but ouvertement illustratif, puisque la véritable extension de ces propriétés au langage naturel se fera encore quelques pages plus tard, une fois que la notion de concept aurait été associée aux fonctions de vérité – et à elles seulement –, et que la possibilité de les identifier aura été associée à leurs parcours de valeurs respectifs. De cette façon, le problème des conditions de l'égalité des expressions dans un langage n'aura pas à se poser à ce moment-là, dans la mesure où sa possibilité aura été montrée par l'évidence des égalités des fonctions arithmétiques. Celles-ci fournissent la forme générale de la fonctionnalité, dont les expressions linguistiques ne seront qu'un cas particulièrement heureux.

Certes ce rapprochement des fonctions numériques aux expressions de tout langage en général par lequel les premières se posent en fondement des secondes est elliptique au plus haut degré, et ne s'appuie à bien y regarder que sur l'analogie et l'extrapolation, voire sur la métaphore ouverte et le pur forçage. Cette ellipse n'est pourtant aucunement celle de nos analyses, mais celle même des formulations de Frege, pour qui l'ensemble des déterminations logiques qu'il a réussi à établir ont constamment su trouver leur application critique dans le « langage des mots », sans pour autant jamais en dériver véritablement. En effet, nulle part dans l'ensemble de son œuvre des raisons proprement *linguistiques* n'ont été données pour justifier le fonctionnement logique du langage. Ce n'est pas pour autant que les déterminations de l'idéographie soient entièrement autonomes par rapport aux déterminations sémiotiques incarnées par un système expressif linguistique comme le suggéraient les textes autour de la *Begriffsschrift*, et qu'elles n'appartiennent qu'au développement interne d'une pensée logique en évolution interrompue depuis sa naissance enchantée dans les textes d'Aristote. De telles interprétations, encouragées sans doute par l'absence de développements explicites à ce sujet dans les écrits frégéens, sont les mêmes qui finissent par expliquer l'ensemble des déterminations offertes par Frege à la pensée logique au moyen de ses inclinaisons intimement subjectives vers l'idéalisme, l'antipsychologisme, le contextualisme, voire le « prussianisme ». Quoi que ces lectures prétendent élucider, une étude directe de la construction du système frégéen au plus près de ses textes montre que ce système est bien le résultat d'une réflexion sémiotique sur un système expressif précis et concret, à savoir celui de l'Arithmétique, selon une approche fonctionnelle. Dans ce cadre, la simple juxtaposition elliptique de ce travail de sémiotisation à l'application au langage naturel des déterminations logiques résultantes constitue un dispositif constant et systématique dans l'œuvre frégéenne. Aussi précaire et implicite que cette juxtaposition puisse être, elle comporte des effets de transposition autant réels que critiques.

Comprendre ce point revient à comprendre ce qui depuis les premiers écrits logiques de Frege semble être resté incompris tant par ses détracteurs que par ses héritiers et que nous ne cessons de mettre en évidence : que l'idéographie comme système logique est avant tout un système expressif *conçu et construit d'après le modèle de celui de l'Arithmétique*, tout comme la logique booléenne était conçue et construite d'après celui de l'Algèbre. Ce n'est qu'en comprenant ce point que l'on pourra saisir dans toute sa singularité historique cet événement majeur pour la pensée qu'est la mathématisation de la logique, ou plus généralement, la formalisation du sens.

De cet événement comme de cette singularité, le dégagement d'une dimension autonome du sens par rapport à celle de la référence est à la fois l'occasion, le résultat et la marque. Mais il découle de notre approche que cette distinction capitale entre sens et référence doit être directement rattachée à la compréhension du fonctionnement des signes de l'Arithmétique si l'on veut la comprendre dans toute sa nécessité. Restituée à ce socle sémiotique, cette distinction apparait comme motivée par la pression de l'interprétation fonctionnelle sur l'ancien couple de l'objet et du concept, inadéquat parce qu'étranger à cette configuration. De façon positive, la distinction sens-référence se présente notamment comme l'effet direct du double mode d'existence sémiotique que la fonctionnalité révèle pour les contenus arithmétiques. Plus précisément, elle est le résultat du fait, sur lequel Frege ne cesse de s'appuyer, qu'un même nombre accepte en Arithmétique à la fois un mode d'expression simple ou direct (par exemple : « 2 », « 5 » ou « 7 ») et un mode composé ou indirect (par exemple « $7 - 5$ », « $7 - 2$ » ou « $5 + 2$ », respectivement). Or si, dans un système de notation donné, un nombre est censé être exprimé de manière simple d'une façon univoque (toute expression autre que « 7 » pour exprimer le nombre sept en numération décimale arabe est nécessairement composée), en revanche les expressions composées capables de l'exprimer constituent une multiplicité infinie (« $2 + 5$ », « $3 + 4$ », « $2^3 - 1$ », etc.). Cette multiplicité expressive a beau être associée à celle du langage courant – comme lorsqu'aux expressions simples « Vénus » ou « Aristote » correspondent des expressions composées comme « étoile du soir » et « étoile du matin » ou « l'élève de Platon » et « le maître d'Alexandre le Grand » respectivement –, sa nature n'en diffère pas moins de façon essentielle. Et cela pour la triple raison que la multiplicité expressive de l'arithmétique est à la fois nécessaire, irréductible et maîtrisable.

Nécessaire puisque, à la différence du rapport entre Vénus et le matin, ou Aristote et Alexandre le Grand, le lien entre 7 et 5 que l'expression composée « $5 + 2$ » du nombre sept exprime, ne relève pas de la contingence empirique mais est supposé être immanent[420]. Dès lors la multiplicité expressive de l'Arithmétique n'est pas qu'une « question indifférente de forme », mais a à voir avec les contenus mêmes qui sont ainsi exprimés, selon les exigences d'une *lingua characterica* dont Frege voulait lester la logique dès le début. Mais cette multiplicité est ensuite *irréductible*, puisque sans elle l'Arithmétique se verrait réduite à un pur système de nomination ou de référence, ce qui veut dire qu'elle cesserait d'être l'Arithmétique tout court. C'est ce que Frege affirme lui-même contre une conception qui voudrait réduire la fonctionnalité à un principe uniquement référentiel :

> …les expressions :
>
> « $2 \cdot 1^3 + 1$ »,
> « $2 \cdot 2^3 + 1$ »,
> « $2 \cdot 4^3 + 4$ »,
>
> réfèrent à (*bedeuten*) des nombres, à savoir 3, 18, 132. Si donc la fonction n'était rien d'autre que la référence d'une expression de calcul, elle serait un nombre et n'apporterait rien de nouveau à l'arithmétique. (Frege, 1891, p. 83)

Le sens comme domaine de multiplicité expressive face à l'unité référentielle est donc inhérent au langage arithmétique, et prétendre le réduire reviendrait à réduire la possibilité même du calcul qui fait sa mission et son essence. Mais si le sens n'est pas réductible, sa nécessité le rend cependant relativement *maîtrisable*, et c'est de cette maîtrise qu'il est question dans le calcul arithmétique, c'est-à-dire de la capacité de rapporter toute expression composée (ou « expression de calcul ») à d'autres (éventuellement simples). Tout l'appareillage de l'Arithmétique élémentaire est déployé dans le but de déterminer les moyens

[420] D'autant plus que Frege rejette l'idée kantienne selon laquelle les jugements arithmétiques seraient synthétiques. Synthétiques ou pas, les jugements arithmétiques sont dans tous les cas supposés nécessaires.

précis de trouver qu'une expression comme « $2 + 5$ », tout comme « $3 + 4$ » ou « $2^3 - 1$ », n'est rien d'autre que le nombre exprimé de manière simple ou directe par le signe « 7 ». L'Arithmétique est ainsi un système expressif qui n'a d'autre but que de résoudre de façon nécessaire en unité référentielle la multiplicité expressive irréductible de ses contenus.

Il en ressort que si Frege présuppose la possibilité de maîtriser la multiplicité expressive du langage par un assujettissement des sens aux références au moyen de l'établissement d'égalités, sans faire appel à aucune propriété expressive des langues naturelles comme telles, c'est dans la mesure où la possibilité d'une telle égalisation se trouve avérée et structurée systématiquement dans le langage spécifique et contrôlé de l'Arithmétique. L'idéal scientifique que Frege réclame pour le langage en général trouve de cette façon son fondement et comme sa force de loi dans le fait que les mathématiques sont capables d'établir des égalités du type « $2 + 5 = 7$ » ou « $2 + 5 = 3 + 4$ », ou d'une façon plus complexe – dont la compréhension fonctionnelle a contribué à extraire l'expression –, des égalités comme « $x^2 - 4x = x(x - 4)$ ». En effet, il n'est pas difficile de reconnaître dans l'ensemble de ces égalités mathématiques les différentes réductions du sens à la référence réclamées par Frege pour les figures des contenus logiques : réduction du sens des noms propres à leur référence individuelle dans le premier type ; réduction du sens des propositions (pensées) à leur référence (valeur de vérité) à partir d'une extension de la notion de parcours de valeurs comme identité référentielle issue du second.

Il en découle que les procédures inhérentes à la logique telle que Frege la construit, et la capacité d'étendre leur effectivité au territoire ouvert des langages naturels reposent sur une série de pratiques spécifiques liées à des figures de l'égalité arithmétique (et d'Algèbre arithmétique) qui appartiennent à l'espace des synthèses proprement mathématiques. Un saut que l'on pourrait appeler analogique ou métaphorique sépare ces synthèses des analyses logiques dont Frege prétend investir le langage, malgré l'expressionnisme généralisé dont ces analyses se justifiaient depuis leur naissance. Et sans doute Frege songeait-il pouvoir restituer *a posteriori* la nécessité de ce passage, lorsque le système expressif ainsi construit aurait réussi à construire à son tour l'Arithmétique même sur le modèle de laquelle il se construisait. Or, même en négligeant sa circularité après tout séduisante, le sens d'une telle démarche tend à effacer l'opération spécifique d'interprétation et de synthèse recelée dans le travail de sémiotisation de l'Arithmétique. Aussi voulons-nous, en rapportant l'essentiel des déterminations de la logique moderne en train de naître à la strate où ce travail de synthèse se joue, restituer le sol où elle engage la pensée philosophique tout entière, qui en restera dès lors indissociable.

C'est sur cette même strate des synthèses sémiotiques, à même les pratiques mathématiques, que les constructions de la logique booléenne trouvaient en dernière instance leurs limites. C'est par elle aussi que l'Abstraction symbolique a été capable de réédifier d'elle-même, de façon paradoxalement originale, les mêmes distributions conceptuelles que la philosophie, et de les rendre ainsi source à la fois de justification et de critique. C'est encore cette strate qui, fournissant des déterminations arithmétiques autrement interprétées, insérait dans l'œuvre singulière de Boole la volonté impuissante d'un contenu logique, pour lequel le regard nouvellement porté par Frege sur cette strate et cette Arithmétique arrivera enfin trouver une consistance, fût-ce pour le perdre presque aussitôt.

Ce contenu proprement logique, Frege l'aura nommé : *sens*. Mais l'ensemble des redistributions conceptuelles (sémio-logiques) que la consistance du sens entraîne ne rejoint pas cette fois-ci la pensée philosophique ; il la bouleverse, la devance et la réoriente. Car si la philosophie s'était déjà reconnue dans la possibilité de la constitution d'une logique du contenu, *l'œuvre frégéenne a été la raison discrète mais non innocente de transformer la logique elle-même en logique du contenu, et celle-ci à son tour en logique du sens*.

Les conséquences pour la philosophie ont été innombrables, comme cela peut commencer à se sentir dans la redéfinition du couple capital concept-objet en termes strictement logiques, désolidarisant l'objectalité de l'intuition, récusant l'abstraction comme origine et essence du concept, court-circuitant, enfin, de façon aussi efficace que radicale, tout appel à la métaphysique ou à la psychologie. Plus généralement, le déplacement de la polarité déjà classique de la forme et du contenu vers un axe expression-contenu ouvrira des possibilités inédites de projection de l'espace entier des problèmes métaphysiques sur le plan d'une sémiotique encore à découvrir mais mise sur des voies nouvelles. Résultat et promesse de cette sémiotique proprement fonctionnelle intimement liée à un ensemble de pratiques mathématiques encore en mouvement, la logique du sens constitue le nom propre et la tâche la plus haute de cet expressionnisme formel. Après la fin du XIX^e siècle, et comme effet direct du style frégéen de formalisation du sens, ce n'est qu'au titre de logique du sens que pourra avoir lieu le projet philosophique moderne d'une logique du contenu. La logique du sens constitue la *contemporanéité* de ce projet.

Et pourtant, comme nous l'avons annoncé, Frege nous semble n'avoir pas moins manqué la logique du sens que Boole n'a manqué le contenu logique. Les raisons n'en sauraient être les mêmes, ni même analogues. Il se pourrait qu'elles ne soient pas incommensurables pour autant. Pour prendre mesure de ces raisons, nous devrons nous tourner donc vers la strate de positivité mathématique où ces deux œuvres démesurées pointent de façon incessante. Là même où une Arithmétique qui ne saurait être ordinaire, n'est pourtant pas recouverte logiquement, et tisse son rapport intime aux signes dans une adhérence à l'ensemble de l'espace mathématique.

V.Cinquième Partie

Mort et résurrection de l'Expressionnisme

V.1. Les limites de l'Expressionnisme

V.1.1. Frege-Russell : Correspondance et divergence

Le nombre de fois où l'échec de l'entreprise frégéenne a été proclamé est presque aussi grand que celui de ses commentateurs. Parmi tous les échecs proclamés, le plus célèbre reste, à n'en pas douter, celui occasionné par le paradoxe de Russell. Ce paradoxe, ou plus précisément cette antinomie (si l'on préfère ce terme pour parler des paradoxes strictement formels), postule, comme l'on sait, l'existence d'un prédicat contradictoire appartenant au langage de l'idéographie, à savoir le prédicat qui dit qu'un prédicat ne peut pas être prédiqué de lui-même. En effet, malgré la distinction entre concept et objet qui, dans le système de Frege, empêche un concept d'être directement l'objet d'un autre concept (et *a fortiori* de lui-même), à cause de son insaturation, la correspondance entre un concept et son double objectal constitué par son extension ou parcours de valeurs rend possible une contradiction. Celle-ci vient de ce qu'on doit décider si un tel prédicat peut ou non être prédiqué de lui-même, ou dans les termes de l'idéographie, si sous un tel concept peut tomber sa propre extension (ou encore, si une telle fonction peut prendre comme argument son propre parcours de valeurs)[421]. Des flots d'encre ont coulé autour de cette question, dont les circonstances comptent parmi les plus connues dans l'histoire contemporaine de la logique, et des sciences en général. On sait que la communication du paradoxe par Russell dans une lettre datant du 16 juin 1902, alors que le second volume des *Grundgesetze* était déjà sous presse, bouleversa Frege, qui finirait par assumer cet écueil comme un coup définitif assené à son entreprise fondationelle. Aussi, malgré un certain espoir sans trop de conviction qui transparaît dans la

[421] Pour les termes de l'énoncé du paradoxe, on pourra voir le premier échange des lettres entre Russell et Frege (1994, pp. 47-50), ainsi que l'introduction de Catherine Webern à cette édition française. Pour des analyses de cette correspondance, en plus de l'introduction de Webern, on pourra consulter Bell (1983), Hylton (2010) et Beaney (2003). À la différence de toutes ces lectures, la nôtre cherche à mettre en relief la question des signes comme raison fondamentale de la mésentente entre les deux logiciens.

lettre de réponse immédiate de Frege à son collègue anglais[422], et des pistes explorées dans les mois suivants et exposées pour l'essentiel dans une annexe ajoutée à la fin du deuxième volume des *Grundgesetze*[423], l'antinomie de Russell a-t-elle entraîné l'arrêt presque complet de la production logique de Frege, et à coup sûr du développement de son idéographie.

Cependant, la véritable gravité de l'antinomie de Russell pour la pensée des mathématiques, et même de la logique, semble avoir été surestimée. Car comme le remarque Giuseppe Longo, cette antinomie ne porte pas véritablement atteinte aux pratiques mathématiques dont la logique prend sa forme et auxquelles elle prétend offrir un fondement. Et cela dans la mesure où ces pratiques sont spontanément typées[424]. C'est pourquoi l'antinomie de Russell ne constitue pas, et n'a pas constitué, un véritable écueil pour le projet logiciste tel qu'il prenait forme dans le contexte de l'Expressionnisme frégéen. Des limitations simples à la prédicativité ont permis à Zermelo de contourner le problème dans son axiomatisation de la Théorie des ensembles, et la Théorie des types mise au point par Russell (dans sa version simple d'abord en 1903, et dans sa version ramifiée ensuite en 1908) est venue presque aussitôt et sans difficulté donner un moyen logique général de brider les fonctionnements aberrants dans un tel système de signification formelle[425]. Si bien que, comme le remarque Jean-Yves Girard :

> …si on regarde l'histoire de la théorie des ensembles, on s'aperçoit qu'elle a très bien résisté aux paradoxes de Burali-Forti et de Russell ; si demain (hypothèse purement formelle) une nouvelle contradiction était trouvée, le principe fautif serait vite éliminé et l'essentiel des

---

[422] Dans cette lettre, Frege écrivait : « Votre découverte de la contradiction m'a surpris au plus haut point et, j'allais presque dire, m'a consterné, puisque de ce fait, le fondement sur lequel je pensais voir se construire l'arithmétique se met à vaciller. […] Je dois continuer à réfléchir à cette affaire. C'est d'autant plus sérieux qu'avec la disparition de ma loi, ce n'est pas seulement le fondement de mon arithmétique, mais plus généralement le seul fondement possible de l'arithmétique, qui semble s'enliser. Et pourtant je continue de penser qu'il doit être possible d'établir des conditions pour la transformation de la généralité d'une équation en une égalité de parcours de valeurs telles que l'essentiel de mes preuves reste maintenu.» (dans Frege & Russell, 1994, pp. 50-51).

[423] Cette annexe, entièrement dédiée au paradoxe de Russell, se clôt sur les mots suivants : « Bien que ce problème ne soit pas encore aussi résolu que je le croyais lors de la rédaction de ce volume, je ne doute cependant pas qu'un chemin vers la solution est trouvé » (1893-1903/1966, p. 265).

[*Wenn dies Problem auch noch nicht so weit gelöst ist, als ich bei der Abfassung dieses Bandes dachte, so zweifle ich doch nicht daran, dass der Weg zur Lösung gefunden ist.*]

[424] Longo (2010, §2) : « …quel problème des fondements ? Il ne s'agit certes pas de ces antinomies du début du siècle à propos de barbiers qui rasent tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes (ces barbiers doivent-ils se raser ?), de ces amusements ou contradictions du dimanche chez le barbier qu'on résout facilement. En effet la pratique (ou « doxa ») mathématique est « typée ». On n'y autorise pas en général les barbiers à se raser eux-mêmes, pas plus que les fonctions à s'appliquer à elles-mêmes. On définit d'abord les fonctions sur les nombres entiers ou réels, à valeurs dans ces « types » (ou d'autres) de nombres : puis on définit les fonctionnelles sur les fonctions, par exemple l'intégrale ; et on continue ainsi de manière hiérarchisée. Une formalisation qui s'affranchit des précautions d'usage et ne le prend pas en compte mène facilement à des contradictions. »

[425] Pour un traitement critique de la « crise des fondements », on pourra voir Barot (2005).

> acquis préservé. Encore une fois, il y a des problèmes épistémologiques plus importants que la consistance. (Girard, 1987, p. 154)

Le problème qui se pose à nous ne peut donc pas être celui que le logicisme de Russell s'est posé à lui-même, tout comme nous ne saurions être intéressés par l'histoire que ce logicisme a dû (se) raconter pour justifier et comprendre ses problèmes non moins que ses solutions. Si l'antinomie de Russell peut comporter un intérêt pour notre recherche, c'est moins par les remaniements des instruments qu'elle réclame en vue d'une fondation logique réussie de l'Arithmétique et des mathématiques en général, que par les problèmes qu'elle révèle au niveau même de l'Expressionnisme ouvert par Frege comme style spécifique de formalisation du sens. Problèmes de nature strictement sémiotique donc, dont la portée logique, si elle devait être établie, ne saurait l'être dans un rapport aux avatars du projet logiciste, mais dans la connexion éventuelle, plus incertaine mais plus profonde, à ce véritable événement qui fut pour la logique contemporaine les théorèmes d'incomplétude de 1931 de Kurt Gödel. Dans le chemin qui nous reste à parcourir, cet événement ne pourra néanmoins apparaître pour nous qu'à l'horizon.

De ces problèmes, et des soubassements mathématiques dans lesquels plonge leur nature sémiotique, ce n'est pas l'antinomie de Russell qui donne la mesure, mais plutôt la réaction que cette antinomie engendra chez Frege. Deux choses frappent lorsque l'on considère cette réaction : d'une part, l'arrêt presque complet des développements de la pensée logique de Frege, vécu par lui avec une douleur et une mélancolie manifestes, et parfois démesurées[426] ; de l'autre, le rejet invariable de la solution proposée par Russell, et somme toute, de toute solution logique qui aurait pu être proposée pendant les années qui suivirent l'apparition de l'antinomie, ce qui fera que Frege finira son œuvre à la recherche d'une source géométrique pour la fondation de l'Arithmétique, bien loin des propos logicistes réinvestis par Russell[427]. Et sans doute le refus de la solution logiciste de Russell n'est pas sans rapport avec le pessimisme qui motive l'arrêt total de son programme originel, puisque sans cette solution le problème reconnu par Frege lui apparaît insurmontable. Or, si cet arrêt témoigne du fait que Frege attribue une gravité extrême au problème que l'antinomie révèle dans l'espace de l'idéographie, le rejet des solutions données, et notamment de la Théorie de types de Russell, montre suffisamment que *ce n'est pas du même problème qu'il s'agit pour Frege et pour Russell*. Cette divergence est subtile, au point où non seulement elle est systématiquement

[426] Sur la réaction de Frege, voir par exemple Dummett (1973, pp. 657 sq, 664).

[427] Cf. Frege (1924-25a; 1924-25b).

négligée par les commentateurs[428], mais elle est passée presque aussi inaperçue des deux logiciens eux-mêmes lors des échanges intenses qu'ils entretinrent à la suite de la découverte de l'antinomie. Elle n'en est pas moins flagrante pour autant, même si ni l'un ni l'autre ne sont arrivés à l'identifier clairement comme la source de leur mésentente. Elle est d'autant plus essentielle pour nous qu'elle concerne l'objet même de nos recherches, car elle réside précisément dans *la position du problème logique par Frege au niveau même des signes*, par rapport auquel Russell semble rester profondément indifférent.

Frege rapporte l'antinomie de Russell au problème des signes dans son système dès sa réponse immédiate à la lettre du 16 juin 1902 :

> …il apparaît que la transformation de la généralité d'une équation en une égalité de parcours de valeurs (§9 de mes *Lois fondamentales*) n'est pas toujours licite, que ma loi V (§20, p. 36) est fausse, et que mes développements dans le §31 ne suffisent pas à assurer dans tous les cas une référence à mes combinaisons de signes. (Frege & Russell, 1994, pp. 50-51)

Ce diagnostic est on ne peut plus précis, allant du particulier au général dans l'ordre des effets de l'antinomie : celle-ci met d'abord en question l'existence de certains parcours de valeurs, ce qui récuse plus généralement la loi qui établit une bijection entre les fonctions et les parcours de valeurs[429], mettant en échec enfin le rapport des signes à leurs références, exigé par toute pensée scientifique ou philosophique telle que Frege la conçoit. Or si l'intérêt de Russell restera entièrement attaché aux difficultés posées par les deux premières conséquences, c'est fondamentalement le problème général soulevé par la dernière qui bouleverse véritable Frege. Ainsi, devant l'insistance passablement innocente de Russell à parler en termes de contenus logiques (prédicats, propositions, concepts, classes, objets, fonctions…), ou à prendre des expressions (« lettres », « noms propres »…) comme si elles constituaient immédiatement de tels contenus, Frege répond inlassablement en ramenant le problème *aux signes eux-mêmes*, et au problème de leur signification. C'est pourquoi il se voit obligé d'exposer progressivement l'essentiel des propriétés sémiotiques attachées à l'Expressionnisme dans lequel sa logique se situe : l'insaturation des fonctions en tant qu'expressions, l'usage des guillemets, la distinction fondamentale entre sens et référence…

---

[428] L'attitude de David Bell dans sa recension de la correspondance entre Frege et Russell (Bell D. , 1983) est typique à cet égard.

[429] Il s'agit de la tristement célèbre loi V (1893-1903/1966, p. 36), qui établit l'équivalence entre la généralité d'une identité et l'identité de parcours de valeurs, et que Frege note :

$$\vdash (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) = \grave{\alpha} g(\alpha)) = (\smile^{\mathfrak{a}} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$$

(où le creux de la généralité doit être compris comme une quantification universelle de la variable a pour la proposition « $f(a) = g(a)$ »).

Au point que, face à l'insensibilité témoignée par Russell au problème du signe[430], Frege finit par devenir explicite :

> Si nous voulons nous exprimer avec précision, il ne nous reste plus qu'à parler de mots ou de signes. Nous pouvons décomposer la proposition « 3 est un nombre premier » en « 3 » et en « est un nombre premier ». Ces parties sont essentiellement différentes : celle-là est complète en tant que telle, celle-ci nécessite un complément. […] A cette différence au niveau des signes doit aussi correspondre une différence dans le domaine des références. (Frege & Russell, 1994, pp. 62-63)

La divergence entre les deux logiciens sur ce point atteint son plus haut degré autour de la question des propositions. C'est ainsi qu'à propos de certaines propositions qui pour Russell mettent en difficulté la Théorie des types à laquelle il travaille, et dont il dit qu'il faut considérer le « contenu » (*Inhalt*) et non pas la « référence » (*Bedeutung*)[431], que Russell envisage sans doute comme « *meaning* », Frege réplique :

> Votre exemple de propositions comme « $p \; \varepsilon \; m \cdot \supset \cdot \; p$ » m'incite à poser la question : qu'est-ce qu'une proposition ? Les logiciens allemands comprennent par là l'expression d'une pensée, un groupe de signes audibles ou visibles qui exprime une pensée. Or il est manifeste que vous avez en vue la pensée elle-même. C'est, il est vrai, l'utilisation de ce mot chez les mathématiciens. Je préfère adhérer à l'usage des logiciens. (Frege & Russell, 1994, p. 73)[432]

Il s'en suit une exposition de la différence entre sens et référence appliquée aux propositions, et de la différence entre « pensée » et « valeur de vérité » qui en découle, entièrement appuyée sur l'analyse de l'expression numérique « $3 + 5 > 7$ ». Après quoi Frege affirme :

> L'objet dont j'énonce quelque chose, ce que j'entends ainsi, ce que je comprends sous ce signe, est toujours la référence du signe ; mais en énonçant quelque chose, j'exprime une pensée, et le sens du signe fait partie de cette pensée. (Frege & Russell, 1994, p. 73)

Cette circonstance, continue Frege, rend la nature de la signification des propositions, en tant qu'assemblage des signes (c'est-à-dire, en tant qu'expressions), différente de celle des signes eux-mêmes, comme l'enseignent toujours les signes numériques : « Dans le discours direct la

---

[430] Cf. par exemple, ce passage de l'une des premières lettres de Russell, où la négligence devient manifeste : « *Si on laisse les noms tout à fait de côté et si on parle seulement de ce qu'ils signifient* (*bedeuten*), alors on doit admettre qu'il n'y a pas de proposition où une fonction prenne la place de sujet. Or la proposition « une fonction ne prend jamais la place de sujet » se contredit : et *cette contradiction ne repose pas, me semble-t-il, sur une confusion du nom avec ce qu'il signifie* (*bedeuten*). » (Frege & Russell, 1994, p. 56, nous soulignons).

[431] Cf. Lettre de Russell à Frege, 29 septembre 1902, (Frege & Russell, 1994, p. 71).

[432] L'édition française de cette correspondance comporte en annexe une explication des signes utilisés par les deux logiciens. Nous renvoyons à cette annexe pour tout signe que nous ne considérerions pas nécessaire d'expliquer (cf. Frege & Russell, 1994, pp. 99-106).

proposition n’est pas le signe de la pensée, mais l’expression de celle-ci. Or les chiffres[433] sont les signes des nombres » (Frege & Russell, 1994, p. 74).

La réponse immédiate de Russell à ces remarques trahit une fois de plus son indifférence à l’égard de la distinction entre sens et référence chère à Frege[434], et le fait que Frege reprenne la même question, presque dans les mêmes termes, lettre après lettre, est un signe clair que les deux logiciens ont atteint un point inconciliable. Frege suggère alors à son collègue la lecture de son « Sur le sens et la référence », indiquant que « la distinction entre sens et référence d’un signe est importante également pour notre cas » (p. 77), et insiste sur la nécessité de comprendre les propositions avant tout comme des signes, faute de quoi le problème des signes risque d’être tout simplement effacé :

> Vous employez donc le mot « proposition »» dans le sens où j’emploie le mot « pensée » ou « sens d’une proposition ». Proposition est pour moi un signe composé qui doit exprimer une pensée. Votre manière recouvre bien celle des mathématiciens, la mienne celle des logiciens. Je préfère cette dernière parce que sinon un mot manque pour « proposition » dans mon sens. (Frege & Russell, 1994, p. 78)

Ayant lu « Sur le sens et la référence », Russell énonce enfin ses doutes sur la possibilité de comprendre les jugements ou les pensées à partir d’une théorie des noms propres (p. 81), ce qui oblige Frege à ramener la discussion une fois de plus au point qui est pour lui le fondamental : « Nous devons nous entendre sur certaines questions fondamentales : est-ce que la pensée est le sens d’une proposition ou sa référence ? En d’autres termes : est-ce que la proposition exprime une pensée ou est-ce qu’elle la désigne ? » (p. 84). De manière significative, sa propre réponse reste toujours appuyée sur l’analyse sémiotique des expressions numériques :

> Est-ce que le signe « $\supset$ » dans « $3 > 2 \cdot\!\supset\!\cdot\ 3^2 > 2$ » désigne une relation entre des pensées ? Alors « $3 > 2$ » devrait désigner une pensée, ce qui est impossible, si l’on suppose que « 2 » désigne un nombre ; car le sens d’un chiffre [*Zahlzeichen*] peut être partie d’une pensée mais pas un nombre lui-même. (Frege & Russell, 1994, p. 85)

La détermination de Frege à ne pas céder sur la position du problème en termes de signes – et des significations qui leur sont associées – entraîna finalement Russell à expliciter son positionnement par rapport à cette question :

---

[433] *Zahlzeichen* : signes numériques.

[434] Russell écrit : « Quand j’écrivais au sujet des propositions $p\ \varepsilon\ m \cdot \supset \cdot\ p$, j’entendais par *proposition* le sens de celle-ci, pas la valeur de vérité. Je ne peux pas me convaincre que le vrai, ou le faux, soit la référence d’une proposition dans le même sens que par exemple, un certain homme est la référence du nom Jules César. Mais ceci est secondaire. » (Frege & Russell, 1994, p. 76).

> Sur sens et référence[435], je ne suis pas encore tout à fait de votre avis. Là-dessus, je désirerais dire ce qui suit. Représentation [*Vorstellung*] et jugement ont tous les deux un objet dans tous les cas : ce que je nomme une « proposition » peut être objet d'un jugement, et peut être tout aussi bien objet d'une représentation. Il y a donc deux manières dont on peut penser un objet, au cas où cet objet est un complexe : on peut le représenter, ou bien on peut le juger ; cependant l'objet est le même dans les deux cas (par exemple si on dit « le vent froid » et si on dit « le vent est froid »). Donc pour moi le trait du jugement signifie (*bedeuten*) une manière différente de l'intentionnalité envers un objet. (Frege & Russell, 1994, pp. 86-87)

Si tout dans les formulations de Frege cherche à forcer Russell à parler de signes, tout dans les réponses de Russell, et dans celle-ci en particulier, témoigne d'une attitude qui néglige délibérément la dimension spécifique des signes et de leur importance pour les problèmes logiques. Contournant la nature strictement sémiotique de la proposition (c'est-à-dire, la proposition comme *expression*) infatigablement mise en avant par Frege, Russell fait d'elle l'objet nu de l' « imagination » et du « jugement » comme déclinaisons possibles de la pensée subjective. Et si un trait vient se mêler dans la présentation du jugement (*Urtheilsstrich*), il ne saurait jamais être compris comme l'expression d'un niveau supérieur d'articulation des signes motivant leur distribution ultimement binaire (vrai et faux), mais comme rien d'autre que la marque simple et dépouillée d'un rapport à l'objet qui, au-delà des signes, trouve sa source et sa condition dans les facultés de l'esprit (ou, faudrait-il plutôt dire, du « *mind* »). La logique mathématisée naissante trouve ainsi, dans ce contournement inévitablement métaphysique de sa dimension sémiotique – ce qui veut dire dans un contournement de la pensée logique de Frege dans son ensemble – le principe encore embryonnaire mais déjà assuré d'une alliance renouvelée avec une « philosophie de l'esprit ». Or un tel contournement du problème des signes ne peut avoir lieu sans escamoter du même geste la dimension autonome du sens que l'Expressionnisme frégéen avait su dégager, selon laquelle la multiplicité expressive acceptait de se résoudre en identité référentielle comme un effet propre au fonctionnement des signes. « Le vent froid » et « le vent est froid » constituent pour Russell deux modes dont la « pensée » peut se rapporter à un objet, et non pas deux expressions dont la différence de sens permet néanmoins de dégager une identité de contenu, capable de fonctionner comme référence objectale.

De cette perte du sens, on peut voir déjà le symptôme et comme le germe dans ces mêmes pages, lorsque Russell désolidarise le rapport entre équivalence et identité que Frege

[435] L'original allemand ne permet pas de savoir si Russell parle ici des concepts ou de l'article de Frege portant ce titre. La traduction française est de ce dernier avis, alors que l'anglaise préfère la première option. Nous croyons que c'est des concepts que Russell parle, et modifions la typographie du texte en accord avec cette position.

cherchait avec tant de zèle à confondre derrière son signe d'égalité, et qui constituait le ressort de la scission du contenu en sens et référence comme dimensions internes de la signification[436]. Il en découle que la vérité perd ainsi son rapport à l'identité des contenus, car Russell affirme : « entre les deux propositions qui sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses n'existe pour moi rien d'identique ; j'écris $p \equiv q \cdot\!=\!\cdot\, p \supset q \cdot q \supset p$ Df. Cette relation existe par conséquent entre deux objets, n'importe lesquels, qui ne sont pas des références des propositions » – ce qui promet de déjouer le caractère paradoxal de certaines propositions, « si on ne demande pas l'identité de « $p \equiv q$ » »[437] (Frege & Russell, 1994, p. 87).

On ne s'étonnera pas que Frege prît cette fois-ci plus d'un an et demi à répondre, alors que le délai de ses réponses précédentes depuis le début de cet échange rarement dépassait le mois. Sa reprise de la discussion en question s'ouvre sans ambiguïtés : « Il n'est pas facile de s'entendre sur ce que vous dites de la représentation et du jugement » (p. 89). De façon attendue, Frege rejette le recours à la notion d'imagination ou représentation (*Vorstellung*), en la considérant psychologique et sans place dans les mathématiques. Et bien qu'il accepte la notion de jugement comme la reconnaissance de la vérité d'une pensée, il récuse l'affirmation de Russell selon laquelle il n'y a rien d'identique entre des propositions qui seraient soit vraies soit fausses ensemble. Aussi, Frege fait-il appel à une dernière fois à sa distinction entre sens et référence. Mais le changement d'accent dans sa présentation montre qu'il a bien saisi le risque d'effacement du sens que la vision russellienne comporte. C'est pourquoi, après l'évocation de l'exemple de la proposition « Copernic pensait que les orbites des planètes étaient des cercles », Frege s'applique une fois de plus à une longue analyse d'expressions arithmétiques, mais qui vise cette fois-ci à montrer de façon on ne peut plus explicite que la signification des signes ne peut pas s'épuiser dans le rapport binaire de désignation ou référence :

---

[436] En effet, dans cette lettre, Russell éclate l'unité de l'égalité en introduisant des signes spécifiques pour l'équivalence (« $\equiv$ ») définie comme bi-implication – l'égalité des fonctions (« $|||$ ») étant un type particulier d'équivalence – et pour l'identité (« $|'$ ») valable uniquement entre des « objets », et définit l'égalité (« $=$ ») comme une disjonction exclusive entre ces deux termes ou opérateurs. À quoi il faudrait encore ajouter celui de la définition (« $=\ldots$ Df ») considéré comme un signe indépendant. Voici les définitions données par Russell dans sa lettre :

$$p \equiv q \cdot\!=\!\cdot\, p \supset q \cdot q \supset p \text{ Df}$$

$$x|'y \cdot\!=\!\cdot\, \varphi x \supset_{\varphi} \varphi y \text{ Df}$$

où « $=\ldots$ Df » constitue un signe unique pour indiquer la définition. L'égalité (« $=$ ») est alors définie comme identité dans le cas où les termes en question seraient des objets (ce que Russell exprime à l'aide d'un signe spécifique : « $\mathrm{Indiv}(x)$ »), et comme équivalence dans le cas des fonctions, c'est-à-dire :

$$u = v \cdot\!=\!\therefore \mathrm{Indiv}(u) \cdot\!\supset\!\cdot\, u|'v : \sim \mathrm{Indiv}(u) \cdot\!\supset\!\cdot\!\sim \mathrm{Indiv}(v) \cdot u|||v \text{ Df}$$

Cf. la lettre de Russell à Frege du 24 mai 1903 dans (Frege & Russell, 1994, p. 86).

[437] *Wenn man bei "$p \equiv q$" keine Identität verlangt* : Si par « $p \equiv q$ » on ne demande aucune identité.

> Nous trouvons donc la pensée indépendante de quelque chose qui n'est pas ce qui est désigné par le signe ; car ce qui est désigné est le même pour « 7 » comme pour « 3 + 4 ». Le signe doit donc être lié, non seulement à sa référence, mais à quelque chose encore, qui peut être différent pour des signes qui désignent la même chose. Les signes ne désignent pas seulement quelque chose, mais ils expriment également quelque chose. Ceci est le sens. (Frege & Russell, 1994, p. 91)

Mais une fois admis que les signes ont un sens, ou plutôt des sens, et encore plus, que le sens est entièrement indépendant de la référence[438], qu'est-ce qui oblige à penser que les expressions propositionnelles, en tant qu'assemblage de signes, aient également une référence ? La réponse de Frege est connue : la référence est exigée par le rapport à la vérité :

> Ne pouvons-nous pas alors nous contenter du sens de la proposition et renoncer à une référence ? […] s'il ne nous est pas indifférent que les signes formant une proposition soient pourvus de référence, c'est du coup non seulement la pensée, mais aussi la référence de la proposition, qui nous importent. Et cela est le cas toujours et seulement lorsque nous questionnons la vérité. C'est alors et seulement alors que la référence de la phrase entre pour nous en considération : elle doit donc être liée très étroitement à la vérité. (Frege & Russell, 1994, pp. 91-92)

Dans cette dernière tentative de défendre son approche sémiotique de la logique pour laquelle Russell ne témoignait guère d'intérêt, la volonté de Frege est claire : il s'agit de soutenir qu'un rapport à l'identité référentielle est nécessaire dans toute prétention à la vérité, et que celui-ci ne peut pas se passer du dégagement du sens comme dimension sémiotique indépendante si cette prétention ne veut pas être fondée sur des principes en dernier recours psychologiques. C'est d'ailleurs au nom d'une certaine homogénéité dans cette identité référentielle pour des signes différents que Frege trouve l'occasion de critiquer les distinctions entre les différents types d'égalité proposés par son correspondant (pp. 92-93).

Les arguments de Frege n'ont pas suffi, tant s'en faut, à convaincre Russell de la nécessité d'une logique du sens, fût-ce en faisant du sens, comme il le fait, le lieu même de la vérité. Ses efforts n'ont pas été inutiles pour autant. À commencer par l'obligation qu'ils lui ont imposée de rendre son rejet du sens à la fois explicite et précis. Ainsi, comme Russell le dit dans sa réponse à la dernière lettre de Frege, bien que la distinction entre sens et référence

---

[438] L'affirmation de l'indépendance du sens par rapport à la référence semble dans cette lettre être plus forte que d'habitude : « Il arrive bien par ailleurs qu'un signe ait bien un sens mais n'ait pas de référence, et ceci dans la légende ou dans la poésie. Le sens est donc indépendant de ce qu'une référence existe. Si par conséquent seulement le sens de la proposition, la pensée, nous importe, nous ne sommes pas obligés de nous occuper d'autre chose que du sens des signes formant la proposition ; qu'ils aient en plus une référence ou pas, est sans influence sur la pensée. Et ceci est en effet le cas dans la légende et dans la poésie. » (Frege & Russell, 1994, pp. 91-92).

puisse être vue « dans le cas de complexes qui signifient (*bedeuten*) un objet, par exemple des valeurs des fonctions mathématiques ordinaires comme $\xi + 1$, ξ^2, etc. » (et encore cela avec « certaines difficultés »), le sens est pour lui absent tant dans le cas des propositions comme des noms propres :

> On n'affirme pas la pensée, laquelle est bien chose privée psychologique : on affirme l'objet de la pensée, et ceci est, à mon avis, un certain complexe (une proposition objective, pourrait-on dire) […]. C'est pourquoi à mon avis la référence d'une proposition n'est pas le vrai, mais un certain complexe qui (dans le cas donné) est vrai[439]. Dans le cas d'un nom propre simple comme « Socrate », je ne peux pas différencier sens et référence ; je vois seulement l'idée, qui est psychologique, et l'objet. Mieux dit : je n'admets nullement le sens, mais seulement l'idée et la référence. (Frege & Russell, 1994, p. 96)

Il devient ainsi clair que dans un univers constitué de pensées et idées subjectives d'une part, et d'objets de l'autre, l'absence d'intérêt pour une réflexion sur les signes se double d'une absence de place pour une logique du sens. Sans doute Russell a-t-il entretemps abandonné sa définition composite de l'égalité[440]. Mais ce n'est pas au nom d'une notion d'identité généralisée entre des expressions à tous les niveaux d'articulation qu'il revient sur cette question. Les arguments qu'il donne pour maintenir la distinction entre les signes d'égalité et de définition montrent bien que sa démarche s'inscrit toujours dans une volonté de pousser la dimension des signes du côté de la subjectivité[441]. Si bien que l'égalité entre des expressions articulées au niveau propositionnel doit pour Russell toujours être récusée :

> Je crois que $(4^2 - 3^2 = 7) \cdot{=}\cdot (7 = 7)$ est faux. Car à mon avis on ne doit pas, dans un complexe, remplacer une partie constituante par une autre de même référence mais de sens différent si l'on veut conserver l'identité. Car je crois que le *sens* de « $4^2 - 3^2$ » est essentiel à la proposition, c'est-à-dire que la référence des parties constituantes ne détermine pas à elle seule la proposition. (Frege & Russell, 1994, pp. 96-97)

Cette dernière remarque, au demeurant la toute dernière de cet échange, consomme la récusation d'un nouvel aspect fondamental de l'entreprise frégéenne, voire le plus fondamental de tous, à la fois point de départ et moteur de sa construction. Ce que Russell rejette dans ces quelques lignes, c'est le principe même selon lequel l'identité des contenus

---

[439] Nous corrigeons ici la traduction française, qui traduit : « le vrai ». Russell dit bien pourtant : « *sondern ein gewisser Complex der (im gegebenen Falle) wahr ist* ».

[440] Dans cette même lettre Russell affirme : « La définition du signe d'égalité que vous critiquez est naturellement tombée avec toute la théorie à laquelle elle appartient. (Je pose maintenant $x = y \cdot{=}\cdot \varphi x \supset_{\varphi} \varphi y$ Df […]) » (Frege & Russell, 1994, p. 96).

[441] En effet, Russell ajoute aussitôt une remarque concernant la différence entre le signe d'égalité et celui de définition, selon laquelle « les définitions ne sont pas à proprement parler une partie du système, mais sont des façons de fixer typographiques. « $= \ldots$ Df » n'est pas une des idées primitives de la mathématique, mais exprime simplement ma volonté » (Frege & Russell, 1994, p. 96).

logiques dépend de la variation d'expressions articulées, déterminant l'axe expressions-contenus qui organise l'espace entier de la pensée logique ouvert par Frege.

Au long de ces deux années et demie de correspondance intense et profonde au tournant du XX[e] siècle, la précision gagnée dans le positionnement respectif de ces deux grandes figures de la pensée logique contemporaine suffit à rendre évidente une donnée fondamentale : loin de constituer la continuation de l'entreprise logique et philosophique frégéenne par d'autres moyens (plus aboutis, plus raffinés), les travaux de Russell représentent leur abandon et leur perte. Abandon et perte qui se manifestent, non pas dans la modification des instruments techniques à travers lesquels les contenus logiques sont traités, mais plus profondément, dans les refus successifs des piliers de l'expressionnisme comme mode à la fois général et singulier de formalisation du sens. En effet, à la lecture de cette correspondance il apparaît avec clarté que si Frege se montre réticent à modifier son point de vue, c'est dans la mesure où Russell se révèle entièrement réfractaire à accepter ce qui pour Frege reste le véritable problème à l'intérieur duquel la question logique doit se poser et résoudre. Nous avons suffisamment montré dans les chapitres précédents que ce problème est pour Frege celui d'une théorie des signes et de la signification, qui doit pour lui se poser en termes de variation expressive débouchant sur une logique du sens. Que Russell ne se reconnaisse aucunement dans les perspectives ouvertes et les solutions cherchées dans le cadre de ce problème, cela devient évident à travers le triple refus exprimé à travers l'insensibilité à l'égard des signes et de leur signification, à travers la récusation de la notion du sens comme irréductible à la référence et à travers le rejet d'une conception expressive, ou plutôt « expressionniste » de l'identité où celle-ci apparaît comme invariance dans une variation expressive déterminée. Que cette divergence soit décisive, première et insurmontable dans l'approche respective des deux logiciens, cela est confirmé par l'attitude inflexible maintenue tant par Frege que par Russell à propos de cette question ; mais plus profondément, par le fait que ce qui se profile comme une solution pour Russell ne saurait l'être pour Frege, en dépit des conséquences dévastatrices pour l'ensemble de sa pensée et de son système qui suivent de ce refus. Avec l'œuvre de Russell le logicisme trouve certes les moyens de se perpétuer en surmontant l'écueil de l'antinomie, du moins jusqu'aux résultats célèbres de Gödel. Mais ce logicisme renouvelé ne peut subsister qu'à condition d'un démantèlement sans réserve de l'Expressionnisme dans le cadre duquel Frege avait songé pouvoir le faire vivre. Le refus de la solution russellienne de la part de Frege révèle ainsi que, dans l'obligation de choisir entre logicisme et expressionnisme, Frege se décide pour ce dernier. Mais au regard du bref destin qu'aura connu le logicisme, on peut soupçonner qu'il y a des raisons de croire qu'il y a dans cette décision bien plus que de l'obstination et de l'aveuglement. Nous y reviendrons.

La divergence est donc insurmontable et définitive. Et pourtant, cet échange n'aura pas été stérile. Malgré les conceptions irréconciliables à travers lesquelles les deux logiciens s'adressent l'un à l'autre, leur correspondance ne constitue pas un dialogue de sourds. Bien au contraire, elle permet à chacun d'eux de définir avec plus de précaution et de finesse leurs positions respectives, de comprendre leurs propres enjeux, et de prendre conscience des développements que ces enjeux réclament pour être poursuivis. C'est notamment le cas pour Russell, pour qui l'ensemble de cette correspondance a été l'occasion explorer, du point de vue qui était le sien, le lieu où résidait la difficulté soulevée par son antinomie ; de tester autant de moyens susceptibles de la conjurer ; de comprendre les présupposés conceptuels sur lesquels portait la solution envisagée ; et d'assumer enfin la tâche de développer les outils nécessaires pour rendre une telle conception consistante et soutenable. Les objections de Frege n'ont pas été vaines à cet égard. Ainsi, à propos de sa volonté d'employer des signes fonctionnels indépendamment des variables (ce que Frege contestait, à cause de l'insaturation propre aux fonctions), Russell assume dans la dernière de ses lettres les exigences frégéennes d'unité de désignation qui détermine le caractère objectal légitimant l'usage d'un signe non saturé :

> …dans le cas d'une fonction particulière, par exemple, $(\xi - 1) \cdot (\xi + 1)$, on ne saurait certainement pas considérer comme objet ce qui résulte du fait que, tout simplement, on omet ξ. Mais je crois que, si on emploie la manière d'écrire φx, la lettre φ doit désigner n'importe quelle chose qui reste la même quand on place y à la place de x. Ce quelque chose est, selon ce que je crois, justement ce que l'on désigne par $\varphi\xi$. C'est-à-dire, une valeur particulière de φ qui serait justement $(\xi - 1) \cdot (\xi + 1)$. Car sinon il est difficile de trouver ce qui est à proprement parler la même chose en φx et φy. Mais jusqu'à présent je n'ai pas d'opinion précise là-dessus. (Frege & Russell, 1994, p. 94)

Ces réflexions montrent que Russell reconnaît ne serait-ce que timidement la pertinence du problème adressé par Frege, peut-être à cause de l'exigence d'identité référentielle comme condition de la vérité que ce dernier a su mettre en avant dans sa lettre précédente. Et sans doute la solution suggérée ici par Russell apparaît profondément naïve à côté des profonds développements frégéens, pour qui la question de l'objet répondant à « $\varphi\xi$ », comme expression de la variation entre « φx » et « φy », loin d'être le point d'arrivée, constitue le point de départ de la réflexion. Inutile de dire que la solution indiquée par Russell dans ces lignes ne sera pas non plus définitive, comme il s'empresse de le souligner lui-même. Mais l'importance de ces remarques, ainsi que de celles qui postulent « un certain complexe » (*ein gewisser Complex*) comme référence de la proposition, réside dans ce qu'elles trahissent la préoccupation dont Russell témoigne du problème typiquement frégéen de l'identité référentielle. Même si Russell continuera à contester la dimension du sens des signes comme le lieu où cette identité peut et doit se résoudre, c'est sans doute la confrontation avec le point de vue de Frege qui le poussera à traiter cette question à partir d'un raffinement de sa notion de dénotation. Raffinement qui passe par la reformulation du problème de la dénotation au niveau des « expressions dénotatives » (*denoting phrases*) comme des « parties des phrases » (*sentences*), et de l'analyse des propositions « whose verbal expressions contain denoting phrases » (Russell, 1905, p. 480). Nous parlons bien évidemment du très célèbre article « On denoting », que Russell fera paraître dans la revue *Mind* en 1905, c'est-à-dire à la suite de son échange avec Frege. Et c'est bien aux conceptions de Frege que les développements de ces pages célèbres sont principalement confrontés. La dénotation y est d'ailleurs prise comme traduction anglaise immédiate de la *Bedeutung* frégéenne. Cette nouvelle élaboration de la notion de dénotation consomme certes la perte du sens comme dimension intermédiaire qu'annonçaient déjà les pages adressées à Frege, dans la mesure où le régime de signification double que le sens instaurait se voit entièrement substitué par une conception moniste de la signification comme régime de référence généralisée. Mais la position du problème de la dénotation en termes d'expressions et de phrases est remarquable si l'on considère que dans le chapitre dédié à la dénotation dans ses *Principles* deux ans auparavant, Russell écartait dès le début tout rapport de la dénotation aux mots et aux symboles, pour l'associer uniquement aux concepts[442]. Elle l'est d'autant plus qu'il considère que son ancien traitement était « very nearly the same as Frege's » (1905, p. 480, note). Il serait hors propos pour notre recherche de nous engager plus avant dans les conceptions russelliennes en dehors de son échange effectif avec Frege[443]. Qu'il suffise donc de souligner à quel point la véritable confrontation avec son correspondant d'Iéna, au-delà de la simple lecture de ses textes, a permis à Russell d'affirmer avec plus de précision sa propre position, ce qui impliquait l'affirmation simultanée de la distance qui le séparait du logicien allemand, qu'il avait sans doute initialement imaginée moins radicale[444].

Mais l'échange avec Russell a été révélateur pour Frege aussi. D'une façon différente, pourtant. Car l'abandon de l'Expressionnisme par Russell ne se produit pas sans mettre en évidence, du même coup et de façon positive, *les limites de l'Expressionnisme frégéen*, dont

---

[442] Russell (1903/2010, p. 54) : « The notion of denoting, like most of the notions of logic, has been obscured hitherto by an undue admixture of psychology. There is a sense in which *we* denote, when we point or describe, or employ words as symbols for concepts; this, however, is not the sense that I wish to discuss. But the fact that description is possible—that we are able, by the employment of concepts, to designate a thing which is not a concept—is due to a logical relation between some concepts and some terms, in virtue of which such concepts inherently and logically *denote* such terms. It is this sense of denoting which is here in question. »

[443] Pour une étude de cette question de la dénotation et de la théorie des descriptions chez Russell, on pourra se référer, par exemple, à Wahl (1993) ou Hylton (2003).

[444] Parmi les thèmes frégéens que Russell aurait appris de cette confrontation avec Frege pour le développement de sa pensée, on pourrait peut-être compter aussi la « repsychologisation » de la proposition en raison du problème de l'identité des propositions. Sur cette question, voir Stevens (2006).

l'antinomie n'est qu'un symptôme. C'est ainsi que la série d'explorations motivant la récusation successive de tous les piliers de l'expressionnisme comporte autant de critiques subtiles trahissant ce qui fait problème dans la façon dont Frege tente de le mettre en œuvre. En effet, la non identité des propositions ayant la même valeur de vérité ; la possibilité d'une utilisation des signes fonctionnels comme des signes saturés ; la distinction entre les différentes figures de l'égalité (équivalence, identité, définition) ; ou encore le défaut de la distinction sens-référence en dehors du niveau conceptuel (c'est-à-dire, au niveau tant propositionnel que des noms propres), constituent des véritables objections adressées à la cohérence générale de la logique expressionniste que Frege cherche à bâtir. Objections dont Frege a dû certainement sentir la gravité, par exemple lorsqu'il hésita au moment de justifier l'extrapolation de la différence entre sens et référence au niveau propositionnel ou du contenu jugeable[445] ; ou également lorsque, vers la fin de cet échange, il commença à accepter malgré tout la considération des expressions comportant des signes fonctionnels sans variables[446]. Ou plus important enfin, lorsqu'il s'est vu poussé à défendre le sens contre la seule référence, suivant une direction qui se verra confirmée peu après[447]. Sans compter l'état d'abattement que trahit sa réponse à la communication du paradoxe.

Or toutes ces difficultés semblent pointer vers le même problème. Problème dont nous avons déjà fait sentir urgence : l'inadéquation de la catégorie d' « objet » que Frege essaie de tenir dans un cadre expressionniste qui la destitue de toute efficacité.

V.1.2. L'inadéquation de l'objet : l'Expressionnisme figuratif.

À la lecture de sa correspondance avec Russell, on remarque que, pour parer à toutes les difficultés que l'antinomie a fini par soulever, Frege espérait sans doute pouvoir s'appuyer en dernière instance uniquement sur sa distinction entre fonction et argument. C'est en effet cette distinction que Frege met immédiatement en avant dans sa toute première réponse à

[445] En effet, le brouillon de sa lettre à Russell du 13 novembre 1902 montre des ratures et reformulations réitérées au moment de montrer que « $2^3 - 1 > 2$ » et « $4^2 - 3^2 > 2$ » constituent deux sens (ou pensées) différents pour une même référence. Ce brouillon ne figure pas dans l'édition français de la correspondance entre Frege et Russell ; on pourra le trouver dans Frege (1976, pp. 245-246).

[446] Par exemple dans sa lettre à Russell du 13 novembre 1904. Cf. Frege et Russell (1994, p. 93).

[447] En effet, dans un texte rédigé en 1906 et resté inédit, portant sur les paradoxes de la Théorie des ensembles, Frege ira jusqu'à affirmer que la validité d'un concept ne se voit en rien affectée par l'inexistence d'objets tombant sous lui, et que l'exception de contradiction n'appartient pas aux conditions d'admissibilité d'un concept. Frege (1906b, p. 214) : « …un concept qui n'est pas non-contradictoire n'est pas en soi à rejeter. C'est seulement quand, au moyen de l'article défini ou de l'adjectif démonstratif, on construit le nom propre à partir du terme conceptuel correspondant que l'on commet une faute. ».

Russell[448], et c'est encore d'elle qu'il est question dans la dernière lettre de ces échanges[449]. Cet espoir est compréhensible si l'on se souvient que c'est sur cette distinction entre fonction et argument que Frege rabattait celle du concept et de l'objet, et que c'est de la pression exercée par elle sur ce vieux couple que naissait la distinction nouvelle entre sens et référence[450]. Car en dernière analyse, tout paradoxe est considéré comme une confusion à écarter au moyen des distinctions convenables : on prend le mot pour la chose, le genre pour l'individu, le concept pour l'objet ou inversement ; ou alors on prend ce qu'on dit pour ce qu'on a voulu dire, la référence pour le sens et le sens pour la référence… Dans tous les cas, la contradiction se laisse envisager comme l'effet d'une confusion, et la confusion à son tour comme un défaut de distinction. Au besoin, le langage est présenté comme le principal responsable d'une telle situation. C'est lui qui aplatit tout, qui « confond tout » ; ce sont les possibilités qu'il recèle qui exposent, voire forcent, à une insouciance dangereuse dans l'usage des signes. C'est pourquoi, en gardant la clé du principe de la différence entre concept et objet d'une part, et entre sens et référence de l'autre, la distinction proprement sémiotique entre fonction et argument est envisagée par Frege comme le garde-fou ultime de l'ensemble de son système. D'autant plus que ce système se trouve entièrement organisé autour de l'articulation expressive incarnée par cette fonctionnalité (le signe de fonction propositionnelle). Et de fait, l'antinomie n'aurait pas l'occasion de s'installer si les fonctions ne pouvaient pas prendre des fonctions (et *a fortiori* se prendre elles-mêmes) comme argument. Le seul risque à craindre dans une telle situation serait de prendre l'expression pour le contenu, soit en prenant une différence d'expression pour une différence de contenu, soit en confondant ce qui est dit avec ce qui est visé (*gemeint*). Risques que la distinction entre sens et référence a pour tâche de conjurer.

Seulement, ce verrou se voit contourné. Et cela par le fait qu'à toute fonction est associé de manière unique un « objet » (son parcours de valeurs), qui, à cause de la nature insaturée de son expression, est susceptible de devenir l'argument des fonctions, et notamment de la

[448] Frege à Russell, 22 juin 1902, dans Frege et Russell (1994, p. 50) : « …l'expression « un prédicat est prédiqué de lui-même » ne me semble pas être précise. Un prédicat est habituellement une fonction de premier degré qui exige un objet comme argument et donc ne peut pas avoir lui-même comme argument (sujet) ».

[449] Frege à Russell, 13 novembre 1904 : « L'isolement du signe de la fonction est contraire à l'essence de la fonction, qui consiste dans son insaturation. Par là justement, la fonction se différencie de l'objet. C'est pourquoi les noms de fonction aussi doivent se différencier de manière essentielle des noms propres et cela de par le fait qu'ils entraînent au moins une place vide – la place de l'argument. Et ces places d'argument doivent, lorsqu'il s'agit d'un nom de fonction, rester toujours maintenues et reconnues comme telles ; autrement le nom de fonction devient un nom propre sans référence. La même chose doit valoir pour les lettres de fonction au moins partout où elles doivent être remplaçables par des noms de fonction. » (Frege & Russell, 1994, p. 88). De la transgression de cette distinction telle qu'elle est exercée par Russell, Frege dérive aussitôt une antinomie dans la tentative de ce dernier pour construire un calcul purement fonctionnel sans classes.

[450] Voir *supra* p. 426.

fonction dont il est le parcours de valeurs. C'est ce qu'établit la malheureuse loi V des *Grundgesetze*, que Frege identifie aussitôt comme la responsable de l'antinomie communiquée par Russell. Cette loi stipule qu'une identité des parcours de valeurs peut toujours être transformée dans la généralité d'une identité et inversement, instaurant ainsi une bijection entre fonctions et parcours de valeurs[451]. Aussi, la loi V est-elle, dans le cadre du système frégéen, le véritable *instrument d'attribution d'objectalité*. Elle attache les fonctions aux objets, et cela de façon double : en leur associant un double objectal d'abord (leurs parcours de valeurs), mais aussi en leur rendant du même mouvement entièrement dépendantes des objets que les fonctions prennent pour argument et de ceux auxquels elles renvoient comme valeurs[452]. C'est donc par cette nature, sinon immédiatement, du moins nécessairement objectale de la fonction que se trouve transgressé l'ensemble de distinctions censées assurer la logicité de l'idéographie : les concepts acceptent soudain d'être regardés comme des objets, les fonctions peuvent être prises (fût-ce indirectement) comme arguments, les expressions deviennent susceptibles de prendre leur référence pour la détermination de leur sens, définissant un sens pour lequel aucune référence n'est formellement assignable avec cohérence…

Tout se passe donc comme si la vieille catégorie d'objet venait troubler l'ordre purement *expressif* que la fonctionnalité avait eu la puissance d'ériger, et dont la dimension *logique* était censée être à la fois plastique et garantie par la distinction entre le sens et la référence. C'est pourquoi la discussion entre Frege et Russell à la suite de l'antinomie sur la façon de limiter la généralité ou validité de la loi V pour conjurer les contradictions constitue plus profondément une discussion sur la nature et les conditions de l'objectalité en tant que détermination logique, et notamment de l'objectalité des termes complexes comme les parcours de valeurs, extensions ou classes. De ce point de vue, la restriction généralisée des fonctions à des arguments de « type » inférieur, avancée par Russell, qui finira par prendre la forme d'une Théorie générale des types, correspond à une conception de la classe comme étant un objet d'un genre spécial, si jamais elle constitue un objet tout court[453]. La tentative de Frege de contourner l'antinomie par une restriction sélective de la loi V, excluant les parcours de valeurs spécifiques des fonctions ponctuellement considérées[454], montre en revanche sa

[451] Pour l'expression formelle de cette loi, voir note 429 ci-dessus.

[452] Comme nous l'avons vu plus haut (*supra* p. 403), c'est sur ce double attachement qu'est appuyée la construction logique du nombre que Frege propose dans les *Grundlagen*.

[453] Pour la Théorie russellienne de types, à part la présentation que Russell en fait dans l'Annexe B de ses *Principles* (1903/2010) et dans le chapitre II de l'introduction à *Pricipia Mathematica* (1910), on pourra consulter le livre de de Rouilhan (1998) et l'article de Urquhart (2003).

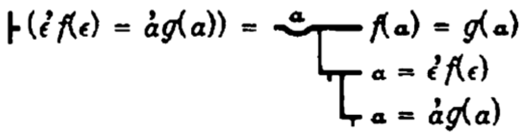
[454] Formellement :

volonté de maintenir une notion d'objet aussi générale et homogène que possible. Cette divergence en révèlera une autre plus profonde, à savoir la différence de nature dans la détermination ultime de la notion d'objet. C'est ce que cet échange finira par les forcer à expliciter : l'objet comme corrélat des facultés subjectives pour Russell, l'objet comme saturation expressive pour Frege. Or si la confrontation mutuelle a permis à Russell de trouver le principe de signification (la dénotation) adéquat à sa conception après tout métaphysique de l'objet, la justesse des objections de Russell a été capable de faire apparaître dans les formulations de Frege l'écart qui se creusait entre ses efforts pour élaborer une notion strictement expressive de l'objectalité et les conditions de logicité propres de l'Expressionnisme données par la distinction entre sens et référence. En effet, ce que mettent en lumière les difficultés éprouvées par Frege dans son échange avec Russell, c'est que la distinction sémiotique entre fonction et argument constitue moins le principe symétrique des deux distinctions logiques (concept/objet, sens/référence), que le moteur et la raison du passage de l'une à l'autre. Raison qui n'est autre que la capture de l'essence de la logique à partir du fonctionnement expressif des signes. Dans cette substitution forcée du couple concept/objet par celui de sens/référence, le dernier ne saurait pourtant recouvrir le premier. Frege ne manque pas de le remarquer lorsqu'il essaie de donner des précisions sur son article de 1892 dans un texte demeuré inédit ; concernant la distinction entre sens et référence, il affirme :

> …un manque de clarté peut aisément être suscité par le fait que l'on confond la division en concepts et objets, d'une part, avec la distinction entre sens et référence, d'autre part, d'une manière telle que l'on réunit sens et concept, d'un côté, et référence et objet, de l'autre. (Frege, 1892-95, p. 139)

Mais malgré cette confusion habituelle, les deux couples de termes sont disparates. La preuve de cette disparité est, selon ce que Frege continue à expliquer, qu'à tout concept ou terme conceptuel correspond à la fois un sens et une référence, du moins lorsque la question de la vérité est en jeu. Mais alors une question se pose : si la différence entre concept et objet se trouvait entièrement réduite à la distinction entre fonction et argument (c'est-à-dire, entre l'insaturé et le saturé), et comme celle-ci assure sa portée logique grâce à la différence entre sens et référence qu'elle nécessite, comment se fait-il que cette dernière différence entre en

---



Autrement dit, Frege introduit la condition pour « *a* » de ne pas être égale aux deux parcours de valeurs en question. Cf. l'Annexe II aux *Grundgesetze* (1893-1903/1966, p. 262).

conflit avec celle du concept et de l'objet ? C'est que le concept a beau ne pas se confondre avec le sens, *la notion de référence est, quant à elle, parfaitement indiscernable de celle d'objet*. En effet, si la notion de sens comporte l'essentiel de la nouveauté sémio-logique frégéenne, capturant la puissance de détermination de la variation expressive, la référence est pour sa part invariablement présentée par Frege comme rien d'autre que l'*objet* désigné (*bezeichnet*) ou référé (*bedeutet*) par un nom ou signe. Depuis le remaniement autour de 1890 jusqu'à la correspondance avec Russell et au-delà, les notions de référence et d'objet sont sans cesse utilisées indifféremment. Elles ne coïncident pourtant pas dans leur définition : la première renvoie à une invariance par rapport à une variation expressive qui capture la vieille notion de contenu conceptuel ; la seconde renvoie à un tout refermé sur soi, « saturé ». Sans doute l'invariance expressive peut être vue comme un tout refermé sur soi (c'est le rôle des parcours de valeurs). Mais si un concept peut avoir un sens et une référence, et que la référence est nécessairement un objet, alors la distinction entre concept et objet se voit transgressée et s'abîme facilement dans l'inconsistance. La divergence entre objet et référence est pourtant plus fondamentale que celle qui est suggérée par cette transgression après tout assez élémentaire de la conceptualité. Il ne saurait pas être question d'un remaniement simple dans la distribution des couples des termes. Sa difficulté n'est d'ailleurs que celle des restrictions possibles et légitimes de la loi V. Or ce qui se cache derrière cette difficulté, c'est plus profondément une divergence concernant l'articulation, ou plus précisément la stratification de l'articulation. Car du fait de leurs définitions, la référence se trouve stratifiée d'après les niveaux d'articulation dans lesquels s'organise la variation expressive dont elle dépend, alors que la saturation assure aux objets, comme on l'a vu, un statut sémiotique homogène. De cette façon, l'objectalité rabat les différents niveaux de référentialité possible sur un seul plan. Plus précisément, sur le plan défini par le niveau le plus bas d'articulation, celui de l'individu[455]. Et cela dans la mesure où l'individu constitue la figure éminente de l'insaturation, puisqu'en tant qu'inarticulé, il ne peut donner lieu à partir de lui à d'autres expressions insaturées (de niveau inférieur). De surcroît, cette capture ou projection objectale de la référentialité attribue aux contenus référentiels une nature simple, c'est-à-dire inarticulée. Même dans le cas où l'expression d'un tel contenu serait articulée, cette articulation doit être neutralisée, privée de toute son efficace (c'est en particulier la fonction des voyelles grecques accentuées dans la constitution de l'expression des parcours de valeurs). L'objectalité de la référence efface ainsi après coup le principe de l'articulation qui détermine l'essence propre de l'expressionnisme.

---

[455] C'est ce que Philippe de Rouilhan appelle « paradoxe de la représentation » dans son étude sur Frege (de Rouilhan, 1988).

Autant dire que l'objet « confond tout ». Élément privilégié de distinction dans son opposition classique au concept ou au sujet, la notion d'objet devient soudain l'occasion d'un brouillage inattendu. Une telle situation n'a cependant rien de contingent. Elle est l'effet, et même le symptôme, du fait que le régime général d'intelligibilité sur lequel cette notion cherche à opérer ses distinctions a été l'objet d'une profonde mutation. En effet, dans le régime d'Abstraction symbolique, organisé autour de l'opposition forme-contenu, la notion d'objet, à laquelle celle de contenu se laissait réduire, venait distinguer tout ce qui devait être abstrait afin atteindre les formes conceptuelles au niveau desquelles se jouaient les déterminations logiques. En déplaçant l'axe suivant la polarité de l'expression et du contenu, et aménageant ainsi une place pour une forme de contenu où viendrait se loger un contenu proprement logique, l'Expressionnisme frégéen rend la notion d'objet foncièrement inefficace. La distinction entre sens et référence est la mesure même de cette inefficacité. Dès lors, le maintien de la catégorie d'objet dans ce cadre entièrement renouvelé, même redéfinie comme saturation d'après les exigences de l'expressivité fonctionnelle, rapporte l'Expressionnisme au régime d'abstraction contre lequel il se définit, et le rend justiciable des distributions qu'il a la vocation et la puissance de contester.

S'en suivent de multiples confusions, dont la source n'est après tout pas différente de celle des malentendus qui avaient marqué la réception de la *Begriffsschrift.* Mais à la différence des confusions occasionnées par les premiers écrits logiques de Frege, le brouillage produit par la persistance de l'objet se loge à l'intérieur même du système frégéen. Ce qui a des conséquences lourdes pour l'Expressionnisme comme tel. Car si, par la notion de *sens*, le contenu logique découvrait sa *forme* proprement *expressive*, l'*objectalité* invariable de sa dimension *référentielle* cristallise ces formes dans de véritables *figures*. Nous avons parlé de « figures de contenu » dès notre première formulation du problème frégéen, lorsque nous découvrions que l'individu, le concept, le jugement, et la valeur de vérité, en tant que formes spécifiques de contenu, ne pouvaient résulter directement du fonctionnement expressif articulant la formalisation du sens mise en œuvre par la *Begriffsschrift*. Ce n'est pourtant que maintenant que l'on peut pleinement comprendre ce que nous entendions par là, et reconnaître dans la question même de la figure le point problématique dans la pensée logique de Frege. Dans son sens courant, la notion de figure renvoie à la forme extérieure et unifiante des objets, et notamment des objets inanimés[456]. Elle capture ainsi l'idée d'une unité fixe, délimitée et reconnaissable, qui constitue un point privilégié et solide d'attribution (de

[456] C'est, par exemple, le sens que lui donnera Russell dans « An Inquiry Into Meaning and Truth » (1940/1956, p. 330). Lalande attribue aussi à Russell une conception de la figure comme « forme d'objets inanimés » (1926, p. 351).

propriétés, d'actions, d'être…) parce que posée comme donnée, c'est-à-dire extérieure et première. En tant que telle, la figure n'est rien d'autre que l'objet regardé du point de vue de son expression, ou plutôt du point de vue de l'expression en général. Elle détermine ainsi un *style* d'expression particulier : objectale, ou en faisant appel aux synthèses de la même langue dans laquelle Frege pensait la *Begriffsschrift*, « *gegenständlich* ». Mais il faut comprendre ce terme dans le sens précis qu'il prend lorsqu'il qualifie la peinture ou l'art en général (*gegenständliche Malerei*, *gegenständliche Kunst*) en opposition à la peinture où l'art *abstraits*. *Gegenständlich*, c'est-à-dire, *figuratif*. En attribuant à la référence une nature objectale, ce qui veut dire en rabattant la forme du contenu sur la forme de l'objet dans un régime sémiotique où le contenu est censé être déterminé en fonction de l'invariance dans un champ de variation expressive, *l'Expressionnisme de Frege devient figuratif*. À la question de la qualification spécifique de l'expressionnisme indéterminé de Frege sur laquelle nous ouvrions la quatrième partie de notre recherche, la figuration nous permet de répondre avec justesse : *Expressionnisme figuratif*.

En tant que *style* particulier, la figuration se place, aussi pour la formalisation du sens, en opposition à l'abstraction des Booléens, puisque c'est en comptant sur la forme de l'objet qu'elle prétend asseoir la prise logique sur les contenus concrets dont le régime booléen exigeait l'abstraction. Sur ce point, la volonté de contenu de la logique de Frege rejoint la résistance de Boole lui-même contre les Booléens. Qui plus est, la figuration vient de cette manière combler l'apparente indétermination de l'Expressionnisme frégéen. Elle vient remplir le vide laissé par Frege entre un mode de détermination purement expressif et la constitution de formes de contenu précises : devant l'absence d'un principe déductif déterminant dynamiquement ces formes, le plan du contenu finit par être découpé en *figures* (individu, concept, contenu jugeable, valeur de vérité), par une application externe de la forme de l'objectalité. Mais le prix à payer pour une telle solution figurative de l'Expressionnisme est le conflit engendré par la présence de deux principes concurrents de détermination, expressif et figuratif, lorsque le sens viendra assumer sa place non objectale parmi les contenus. Conflit qui se manifeste déjà dans la différence entre la référence comme invariance et l'objet comme insaturation, et qui apparaît plus clairement dans le réaménagement de l'espace des figures du contenu à la suite de la mise au point du système au début des années 1890, et dont le tableau dressé dans la lettre à Husserl constitue l'illustration la plus claire[457]. Ce tableau trahit l'ensemble de difficultés liées à la concurrence des deux principes : disparition du contenu jugeable comme figure de contenu au même niveau que les autres ; ambiguïté de la figure

[457] Voir *supra* Figure 3 p. 419.

conceptuelle du fait de son caractère objectal, et de son rapport aux objets censés tomber sous le concept ; apparition inattendue du « sens du nom propre », qui reste après tout essentiellement indéterminée… On remarquera aussi la place centrale du nom propre comme expression de la figure de l'objet individuel, sous la forme de laquelle les autres formes cherchent à être rabattues, ainsi que l'aplatissement sur un même niveau des figures correspondant en principe à des niveaux d'articulation différents.

Toutes ces difficultés ne sont au bout du compte que celles que Russell indique tout au long des échanges analysés : si l'on prend la notion d'objet au sérieux (ce que Russell fait), c'est-à-dire si on assume la capacité de la catégorie d'objet à établir des distinctions pertinentes, alors l'objectalité ne peut être attribuée à des unités d'un niveau autre que celui de l'individualité simple et inarticulée[458], et cela même si on accorde à Frege la nécessité de traiter les parcours de valeurs comme quelque chose de plus que de simples agrégats d'objets[459]. Cela veut dire que, lorsque la notion d'objet est attribuée à des unités de niveau autre que l'individualité, ce ne peut être que dans un sens *figuré* : ce n'est que par métaphore, donc par une *figure de style*, qu'on peut dire d'une armée en tant qu'ensemble de soldats individuels qu'elle est un « objet »[460]. Or ce qui se voit ainsi *figuré*, c'est littéralement le *sens*. Car c'est dans le sens que se joue la constitution des « touts » ou des « systèmes » auxquels Frege cherche à attribuer la figure objectale. C'est pourquoi là où pour Russell l'objectalité est littérale, le sens fait défaut[461]. Et si pour Frege il n'y a pas d'autre manière d'appréhender des objets logiques[462], on a beau avoir des noms propres, il faudra néanmoins dire que toute objectalité en logique n'existe que dans un sens figuré. Frege a immédiatement compris cette accusation masquée dans les formulations de Russell. Aussi, à la lettre où celui-ci lui présente son idée encore embryonnaire des types, le logicien allemand répond : « Une classe ne serait

---

[458] Russell à Frege, 10 juillet, 1902 : « Une classe qui consiste en plus d'un objet, est au premier chef non pas *un* objet, mais plusieurs. Certes il est vrai qu'une classe ordinaire forme *un* tout, par exemple les soldats forment une armée. Or cela ne me semble pas être une nécessité pour la pensée, toutefois c'est précisément cela qui est essentiel quand on veut utiliser la classe comme nom propre. Je crois pour cette raison pouvoir dire sans contradiction que certaines classes (plus précisément celles qui sont définies par des formes quadratiques) ne sont que des pluralités, et ne forment finalement pas un tout. » (Frege & Russell, 1994, p. 88).

[459] Cf. le début de la lettre de Russell à Frege du 8 août 1902 (Frege & Russell, 1994, p. 66).

[460] Cf. l'exemple de Russell dans la note 458 ci-dessus, et la réponse de Frege dans sa lettre de réponse (Frege & Russell, 1994, pp. 60-61).

[461] Rappelons les mots de Russell dans sa dernière lettre : « Dans le cas d'un nom propre simple comme « Socrate », je ne peux pas différencier sens et référence ; je vois seulement l'idée, qui est psychologique, et l'objet. Mieux dit : je n'admets nullement le sens, mais seulement l'idée et la référence. » (Frege & Russell, 1994, p. 96).

[462] Frege à Russell, 28 juillet 1902, (Frege & Russell, 1994, p. 61) : « Ce dont il s'agit là, c'est de la question : comment concevons-nous les objets logiques ? Or je n'ai pas trouvé d'autre réponse que celle-ci : nous les concevons en tant qu'extensions de concepts, ou plus généralement en tant que parcours de valeurs de fonctions. Qu'à ceci se rattachent des difficultés, je ne l'ai jamais méconnu, et celles-ci sont encore accrues par votre découverte de la contradiction ; mais quel autre chemin a-t-on ? »

pas un objet *au plein sens du mot*, mais pour ainsi dire un objet improprement dit » (p. 68, nous soulignons).

En soulevant la question de l'objet, et en mettant en avant les conditions de sa consistance en logique, la confrontation avec Russell fait apparaître ainsi le caractère figuratif de l'Expressionnisme frégéen. Autant dire que les effets de cette prise de conscience touchent au vif la pensée de Frege. Car en tirant toutes les conséquences de l'Expressionnisme figuratif frégéen devant les exigences imposées par l'antinomie, Russell met Frege face à une alternative. Soit il assume le lien nécessaire entre une détermination *figurative* (c'est-à-dire objectale) de la forme du contenu et la nature métaphorique ou *figurée* du sens en logique – ce qui revient à nier l'Expressionnisme au nom d'une organisation substantiellement homologue à celle de l'Abstraction symbolique. Soit il assume un expressionnisme radical, littéral au point où même la fonction et l'argument distingués par saturation/insaturation apparaissent comme autant de figures illégitimes, puisque même les signes de fonction seraient des expressions « au plein sens du mot », selon une homogénéité expressive toujours au bord de la contradiction[463].

L'antinomie de Russell et l'échange entre les deux logiciens qui la suivit révèle ainsi l'*essentielle incompatibilité entre l'Expressionnisme et la figuration*. Mais ce faisant, elle met en évidence du même coup la résistance de Frege à assumer jusqu'au bout les conséquences de ce qu'il tenait pour sa contribution la plus originale à la pensée logique. En effet, la figuration, c'est-à-dire l'attribution d'une forme objectale aux déterminations référentielles du contenu, est là pour contenir et maitriser les effets de l'Expressionnisme articulé autour de la fonctionnalité et de la structure du sens. Si l'Expressionnisme se définit par une direction de la détermination qui va de l'articulation à l'identité (l'identité étant toujours le résultat d'un effet de variation articulatoire), la figuration renverse cette direction et pose l'identité comme indépendante, voire première, par rapport aux variations des articulations expressives. La figure de l'objet inverse ainsi la hiérarchie du contenu par rapport à l'expression et rend première l'identité par rapport à la variation, la référence par rapport au sens. Ce qui veut dire que l'attachement de Frege à l'objectalité n'est pas la conséquence d'un geste réaliste, idéaliste ou Platonicien, comme supporteurs et détracteurs cherchent à le qualifier en croyant y voir ainsi une véritable explication, à moins que le réalisme, l'idéalisme, le Platonisme ou n'importe quel autre « isme » ne soit une façon scolastique, voire scolaire, de nommer cette

[463] C'est en particulier la voie que Russell suggère à Frege dans sa lettre du 24 mai 1903, où il propose un calcul purement fonctionnel, affranchi des classes (qualifiées de « entièrement superflues »), en traitant les fonctions, non pas comme des symboles simples (« ϕ ») ou simplement articulés (« $\phi(x)$ »), mais sous l'expression introduite par Frege pour les parcours de valeurs : « $\acute{\varepsilon}f(\varepsilon)$ ». Frege démontre immédiatement le caractère contradictoire d'un tel langage. Ces formulations contiennent déjà les principes fondamentaux du Lambda Calcul. Sur cette anticipation du Lamda-calcul on pourra voir Klement (2003).

primauté à la fois sémiotique et logique accordée à l'identité sur la variation, à la référence sur le sens.

Le logicisme russellien a sans doute entièrement manqué le projet d'une logique du sens. Cela n'a rien d'étonnant dans la mesure où le logicisme (pas plus que Russell) n'a jamais eu la vocation d'assumer les enjeux d'une philosophie critique. C'est pourquoi une logique du sens ne saurait jamais être logiciste à proprement parler. Mais le plus étonnant, et l'on dirait presque le plus tragique, c'est qu'en rendant figuratif l'expressionnisme, Frege la manque et la trahit tout autant. Bien qu'il soit allé, sous la pression de l'anti-expressionnisme russellien, jusqu'à faire du sens le lieu même de la vérité, son attachement ultime à la forme de l'objet manifeste qu'il n'était pas prêt à céder sur l'indépendance d'une logique de la vérité par rapport à une logique du sens la contenant et la rendant possible. Cette abdication et de la notion de sens qu'il avait su lui-même inventer pour la logique, et du projet d'une logique du contenu dont elle provient et qu'elle promettait d'accomplir, n'est pas implicite. Elle se trouve énoncée de façon ouverte et on ne peut plus claire dans un de ses textes posthumes datant des années immédiatement postérieures à la série des articles du début des années 1890. Dans ces pages, reprenant les termes de la vieille question logique, Frege revient sur les pas de ses premières audaces et prend finalement parti pour les logiciens de l'extension contre la logique du contenu et le sens :

> [Les logiciens de l'extension] ont raison, si, par leur préférence pour l'extension du concept par rapport au contenu du concept, ils font savoir qu'ils considèrent la référence des mots comme la chose essentielle pour la logique, et non pas le sens. Les logiciens du contenu n'en restent que trop volontiers au sens ; car ce qu'ils appellent contenu, si ce n'est pas tout simplement la représentation, est bien le sens. Ils ne songent pas qu'il ne s'agit pas, en logique, de la façon dont des pensées résultent de pensées sans égard à la valeur de vérité, que l'étape qui mène de la pensée à la valeur de vérité doit être franchie, que, de façon plus générale, l'étape qui mène du sens à la référence doit l'être, que les lois logiques sont d'abord des lois dans le domaine des références et ne se rapportent que médiatement au sens. Si l'on s'intéresse à la vérité – et c'est la vérité que vise la logique –, on doit également s'interroger sur les références, on doit rejeter les noms propres qui ne désignent, ou ne nomment, aucun objet, bien qu'ils puissent avoir un sens ; on doit rejeter les termes conceptuels qui n'ont pas de référence. (Frege, 1892-95, p. 145)

L'extensionalité du concept ici préconisée, ou plus précisément l'équivalence entre une fonction et son parcours de valeurs, est donc la façon de se défendre contre la possibilité d'un sens débridé[464]. On comprend dès lors la désolation ressentie par Frege face à l'exigence de limiter la portée de sa loi V : toute limitation de cette loi sanctionne l'ouverture d'un écart entre l'objet et le sens, et impose l'obligation de prendre parti. La paralysie de sa production après 1902 reflète suffisamment son insurmontable incapacité de le faire. Malgré ce que laissent voir certaines réflexions intermittentes, comme son texte de 1906, qui manifestent une certaine tendance à prendre la défense du sens contre la référence[465], leur timidité et précarité restent de toute évidence insuffisantes. Or, si face à l'immobilité hésitante et comme perplexe de Frege, Russell emprunte avec détermination la voie de l'objet, de la dénotation et de la vérité, il y a lieu à se demander ce que cela aurait pu signifier d'aller « jusqu'au bout » de l'Expressionnisme dont Frege avait lui-même inventé bien plus que la possibilité. *Qu'est-ce au fond qu'un Expressionnisme non figuratif et pourtant entièrement formel ?* Ou plutôt, à quelles conditions, inacceptables tant pour Frege que pour la tradition russellienne qu'il n'a malgré tout jamais voulu épouser, l'Expressionnisme frégéen aurait-il pu être radicalisé, pour déboucher sur une véritable logique du sens portant le poids d'une philosophie critique dans le cadre à la fois rigoureux et ouvert des savoirs et des pratiques formelles ?

V.1.3. Les conditions d'une logique du sens : signe et nombre

L'Expressionnisme en logique est indissolublement lié aux conditions pour l'établissement d'une logique du contenu. En transformant entièrement l'espace d'intelligibilité des procédures sémiotiques des mathématiques, et en le rapportant directement à l'Arithmétique à travers l'interprétation fonctionnelle, Frege ouvre à ces conditions des perspectives nouvelles. Car le lien étroit entre l'Abstraction symbolique et l'Algèbre constituait un véritable obstacle à la possibilité de poser le problème des déterminations sémiotiques de l'Arithmétique de façon directe. Sous un tel régime, la conception générale du signe était informée par les pratiques sémiotiques associées aux opérations de l'Algèbre abstraite naissante, et c'est à une telle conception du signe comme *symbole abstrait* que le nombre se voyait mesuré. Il en résultait une récusation abrupte de tout statut sémiotique du nombre, qui entrainait, malgré les résistances de Boole, une surdité à sa

[464] Cette renonciation du sens au nom de la référence a été abordée par J. Benoist (2002, pp. 215-16), qui l'inscrit dans le cadre de la discussion entre Frege et Husserl. Identifiant avec la démarche phénoménologique certains traits fondamentaux de ce que nous appelons ici « expressionnisme », Benoist parle très justement d'une « rupture du contrat phénoménologique » de la part de Frege.

[465] Cf. note 447 ci-dessus. Dans des notes de la même année, Frege écrit : « l'extension de concept ou de classe n'est pas selon moi ce qui vient en premier » (Frege, 1994, p. 219).

capacité de nourrir une conception alternative du signe. La mise en avant de l'Arithmétique effectuée par Frege comme modèle privilégié de langage pour la constitution d'un système logique enlève ce verrou symbolique. L'adoption d'une perspective fonctionnelle par laquelle ce verrou est levé fait du signe avant tout une *figure expressive*, c'est-à-dire, une unité susceptible d'être déclinée dans une multiplicité d'expressions variables. Ce faisant, il met le nombre, avec les multiples dimensions qui caractérisent son existence en tant que signe mathématique, en contact direct avec une conception possible du signe en général, censée être définie à sa mesure.

Et de fait, c'est précisément du nombre et de ses propriétés sémiotiques, ou plus précisément expressives, que s'autorise le style particulier d'expressionnisme qui fonde et supporte la logique frégéenne. Nous avons suffisamment insisté sur cette exemplarité constitutive de l'Arithmétique pour l'idéographie, et notamment sur la nature arithmétique du fonctionnalisme qui s'étaye sur lui. Mais la tragédie proprement frégéenne veut que ce soient ces propriétés sémiotiques de l'Arithmétique, et plus précisément celles du nombre, qui *se retournent contre lui et le dessaisissent de son espoir*. En effet, non seulement la fonctionnalité est dessinée par Frege selon la forme des expressions spécifiquement arithmétiques, de même que la distinction fondamentale entre sens et référence résulte du double mode d'existence sémiotique des nombres (simple et composé). Mais encore, la *figuration objectale* par laquelle Frege compte pouvoir contenir et maîtriser les excès risqués de l'Expressionnisme, et qui se révèle finalement responsable des difficultés soulevées par l'antinomie de Russell, trouve également pour lui sa justification et comme sa preuve dans la nature sémiotique présupposée du nombre.

Il suffit de suivre avec attention le cours des argumentations à travers ses textes aux différentes périodes de sa production pour constater que la nature figurative des signes numériques constitue pour Frege l'argument à la fois canonique et ultime à chaque fois qu'il s'agit de justifier la nature figurative des signes en général, autrement dit le fait qu'à une variation expressive peut toujours correspondre une référence objectale. Ce qui veut dire qu'avant même d'entamer toute construction logique du nombre comme un objet (cet objet complexe qu'est l'extension du concept d' « équinuméricité »), l'*objectalité simple* du nombre est présupposée par Frege *au niveau de son immédiate existence sémiotique*. Et ce n'est que sous la condition de cette présupposition sémiotique de la simplicité de l'objectalité numérique que pourront être constitués les instruments spécifiques par lesquels l'objectalité du nombre pourra, uniquement ensuite, être construite logiquement comme entité complexe.

Cette condition parcourt l'ensemble de son œuvre logique, depuis la *Begriffsschrift* jusqu'aux échanges avec Russell et au-delà. Mais la mise au point du système au début des années 1890 la fait ressortir avec une particulière évidence. On peut le voir notamment dans

« Fonction et concept ». En effet, dans ces pages fondamentales, après soutenir que le contenu ou référence des expressions « $2 \cdot 2^3 + 2$ », « 18 » et « $3 \cdot 6$ » est le même, et affirmer qu'il se refuse à penser que $2 + 5$ et $3 + 4$ soient égaux mais non identiques, l'extension de la figuration aux autres variations expressives introduites par l'exemple de la *viola odorata*[466] oblige Frege à avancer subitement l'argument concernant l'*objectalité* dans l'Arithmétique :

> La différence des désignations n'est pas une raison suffisante pour qu'il y ait différence du désigné. Ce principe n'a pas la même évidence en arithmétique pour la seule raison que la référence du signe numérique 7 n'est rien qui soit perceptible par les sens. Cette tendance, si commune aujourd'hui, à ne pas reconnaître pour objet ce qui n'est pas perçu par les sens, a pour conséquence que l'on prend les signes des nombres pour les nombres eux-mêmes, pour les véritables objets de recherche, auquel cas 7 et $2 + 5$ seraient différents. Or, cette interprétation est insoutenable, on ne peut parler d'aucune propriété arithmétique des nombres sans revenir à la référence des signes numériques. (Frege, 1891, p. 82)

L'objectalité met de cette façon le contenu à l'abri des signes, l'identité à l'abri de la différence ; et de cette objectalité, le nombre est à la fois la confirmation, la preuve et le paradigme. Cette compréhension particulière des signes numériques reste ainsi l'argument dernier de l'objectalité de la référence comme invariance d'une multiplicité expressive, quitte à élargir la notion d'objet au-delà de la sensibilité. On le retrouve constamment dans les textes de la même époque, et bien entendu, dans les *Grundgesetze*[467]. On ne s'étonnera donc pas que Frege fasse appel à lui comme un recours ultime, presque une imploration, dans sa dernière lettre à Russell, où l'argument prend la clarté dense d'un dernier cri, qui semble ne plus pouvoir compter que sur la force de l'évidence :

> On peut dire que $3 + 4$ est identique à $8 - 1$; c'est-à-dire que la référence de « $3 + 4$ » coïncide avec celle de « $8 - 1$ ». Mais cette référence, à savoir le nombre 7, n'est pas partie constituante du sens de « $3 + 4$ ». L'identité n'est pas une identité de sens ou d'une partie du sens, mais de la référence. (Frege & Russell, 1994, p. 90)

Les difficultés alors ressenties pour étendre cet argument à un niveau d'articulation expressive supérieur sont attestées par les ratures qui suivent aussitôt, figurant sur le brouillon de cette lettre[468], et qui laissent sans réponse immédiate la question « Vous parlez de la référence d'une proposition ; mais qu'entendez-vous par là ? » (p. 90). Et pourtant, ou peut-être pour

---

[466] Voir *supra* p. 393.

[467] Cf. par exemple Frege (1892, p. 138) et l'introduction de la différence entre sens et référence dans les *Grundgesetze* (1893-1903/1966, pp. 6-7).

[468] Voir note 445 ci-dessus.

cela même, après un détour par l'exemple de Copernic, Frege revient une dernière fois sur l'évidence de son argument :

> Comparez cela avec l'exemple suivant ! « $7 - 1$ » désigne un nombre ; de même « 7 » et « 1 » désignent des nombres. Ces nombres sont, dirons-nous, sur la même scène. Le mode de liaison du signe « $7 - 1$ » avec le nombre $7 - 1$ ou 6 est le même que celui du signe « 7 » avec le nombre 7. Or nous pouvons au lieu du signe « 7 » prendre aussi le signe « $4 + 3$ », et « $4 + 3 - 1$ » désigne alors le même nombre que « $7 - 1$ », puisque « $4 + 3$ » désigne le même nombre que « 7 ». Nous pouvons envisager $7 - 1$ comme valeur de la fonction « $\xi - 1$ » pour l'argument 7. Et il est indifférent, pour la valeur, de savoir lequel des signes, de référence égale[469], « 7 » « $4 + 3$ » « $4^2 - 3^2$ », nous employons. (Frege & Russell, 1994, p. 91)

Si l'ensemble de l'édifice expressif de Frege est organisé figurativement autour du nom propre comme forme éminente du signe, le signe numérique est pour Frege le nom propre paradigmatique. Ce qui fait du nombre lui-même, paradoxalement, l'objet simple le plus immédiatement intuitif, du moins dans le cadre de l'Expressionnisme qu'il cherche à instaurer, c'est-à-dire dans un cadre où l'intuition n'a droit de cité que comme *intuition des signes*. De cet objet simple et comme donné, les chiffres ou signes numériques ne sont que la figure, et cette figurativité immédiate garantit en dernière instance la figuration générale des expressions. C'est par cette compréhension des signes numériques comme des signes simples et immédiats, et de l'objectalité comme donnée simplement dans cette simplicité, que l'Expressionnisme peut être protégé figurativement, que la référence peut prétendre gouverner le sens, et que, en général, le signe peut se donner comme *figure* et non pas uniquement comme pure *expression*. Mais c'est bien par elle aussi que la référence peut supporter autant de sens possibles et que la figure peut être *expressive*, c'est-à-dire accepter d'être déclinée dans une multiplicité d'expressions à des niveaux de composition ou articulation plus élevés, sans craindre sa dissolution, ni sa perte dans des déterminations psychologiques ou empiriques ; car c'est sur la signification simple et sans pénombre d'un signe comme « 7 » que des expressions complexes comme « $4 + 3$ » ou « $4^2 - 3^2$ » peuvent toujours être rabattues. Frege croit à cette simplicité du signe numérique comme d'autres croient à la blancheur de la neige froide qui gît devant eux, ou d'autres encore à leur existence telle qu'elle est impliquée dans leurs doutes et leurs pensées. Sa nature figurative est pour lui littéralement ce que l'amour pour l'Oliveira de Cortázar : « la racine à partir de laquelle on

---

[469] *der gleichbedeutenden Zeichen*. Nous corrigeons la traduction française : « signes de signification équivalente ».

pourrait commencer à tisser une langue »[470]. Parmi toutes les pièces contribuant à la constitution de son système, celle-ci semble la plus enfouie dans la lumière aveugle de l'évidence. À tel point que, après la commotion de 1902, Frege s'est montré prêt à renoncer à presque tout : aux classes, à la distinction fonctionnelle, à la référence, à l'objectalité des parcours de valeurs, jusqu'à l'expressivité, et même à la cohérence ; mais jamais il n'aura osé envisager de renoncer à la certitude que le signe « 2 » renvoie invariablement, sans mystère ni façon, au nombre 2.

Et pourtant c'est précisément cette évidence, cette intuition de nature strictement sémiotique, que l'antinomie de Russell exigeait en vérité que l'Expressionnisme abandonne. Certes, ce n'est pas dans ces termes que les objections de Russell sont formulées. On peut même dire que cette question particulière n'intéresse nullement Russell, ou plus précisément, qu'elle ne pose pour lui aucun problème, puisque, comme nous l'avons indiqué, le problème du logicisme russellien se pose tout autrement. Non pas que les nombres ne soient pas pour lui des objets ; mais l'objectalité logique des nombres ne saurait se mêler au problème des signes. Nous l'avons dit au début de ce chapitre, ce n'est pas du même problème qu'il s'agit pour Frege et pour Russell. Mais ici tout autant qu'ailleurs, les objections, les contradictions et les antinomies n'appartiennent pas aux sujets qui les formulent, mais aux problèmes sur lesquels elles agissent en tant que tels. C'est ainsi que l'antinomie de Russell pose *d'abord* le problème d'une hiérarchie générale des types uniquement pour une conception pour laquelle le problème de la logique formelle ne se joue pas au niveau des expressions et des signes. Disposant des instruments nécessaires pour construire une véritable Théorie des types, Frege néglige délibérément le privilège de cette voie. Le problème premier ne saurait pour lui être là. Puisque, comme il le dit dans sa correspondance avec Russell, l'objectalité générale des expressions serait perdue sous le poids d'une objectalité « impropre », laissant apparaître comme tel le caractère métaphorique, figuré, et après tout métaphysique, de ses figures.

Frege reprend en détail sa critique de la solution des types dans l'annexe à ses *Grundgesetze* dédiée au paradoxe de Russell, qu'il rédigea en octobre 1902, et qu'il ajouta à son ouvrage lorsqu'il était déjà sous presse. Ses arguments à ce sujet sont exactement les mêmes que ceux exposés dans sa correspondance, tout comme son verdict : « …il semble extraordinairement difficile d'établir une législation complète[471], qui déciderait de manière générale quels seraient les objets admissibles comme arguments pour quelles fonctions. De

[470] Cortázar (1970, p. 483).

[471] Il s'agit bien ici du terme « *vollständig* », que Hilbert employait déjà dans son article de 1900 sur le concept de nombre pour parler de la fameuse « complétude » (*Völlstandigkeit*) d'un système d'axiomes (Hilbert, 1900, p. 183), et que Gödel reprendra dans ses célèbres théorèmes.

plus, la légitimité des objets impropres pourrait être mise en doute. » (1893-1903/1966, p. 255)[472]. Sans véritable possibilité de recours à une telle solution, il se voit donc forcé d'énoncer lui-même, avec une clarté surprenante, la condition par laquelle l'expressionnisme peut demeurer une alternative valide pour la formalisation du sens :

> Si ces difficultés nous découragent de comprendre les classes, et par là les nombres, comme objets impropres, si nous ne voulons pourtant pas non plus les reconnaître comme objets propres, c'est-à-dire comme des objets qui peuvent être admis comme arguments de toute fonction du premier degré, alors il ne reste plus qu'à considérer les noms des classes comme des pseudo-noms propres, qui n'auraient, en vérité, pas de référence. Ils devraient alors être regardés comme des parties de signes qui seulement comme des touts auraient une référence. On peut, pour un certain but, juger avantageux de figurer différents signes concordant en une partie, sans les rendre par là composés. La simplicité d'un signe demande bien seulement que les parties que l'on peut y distinguer n'aient pas une référence indépendante. Dès lors, ce que l'on a l'habitude de comprendre comme un signe numérique ne serait alors en fait aucunement un signe, mais plutôt la partie non-indépendante d'un signe. Une définition du signe « 2 » serait impossible ; on aurait à sa place, beaucoup de signes à définir, qui contiendraient « 2 » comme partie constituante non-indépendante, mais qui ne pourraient être pensés logiquement comme composés de « 2 » et une autre partie. Il serait alors inadmissible de remplacer une telle partie non-indépendante par une lettre ; en effet, en ce qui concerne le contenu, il n'existerait aucune composition. La généralité des propositions arithmétiques serait en conséquence perdue. Aussi, il serait incompréhensible comment, ce faisant, il pourrait être question d'un nombre de classe ou d'un nombre de nombres. (Frege, 1893-1903/1966, p. 255)[473]

Le raisonnement est lumineux par rapport au problème de la formalisation du sens qui est l'objet de notre recherche. Il convient donc de le restituer point par point. Il s'ouvre sur la

---

[472] *Es scheint aber ausserordentlich schwierig zu sein, eine vollständige Gesetzgebung aufzustellen, durch die allgemein entschieden würde, welche Gegenstände als Argumente welcher Functionen zulässig wären. Ueberdies kann die Berechtigung uneigentlicher Gegenstände bezweifelt werden.*

[473] *Wenn uns diese Schwierigkeiten davon abschrecken, die Klassen und damit die Zahlen als uneigentliche Gegenstände aufzufassen, wenn wir sie aber auch nicht als eigentliche Gegenstände anerkennen wollen, nämlich als solche, welche als Argumente jeder Function erster Stufe auftreten können, so bleibt wohl nur übrig, die Klassennamen als Scheineigennamen zu betrachten, die also in Wahrheit keine Bedeutung hätten. Sie wären dann anzusehen als Theile von Zeichen, die nur als Ganze eine Bedeutung hätten. Man kann es ja für irgendeinen Zweck vortheilhaft erachten, verschiedene Zeichen in einem Theile übereinstimmend zu gestalten, ohne sie dadurch zu zusammengesetzten zu machen. Die Einfachheit eines Zeichens erfordert ja nur, dass die Theile, die man in ihnen etwa unterscheiden kann, nicht selbständig eine Bedeutung haben. Auch das, was wir als Zahlzeichen aufzufassen gewohnt sind, wäre dann eigentlich kein Zeichen, sondern der unselbständige Theil eines Zeichens. Eine Erklärung des Zeichens »2« wäre unmöglich; man hätte statt dessen viele Zeichen zu erklären, die als unselbständigen Bestandtheil »2« enthielten, aber logisch nicht aus »2« und einem andern Theile zusammengesetzt zu denken wären. Es wäre dann unzulässig, einen solchen unselbständigen Theil durch einen Buchstaben vertreten zu lassen; denn hinsichtlich des Inhalts bestände ja gar keine Zusammensetzung. Die Allgemeinheit der arithmetischen Sätze ginge damit verloren. Auch wäre nicht zu verstehen, wie dabei von einer Anzahl von Klassen, von einer Anzahl von Anzahlen die Rede sein könnte.*

profonde inadéquation de la catégorie d'objet révélée par l'antinomie : les classes, mais avec elles surtout les nombres, ne peuvent pas être des objets à part entière, mais il n'est pas acceptable non plus, d'un point de vue expressionniste, de les considérer comme des pseudo-objets, ou objets impropres. Il ne reste donc qu'une possibilité, à savoir de reposer le problème *au niveau des noms ou des signes* de ces contenus ; c'est-à-dire qu'il faut envisager la possibilité que les noms des classes, *et celui des nombres en particulier,* soient des *pseudo-noms*, des noms sans référence propre. Autrement dit, *que les signes numériques ne soient pas des noms propres*. Alors découle une série de conséquences décisives pour la théorie du signe, et du langage arithmétique en particulier. Car si les signes numériques, comme « 2 » ou « 7 », ne sont pas des noms propres, ils ne peuvent être que des « parties » (*Teile*) insignifiantes s'articulant dans d'autres signes d'ordre supérieur, *le contenu desquelles n'est pas quant à lui également articulé*. Les différents signes se verraient ainsi partager des parties, comme des particules élémentaires et irréductibles. Constitués de parties, de tels signes seraient néanmoins simples, car, comme le remarque Frege, dans un geste nettement expressionniste qui ne saurait jamais faire partie des énoncés de l'Abstraction symbolique des Booléens, la simplicité d'un signe n'exige pas qu'il n'ait pas de parties, mais uniquement que ses parties n'aient pas de référence ou contenu. Ainsi constitués, ces signes seraient à la fois simples quant à leur contenu, et composés quant à leur expression. Ou plutôt, si l'on préfère parler d'*articulation* pour une composition qui serait uniquement de nature expressive, on pourra dire que les véritables signes seraient *articulés sans être composés*. Les conséquences pour la nature des signes numériques sont incommensurables : les signes numériques, tels « 2 » ou « 7 », ne seraient pas des signes du tout. Ou plus précisément, ils ne seraient pas des signes indépendants (*selbständige*), définissables dans un rapport direct et autonome à un contenu référentiel, comme l'exigerait le modèle du nom propre. Les *figures*, comme forme du signe au moyen de laquelle Frege prétendait déterminer l'Expressionnisme incertain et gouverner l'instabilité du sens qui y pousse, cèdent après tout leur place aux *expressions* pures. À vrai dire, ces expressions élémentaires ne cessent pas pour autant d'être des *figures*, dans le sens précis du mot allemand *Gestalten*[474]. Seulement, ancrées dans l'extrémité irréductible d'une expressivité sans rapport direct au moindre contenu, elles ne sauraient constituer des figures *de contenu*. Ce qui veut dire que ces figures sont coupées de leur capacité à fonder et à animer une véritable *figuration* au milieu des expressions. Si tout signe présuppose le rapport à un

[474] Voici comment Frege qualifiait les figures dans les textes de l'époque de la *Begriffsschrift* : « Le signe visible, et en particulier les figures (*Gestalten*), ont une tout autre nature [que les signes sonores]. Les figures sont en général bien délimitées et clairement différenciées. Cette précision du signe écrit aura pour conséquence de donner un relief plus net à ce qui est désigné. Or, cet effet induit sur nos représentations est précisément ce que l'on doit chercher pour parvenir à la rigueur du raisonnement : ce résultat ne peut être atteint que dans le cas où le signe renvoie immédiatement à la chose » (1882b, p. 67).

contenu, on devra alors dire que ces figures (qu'il faudrait peut-être appeler « expressions *figurales* », pour les distinguer des expressions proprement *figuratives*), tels que « 2 » et « 7 », sont de pures *marques*, uniquement définissables ou déterminables (*Erklärung*) à l'intérieur ouvert et sombre d'une multiplicité d'expressions, dont ils se dégageraient comme des constituants articulatoires. Rien pourtant n'assurerait *a priori* leur organisation *fonctionnelle*, dans le sens où Frege l'entend. C'est-à-dire que si fonctionnalité il y a, ce n'est pas en tant que gabarit fondamental, transmettant aux expressions la figure stable donnée par la distribution univoque du saturé et de l'insaturé. D'où le fait que ces expressions figurales n'admettent pas d'être sémiotisées en tant que telles (par une lettre par exemple), en tout cas, dans aucune des deux possibilités de conférer un statut logique aux signes qui furent ouvertes jusqu'alors dans l'espace de la formalisation du sens. Aucune lettre ou signe représentant ou remplaçant (*vertreten*) ces atomes articulatoires ne saurait assumer les exigences d'un symbole abstrait ou d'une figure expressive. On aura beau remplacer les signes « 2 » ou « 7 » par les signes « *a* », « *b* », « *x* » ou « *y* », ces signes numériques ne sauraient pas pour autant être *symbolisés* ou *figurés* ; le rapport des signes littéraux aux signes numériques reste profondément irréductible à la figuration comme à la symbolisation ou à l'abstraction. Dès lors, si l'on comptait sur la figuration comme principe fondamental de la logicité du langage, on ne voit pas comment « parler » du nombre de ce qui ne serait pas déjà donné comme une figure objectale, et tout particulièrement du nombre des nombres eux-mêmes. La généralité promise par l'approche de l'Arithmétique en termes d'expression et de langage serait ainsi irrémédiablement perdue.

Le verdict de Frege ne peut surprendre : « Je pense : cela suffit à faire apparaître cette voie comme impraticable. ». Ce qui lui laisse comme seule possibilité de « reconnaître les extensions des concepts ou les classes comme objets au sens propre et complet du terme »[475], et de chercher dès lors une correction de la notion d'« extension d'un concept » (1893-1903/1966, pp. 255-256). Or, en mettant les régimes de formalisation du sens en perspective, on comprend que Frege reproduit en fin de compte le même geste qui déterminait la condition fondamentale pour l'exclusion du contenu dans la formalisation du sens des algébristes anglais, à savoir celui de *considérer l'Arithmétique*, en tant que science des nombres, *comme un domaine d'objets*. Certes, loin de refuser le statut sémiotique de ces objets, Frege prétend l'assumer ouvertement. Mais cette prétention s'épuise dans la prise en considération d'un type de signe simple et non problématique supposé désigner de façon directe et exclusive un objet individuel (le nom propre). À ce niveau, le statut sémiotique accordé spécifiquement aux

---

[475] *...die Begriffsumfänge oder Klassen als Gegenstände im eigentlichen und vollen Sinne dieses Wortes anzuerkennen.*

nombres par Frege ne va pas plus loin que la conception des algébristes, qui ne se doutaient certainement pas qu'à ces objets obstinément individuels qu'étaient pour eux les nombres, correspondaient les signes particuliers qu'étaient les chiffres. Car ce n'est pas cette circonstance que le geste des algébristes finissait par nier, mais celle, plus complexe, de la possibilité pour une telle existence individuelle de remplir ou d'assumer au niveau des signes les exigences *symboliques* que leur régime d'abstraction imposait dans sa marche en direction d'une formalisation du sens. De ce point de vue, le traitement des signes numériques par Boole, où derrière les chiffres qui hantent son système se découvre toute une série de dualités intriquées, s'avère malgré toute sa timidité bien plus profond que le statut sémiotique simple que Frege attribue aux nombres. Si la fécondité de l'approche frégéenne pour la logique qui en résulte est pourtant sans conteste plus grande que l'approche des Booléens et de Boole, cela est dû moins à sa compréhension des nombres en termes de noms propres, qu'à la modification du régime sémiotique qui résulte du traitement de l'Arithmétique en termes d'*expressions* de contenus, et non pas de symboles abstraits.

V.1.4. Divergence entre expressions et contenus : le retour du langage

Mais c'est précisément cet Expressionnisme qui, poussé à ses dernières conséquences, vient nier la simplicité du statut sémiotique des nombres, et dénonce le contournement du véritable problème sémiotique qui s'opère derrière une telle sémiotisation. Ce problème est celui de *la divergence essentielle, irrémédiable et constitutive qui réside entre le plan des expressions et celui des contenus*. De cette divergence, l'antinomie de Russell constitue l'effet proprement *logique*. Il se manifeste comme l'excès de la série des sens qui se définissent au niveau des expressions logiques, par rapport à celle des unités référentielles de contenu, le point d'excès de l'une par rapport à l'autre étant positivement donné par l'expression d'un sens dont la référence est prise comme référence de son propre sens[476]. Mais l'approche frégéenne du problème montre que l'excès logique déterminé par cette antinomie a son correspondant et comme sa condition, et même sa source, dans une divergence avant tout *sémiotique*. Car, ainsi qu'il ressort des perspectives avancées dans son annexe aux

[476] En termes russelliens, il s'agit de la classe des classes qui ne sont pas membres d'elles-mêmes. L'excès est ouvertement énoncé par la réfutation de l'existence d'une bijection entre classes et objets ou entre fonctions et objets. On sait que Russell mobilise le théorème de Cantor pour déterminer la cardinalité supérieure de l'ensemble de classes ou fonctions (sens) sur celle des extensions (références). Cf. Russell (1903/2010, pp. 368-374) et l'analyse de de Rouilhan (1998, p. 24 sq). Russell explique à Frege ce recours à Cantor dans sa lettre du 24 juin 1902 (Frege & Russell, 1994, pp. 51-52).

Grundgesetze, si l'on veut empêcher la contradiction logique tout en évitant les écueils de la « pseudo-objectalité », force est bien d'accepter que les unités expressives susceptibles d'exprimer un contenu soient déterminées *de manière nécessaire* par des unités expressives de niveau inférieur *dont l'essence est de n'exprimer aucun contenu*. Or, par cette divergence très précisément localisée entre le plan des expressions et celui des contenus, le problème qui se révèle avec toute sa gravité au milieu de la pensée logique dans sa quête de formalisation est celui que Frege croyait avoir conjuré de façon définitive au moment même de la réalisation de sa *Begriffsschrift*, à savoir celui du « *langage des mots* ».

En effet, l'idée même d'une *Begriffsschrift*, c'est-à-dire d'une idéographie ou d'une « conceptographie » en tant qu'écriture au plus près des contenus conceptuels ou logiques, se définissait et prenait sens par opposition à une *Wortschrift*, comme écriture des mots tels qu'ils se présentent dans le langage courant, et plus précisément dans la langue parlée[477]. C'était même dans la rupture de « la domination du mot sur l'esprit humain » que Frege voyait toute la portée philosophique de son idéographie[478]. Et si les signes portent pour lui le germe de la pensée conceptuelle par leur usage indifférent à l'individualité[479], ce germe n'est fécond que lorsque les caractères écrits d'une langue peignent « non pas les paroles mais les pensées »[480]. Cette consigne leibnizienne, que Frege reprend à son compte et dont il dégage les multiples dimensions, trouve une détermination chez lui précise : si la logique est susceptible de se donner dans une écriture habilitant un calcul, cette écriture doit composer « le concept à partir de ses constituants, et non le mot à partir de ses composants phoniques » (1880-81, p. 17)[481]. Ce qui veut dire que les caractères sur lesquels porte la composition doivent correspondre à des unités conceptuelles et non pas à des unités simplement articulatoires ; plus précisément, que la composition de contenu doit commander l'articulation expressive ; ou encore, que toute *expression figurale* doit être en même temps et de manière nécessaire une *figure expressive*. Comme nous l'avons vu, toute la critique frégéenne du langage naturel est appuyée en dernière instance sur la récusation de cette divergence que le « langage des mots » recèle entre l'articulation expressive et la composition des contenus. C'est après tout bien à cause de cette divergence que « les règles logiques sont alors appliquées de l'extérieur, comme un canon, puisque la simple écriture des mots de la langue parlée n'offre, de par sa nature, aucune garantie logique » (1882a, pp. 65-66). Or, si la langue

[477] Voir par exemple Frege (1882b, p. 65).

[478] Frege (1879/1999, p. 8).

[479] Frege (1882b, p. 64).

[480] Frege (1880-81, p. 21).

[481] L'original allemand dit : *einer Schrift, welche den Begriff aus seinen Bestandteilen, nicht das Wort aus seinen Lauten zusammensetzt*.

parlée est à chaque fois dénoncée comme la racine et la source de cette divergence, c'est avant tout parce qu'elle oblige l'écriture à articuler ses composants expressifs selon une articulation phonique qui détermine des unités expressives (graphiques) parfaitement étrangères aux contenus. Le point irréductible qui fait qu'une *Wortschrift* ne puisse jamais pour Frege être une *Begriffsschrift* réside précisément dans cette circonstance qui fait vivre, *à même l'articulation logique*, une autre articulation de nature hétérogène qui la parasite et la pervertit. Hétérogène, cette autre articulation l'est *par essence*, car cette hétérogénéité n'est pas celle du son à l'écriture, ou encore à la pensée, donnée par le fait après tout contingent que l'homme se sert des sons comme moyen privilégié pour exprimer sa pensée (privilège qui est d'ailleurs bien discutable). Frege le dit lorsqu'il considère le fait qu'une langue s'adresse à l'œil plutôt qu'à l'oreille comme une différence « plus superficielle », derrière lequel se cache pourtant le fait décisif que l'écriture qui représente cette dernière est « constituée de signes de signes et non de signes de choses » (1880-81, p. 21). L'hétérogénéité en question est donc, plus profondément, celle d'une articulation expressive qui se règle sur des contenus par rapport à une articulation qui se définit certes non pas par l'absence actuelle de contenu pour ses unités (ce qui déterminerait de simples symboles abstraits, susceptibles de recevoir un contenu *a posteriori* par interprétation), mais par l'impossibilité définitive d'associer de telles unités à un contenu quelconque. Incapable *par définition* de se déterminer en fonction d'un contenu, cette articulation purement expressive ne peut donc qu'introduire de manière nécessaire des principes de détermination étrangers au contenu. Notamment, comme le dit Frege, une *détermination des signes par rapport à d'autres signes*. En découle la série des aberrations qui d'après lui rendent le langage des mots logiquement incompétent. C'est pourquoi si Frege peut accuser avec une certaine indignation les linguistes de ne pas reconnaître au radical d'un mot une existence indépendante par rapport à cette unité prétendument primitive du discours qu'est le mot[482], il arrête pourtant l'analyse articulatoire à ce niveau élémentaire de contenu ou de signification, au-delà duquel l'articulation changerait de nature, quitte à présupposer la consistance et la stabilité d'un tel niveau :

> Sans doute faut-il que l'expression d'un contenu jugeable, pour pouvoir être ainsi décomposée, soit en elle-même articulée. On peut alors en inférer qu'au moins les propriétés

[482] Ou plus précisément, le « mot-phrase » (*sentenceword*) : « Il est pour moi remarquable à cet égard que quelques linguistes modernes considèrent le « mot-phrase » (*sentenceword*), un mot par lequel est exprimé un jugement entier, comme la forme primitive du discours, et ne reconnaissent au radical en tant que pure abstraction aucune existence indépendante. Je lis ceci dans les *göttingischen gelehrten Anzeigen* 6 April 1881 : A. H. Sayce, *Introduction to the Science of Language* (1880). Par A. Fick. » (Frege, 1880-81, p. 26, note).

> et relations dont on ne peut poursuivre plus loin la décomposition doivent avoir une désignation élémentaire propre. (1880-81, p. 26)[483]

C'était bien pour conjurer les dérives logiques propres à l'articulation hybride qui détermine le langage naturel ou « des mots » que l'Arithmétique était convoquée dans le cadre de l'expressionnisme frégéen en qualité de *langage modèle*[484] ; et c'est en tant que tel qu'elle concentrait tous les espoirs d'une appréhension logique des contenus, d'une *logique du sens*. On comprend maintenant que si l'antinomie de Russell signe pour Frege la fin de tous ces espoirs, c'est précisément parce qu'elle force à assumer que, en tant que système expressif, *l'Arithmétique n'échappe pas à cette double articulation* qu'il croyait, qu'il se sentait obligé de croire, uniquement *linguistique*. En effet, les « parties dépendantes » (*unselbständige Theile*), que Frege découvre avec une surprise méfiante sous les signes numériques, sont des véritables *lettres*. Ou plutôt, des *graphèmes*, si l'on veut éviter de tomber dans une conception fonctionnaliste qui fait de la lettre une identité sémiotique simple et originaire. Graphème donc, non pas dans le sens d'être des simples correspondants graphiques des unités phoniques d'articulation (elles aussi simples), mais dans celui, plus essentiel et décisif, d'une unité graphique dérivée au bout toujours incertain d'un processus complexe de décomposition, et qui se place inlassablement au-delà de toute association possible avec un contenu dont elle pourrait recevoir de façon directe les déterminations. *Vérité de l'écriture alphabétique*.

Si bien que, loin de lui permettre d'échapper au langage des mots, la construction d'après le langage de l'Arithmétique fait de la *Begriffsschrift* une *Wortschrift*, dans un sens à la fois précis, capital et incontournable. Voilà l'objection profonde qui se cache derrière l'antinomie adressée à Frege par Russell. Et de fait, bien qu'il ne la rapporte pas directement à son paradoxe, Russell arrive parfois à expliciter cette objection. Comme si le paradoxe réalisait le sens intime de la démarche russellienne par rapport à celle de Frege ; sens que Russell lui-même ne saisissait qu'à peine. On ne s'étonnera pas que Russell énonce ces

---

[483] Voir aussi Frege (1882c, p. 73), où Frege rapporte explicitement les unités de son idéographie aux racines et aux désinences : « Je veux fondre les quelques signes que j'ai introduits avec les signes mathématiques en un seul formulaire. Les signes existants correspondraient à peu près aux racines des mots, tandis que les signes introduits sont à comparer aux terminaisons et aux particules qui établissent des rapports logiques entre les contenus des racines. ».

[484] Encore une citation : « Une écriture qui veut exploiter tous les avantages propres aux signes visibles doit être entièrement différente de tous les langages parlés. Il est à peine besoin de dire que ces avantages n'entrent pour ainsi dire pas en jeu dans l'écriture du langage parlé. La position réciproque des mots sur le plan d'écriture y dépend pour une grande part de la longueur des lignes et, dans cette mesure, n'est d'aucune signification. Mais il existe d'autres types d'écriture qui font meilleur profit de ces avantages. Le langage par formules de l'arithmétique est une idéographie (*Begriffsschrift*) puisqu'il exprime immédiatement la chose sans passer par les sons. » (Frege, 1882b, pp. 67-68).

objections à l'occasion de sa critique des notions de sens et référence, qui déterminent la dimension logique de l'Expressionnisme frégéen. Ainsi, dans les *Principles,* Russell affirme :

> Frege, il pourrait être remarqué, *ne semble pas avoir clairement démêlé les éléments logiques et linguistiques de la nomination* : les premiers dépendent de la dénotation, et possèdent, je pense, une portée beaucoup plus restreinte que celle que Frege leur accorde. (Russell, 1903/2010, p. 520, nous soulignons)[485]

Et plus précisément, dans « On denoting » :

> Nous disons, pour commencer, que lorsque C [une phrase dénotative quelconque] se présente [*occurs*], c'est de la *dénotation* que nous parlons ; mais lorsque « C » se présente, c'est le *sens* [*meaning*]. Or *la relation de sens et dénotation n'est pas simplement linguistique à travers la phrase : il doit y avoir une relation logique engagée,* que nous exprimons en disant que le sens dénote la dénotation. Mais la difficulté qui nous fait face est que nous ne pouvons pas réussir *à la fois* à préserver la connexion de sens et dénotation *et* à les empêcher d'être un et le même ; aussi que le sens ne peut pas être atteint sinon par le moyen de phrases dénotatives. (Russell, 1905, p. 486, nous soulignons la phrase commençant par 'la relation…')[486]

De cette manière, Russell se présente, tant par l'antinomie que par la philosophie qui portent son nom, comme le point de clôture de cette période liminaire de la formalisation du sens où déterminations sémiotiques et déterminations logiques s'impliquaient les unes dans les autres de façon ouverte, dans une confusion à la fois problématique et vertueuse. Dénonçant la nature nécessairement linguistique des déterminations sémiotiques dans le cadre desquelles la logique « formelle » construisait malgré tout leur critique du langage, Russell force à choisir : *logique ou langage*. « Parle ou meurs ! ». La réappropriation particulière qu'il opère de la tradition booléenne manifeste suffisamment son choix :

> Logique Symbolique ou Formelle – j'utiliserai ces termes comme synonymes – est l'étude des divers types généraux de déduction. Le mot *symbolique* désigne le sujet par une

[485] *Frege, it may be observed, does not seem to have clearly disentangled the logical and linguistic elements of naming: the former depend upon denoting, and have, I think, a much more restricted range than Frege allows them.*

[486] *We say, to begin with, that when C [any denoting phrase] occurs it is the denotation that we are speaking about; but when "C" occurs, it is the meaning. Now the relation of meaning and denotation is not merely linguistic through the phrase: there must be a logical relation involved, which we express by saying that the meaning denotes the denotation. But the difficulty which confronts us is that we cannot succeed in* both *preserving the connection of meaning and denotation* and *preventing them from being one and the same; also that the meaning cannot be got at except by means of denoting phrases*.

> caractéristique accidentelle, car l'emploi de signes mathématiques, ici comme ailleurs, est simplement une commodité théorique sans importance. (Russell, 1903/2010, p. 11)[487]

Mais ce choix réalisé pour la logique contre le langage et le signe est en même temps, et ne peut qu'être, un choix contre une logique du contenu. Qu'il suffise ici de rappeler à ce sujet la célèbre définition donnée par Russell de la mathématique pure, qu'il identifie à la logique formelle telle qu'elle avait été « découverte » par Boole : « Les mathématiques peuvent être définies comme le domaine dans lequel nous ne savons jamais de quoi nous parlons, ni si ce que nous disons est vrai » (1918, p. 75)[488].

Quant à Frege, il va sans dire que cette alternative le dérange. Car malgré l'emprunt de la puissance du contenu au langage, Frege n'est jamais arrivé en dernière instance à faire véritablement confiance aux signes. Cette méfiance n'est même pas un soupçon, dont les effets critiques auraient pu bénéficier tant à la pensée logique que sémiotique. C'est pour Frege, sinon une évidence, du moins un présupposé non critiqué, que rien de logique ne puisse être extrait des signes – dans leur pure existence de signes – qui n'y ait été déposé au préalable par une forme déjà logique, douée d'une certaine indépendance (le niveau le plus austère d'une telle logicité étant déterminé par la fonction propositionnelle). Aussi logique et sémiotique sont-elles constamment demeurées en tension à l'intérieur de la pensée et du système frégéens. Cette tension détermine la source de la dynamique de son œuvre, et si la notion de sens constitue l'effort le plus profond et le plus subtil pour la résoudre, l'appréhension dernière de Frege à son égard ne laissa pour lui d'autre solution que celle d'un écart tacite creusé entre les déterminations logiques et sémiotiques.

De cet écart rassurant que l'Expressionnisme figuratif maintenait secrètement, rien ne témoigne de façon plus symptomatique que la distance entre sa compréhension *sémiotique* du nombre, telle qu'elle se dégage tout au long de son travail, et la conception *logique* du nombre, telle qu'elle est présentée dans les *Grundlagen*. Nous l'avons indiqué : cet ouvrage contient une analyse critique de la conception du nombre qui décèle de manière exhaustive la multiplicité ouverte de ses dimensions problématiques, rejoignant à plusieurs reprises la complexité du nombre révélée par l'œuvre de Boole. Seulement, toutes ces propriétés et caractéristiques du nombre ne sauraient être associées par Frege aux signes numériques. Son

---

[487] *Symbolic or Formal Logic —I shall use these terms as synonyms— is the study of the various general types of deduction. The word* symbolic *designates the subject by an accidental characteristic, for the employment of mathematical symbols, here as elsewhere, is merely a theoretically irrelevant convenience.*

[488] Au demeurant, cette attribution de la découverte des mathématiques pure n'est pas à prendre littéralement, comme il l'avoue dans une lettre répondant à l'invitation à intervenir dans un colloque pour le centenaire de la publication de *The Laws of Thought* : « The remark that you quote from me to the effect that pure mathematics was discovered by Boole was of course not intended to be taken literally, but only as an emphatic statement of the importance of the subject which he inaugurated » (1954, p. 64).

analyse s'avère dès lors incapable d'amorcer un traitement critique de la conception du signe comme tel, dans le cadre de laquelle Frege entend construire cet objet qu'est le nombre. Et cela malgré la complexité *logique* qu'il s'applique à établir et à défendre pour le nombre. C'est pourquoi l'ouverture du texte de 1884 résout le problème entre les signes « a » et « 1 »[489] en renvoyant au nombre 1 comme objet[490]. Et sans doute, comme nous aurions pu le prévoir, sa discussion avec les Booléens, et avec Jevons en particulier, entraîne des perspectives profondes par rapport à la nature sémiotique des nombres, qui rejoignent celle que le système de Boole permettait d'élaborer[491]. Cependant, la préférence de la notion de « terme numérique » à celle de « signe numérique » protège Frege du mélange risqué entre déterminations logiques et sémiotiques, et renvoie le signe du côté de la pure matérialité, sans prise sur les contenus logiques. Ce mépris envers les signes, contre lequel Frege pourtant exhortait ses contemporains à l'époque de la *Begriffsschrift*[492], apparaît clairement dans son objection à Hankel à propos de l'expression « $x + b = c$ » :

> Quelque chose toutefois nous empêche de traiter $(2 - 3)$, sans autre procès, comme un signe résolvant notre problème ; c'est que justement un signe vide ne le résout pas. Ce signe sans contenu, ce n'est que de l'encre ou une trace d'impression sur le papier ; en tant que tel, il a des propriétés physiques, mais nullement celle de donner 2 si on lui ajoute 3. Ce ne saurait être à proprement parler un signe, et son emploi comme tel serait une faute logique. Même dans le cas où $\mathrm{c} > \mathrm{b}$, la solution du problème n'est pas le signe $(\mathrm{c} - \mathrm{b})$, mais le contenu du signe. (Frege, 1884/1969, p. 218)

---

[489] C'est-à-dire, celui de la généralité du signe « a » dans « $a + a - a = a$ » et la particularité du signe « 1 » dans $1 + 1 = 2$. Cf. *supra* p. 391.

[490] Frege (1884/1969, p. 116) : « Mais le nombre 1 n'a-t-il pas, au contraire, *l'apparence d'un objet déterminé*, aux propriétés assignables – par exemple de demeurer identique si on le multiplie par lui-même ? a n'a aucune propriété assignable en ce sens. » (nous soulignons).

[491] À propos de l'addition des unités que Jevons exprime « $1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$ » (cf. *supra* p. 317), Frege écrit (1884/1969, p. 165) : « Certes, si elles sont différentes, il est besoin de les désigner différemment sous peine de voir naître les plus graves confusions. Si les différentes places où figure le un devaient suffire à marquer une différence, il faudrait en faire une règle ne souffrant aucune exception ; sinon on ne pourrait jamais savoir si $1 + 1$ doit désigner 2 ou encore 1. Mais alors il faudrait refuser l'équation $1 = 1$, et nous serions placés dans l'embarras de ne jamais pouvoir désigner une même chose deux fois. Ce qui, évidemment, n'est pas admissible. Toutefois si l'on veut assigner des signes différents à des choses différentes, on ne voit pas pourquoi on maintient un élément commun, ni pourquoi à la place de :

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$$

on ne préfère pas écrire

$$\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} + \mathrm{d} + \mathrm{e}$$

L'identité s'est ainsi dissipée une fois de plus et il n'a servi à rien d'indiquer que les unités jouissent d'une certaine ressemblance. Le un nous file entre les doigts ; il nous reste les objets, avec toutes leurs déterminations. Ces signes

$$1', 1'', 1'''$$

sont l'expression claire de notre embarras : nous avons besoin de l'identité – d'où les 1 –, nous avons besoin de la différence – d'où les indices, dont le seul effet, malheureusement, est de détruire l 'identité. »

[492] Frege (1882b, p. 64) : « Que personne ne méprise les signes, tant dépend de leur choix pertinent ! »

L'ensemble des réflexions des *Grundlagen* ne vaut donc que pour le nombre logiquement construit, ou plus généralement, logiquement *représenté*, et nullement pour le nombre comme entité sémiotiquement constituée, c'est-à-dire *exprimé* au moyen des signes de nature et selon des règles spécifiques. Certes, que le système de Frege puisse après tout représenter logiquement le nombre veut dire qu'il recèle la double puissance de généralisation et singularisation propre aux êtres numériques. Mais si ce double principe peut être représenté à partir des signes, il n'est pas « incarné » par eux, il ne s'identifie pas avec leur propre nature et existence. De ce point de vue, les signes sont des simples outils pour représenter des nombres, mais leur nature ne se trouve pas intimement déterminée par leur fonctionnement. C'est dans ce sens que les efforts de Boole vont plus loin dans l'incorporation des dimensions sémiotiques des nombres ; car pour autant que son système accepte des signes numériques, un signe comme « 2 », ou d'une autre manière « 0 » et « 1 », n'est rien d'autre que la marque des fonctionnements symboliques, dont découlent par ailleurs l'ensemble des propriétés logiques.

Traitée en tant que propriété sémiotique, la complexité logique du nombre aurait sans doute motivé chez Frege une approche différente à la question du signe dans son rapport à la logique et aux mathématiques. Il est d'ailleurs vraisemblable que, suivant cette direction, une telle réflexion aurait trouvé la série de dualités qui définissaient l'existence problématique des nombres au niveau des symboles dans l'œuvre singulière de Boole, car ces dualités ne manquent pas de se présenter au niveau logique où Frege situe ses analyses. Munie comme elle l'était de nouvelles ressources, la pensée frégéenne aurait pu apporter des solutions originales à ces difficultés. En retour, l'Expressionnisme logique aurait pu de cette manière emprunter d'autres chemins pour la recherche de sa consistance.

Mais il n'en fut rien. Méfiant à l'égard d'un signe réductible à une matérialité nue, bien que confiant dans la simplicité de la puissance significative dont il est capable lorsqu'il est chargé de supporter le sens de l'Arithmétique, Frege n'apprendra de la complexité et de la complication de ce qui s'y joue que par une commotion qu'il n'avait pas su anticiper. Lorsque son moment viendra de prendre parti entre la logique ou le langage, on ne s'étonnera pas que Frege crie : *l'espace*[493], c'est-à-dire, *ni l'une, ni l'autre*.

Inaperçue par Frege, la source de cette commotion n'est cependant pas externe. Elle provient de la complexité du fonctionnement, de la nature et même de l'être des signes, dont il a paradoxalement contribué à établir les ressorts. De cette complexité, la notion de *sens* est plus que le nom ; elle en est la reconnaissance, l'affirmation et le concept. Tout comme celle de référence en est peut-être l'abdication et la perte. Penser cette complexité et cette

---

[493] Comme nous l'avons dit, à la fin de sa vie Frege finira par chercher dans la Géométrie le fondement de l'Arithmétique. Cf. *supra* p. 433.

complication entre le signe et le nombre, élaborer une pensée qui prenne, contre les appréhensions et les injonctions de Frege lui-même, « le signe des nombres pour les nombres eux-mêmes » et inversement, sans qu'aucun des deux ne se voie pour autant réduit à l'autre, sans que ni l'un ni l'autre ne renonce à ce qui de tout temps le définit, voilà la tâche qui se dessine malgré tout si l'on veut prendre en charge le contenu en logique. Aussi, la possibilité d'une logique du sens, et des enjeux critiques qui se jouent dans les rapports intimes que celle-ci promet avec une ontologie renouvelée, reste-t-elle déterminée par cette condition double : rassembler les fragments d'une telle théorie du signe, dégagés des efforts dans cette phase initiale de formalisation du sens qui va de Boole à Frege, et les associer à une conception mathématique où le nombre – c'est-à-dire l'ensemble des propriétés mathématiques, ou arithmétiques, qui font qu'un nombre soit un nombre – ne se donne pas comme un objet premier et simple, mais reste déterminé par une structure générale qui n'écraserait néanmoins pas son existence singulière, et qui ne serait pas indifférente à sa constitution sémiotique. Autrement dit, il s'agit d'associer ces fragments d'une théorie du signe à ce qui depuis Gauss traverse comme dans une filigrane invisible les travaux de Boole et de Frege pour arriver jusqu'à Gödel.

On l'aura deviné, de cette dernière conception nous ne pouvons ici livrer que des fragments. C'est d'ailleurs tout ce qui nous reste à faire.

V.2. Sous le signe de Gauss

La tentative de mathématisation de la logique, et plus généralement, de formalisation du sens de Frege s'est révélée aboutir à une impasse. Mais selon le point de vue que nous avons avancé ici, une telle circonstance ne saurait être indépendante des pratiques mathématiques sur lesquelles chaque régime de formalisation du sens prend appui et trouve sa positivité. Est-ce à dire que l'approche fonctionnelle de l'Arithmétique est incapable de fournir des déterminations sémiotiques sur lesquelles asseoir une logique ? Autrement dit, la Théorie des fonctions qui se développe dans le Continent au XIX[e] siècle est-elle tout aussi inadéquate que l'Algèbre symbolique pour capturer le statut sémiotique des nombres capable de prendre en charge le contenu à l'intérieur d'une logique formalisée ? La mise en avant du principe de variation, avec l'instauration de l'axe original expression-contenu qu'il implique, et l'accroissement de la puissance expressive de la logique par rapport à celle des Booléens, montrent assez le contraire. Seulement, en négligeant en dernière instance l'importance de la question du signe comme tel, Frege détache les mécanismes sémiotiques associés à la fonction des problèmes qui ont motivé son émergence et son établissement dans le cadre des pratiques mathématiques de son époque. C'est donc le moment de nous tourner enfin vers ces problèmes au croisement de l'Analyse (ou plus précisément, de la Théorie analytique des fonctions) et de l'Arithmétique, dont nous avons jusqu'ici volontairement différé le traitement. C'est au niveau même de ces problèmes que nous pourrons trouver les fragments qui nous permettront de suggérer les ressorts intimes d'un Expressionnisme logique efficace et consistant pour accomplir la formalisation du sens. D'autant plus que les problèmes au croisement de ces disciplines ou pratiques ne sont pas étrangers à ceux de l'Algèbre qui agissaient à la base des déterminations de la logique de Boole.

V.2.1. Frege, entre Lagrange et Cauchy

En effet, on se souviendra que les travaux de Lagrange se trouvaient à l'origine du calcul d'opérations autour des idées duquel s'était développée l'Algèbre symbolique anglaise.

Par ailleurs, nombre de travaux mathématiques du jeune Boole s'appliquaient à reprendre des résultats de Lagrange et à les généraliser suivant la méthode symbolique nouvellement établie[494]. Or si Lagrange, par des méthodes dont il n'arrivait pas à accepter entièrement la légitimité, avait fourni l'occasion pour le développement d'un calcul d'opérations, l'essentiel de son travail est ouvertement dédié à l'étude des *fonctions*, avec laquelle il identifiait d'ailleurs l'Algèbre, suivant l'intention de proposer une conception générale de la notion de fonction qui la détache de son association originaire au Calcul infinitésimal[495]. De ce fait, Lagrange occupe une place privilégiée à l'origine du développement de la Théorie des fonctions du XIXe siècle. Sa vocation fondationnelle par rapport à l'espace entier des mathématiques ainsi que sa mise en avant de la notion de fonction dans une telle entreprise permettent donc de le rapprocher de Frege et de dessiner ainsi une certaine continuité des problèmes par laquelle l'œuvre frégéenne plongerait ses racines dans l'Analyse continentale du XIXe siècle. C'est notamment la thèse avancée par Marco Panza dans un article récent (2011). Cette idée est séduisante, surtout dans le but qui est celui de Panza de souligner les différences entre la logique frégéenne et une perspective ensembliste sur le problème des fondements des mathématiques. Son point de départ est d'ailleurs convaincant : le rejet de la part de Frege d'une conception de la fonction qui s'énonce dans des termes presque identiques à la définition lagrangienne de fonction[496]. C'est donc Lagrange qui serait directement visé par Frege dans l'élaboration de sa notion de fonction, se plaçant de cette manière dans la même tradition fondationnelle inaugurée par le célèbre mathématicien français, malgré les distances que Frege essaie de marquer par rapport à elle.

Disons-le tout de suite : en dépit de son caractère séduisant, il nous semble qu'une association directe du problème frégéen à celui de Lagrange n'est pas plausible, pour des raisons qui tiennent à la spécificité du problème de la formalisation du sens, tel que nous avons essayé de le définir au long des pages précédentes[497]. Plus précisément encore, la nature

---

[494] Voir *supra*, p. 193.

[495] Sur le projet analytique de Lagrange, on pourra consulter Ferraro et Panza (2012).

[496] En effet, Panza rapporte le rejet dans les *Grundgesetze* (Frege, 1893-1903/1966, p. 5), que nous avons examiné à partir de « Fonction et concept » (cf. *supra* p. 392), de la fonction comme simple « expression de calcul qui contient *x* » à la définition lagrangienne, donnée, entre autres, en ouverture de sa *Théorie des fonctions analytiques* : « On appelle fonction d'une ou de plusieurs quantités toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. » (Lagrange, 1881, p. 15).

[497] De ce point de vue, le traitement que Panza fait de la pensée frégéenne recèle quelques faiblesses. Volontairement restreint aux formulations des *Grungesetze*, Panza confond les différents axes selon lesquels se structure la conceptualité sémiologique frégéenne. Cela apparaît clairement dans un énoncé comme : « Les fonctions s'opposent aux objets. Ainsi, elles ne peuvent pas être des expressions » (Panza, 2011, p. 14). Comme nous l'avons suffisamment montré, les fonctions ne s'opposent pas directement aux objets, mais aux arguments, les objets aux concepts, et les expressions aux contenus (au demeurant, il ne s'agit pas d'opposition, mais des

strictement numérique ou arithmétique des fonctions envisagées par Frege, qui fait que son problème soit, comme nous l'avons suffisamment établi, plus une question de nombres et d'Arithmétique que de fonctions et d'Analyse, exclut en principe que sa logique soit rattachée de manière directe aux pratiques mathématiques de l'Analyse lagrangienne. Pourtant, la brève reconstitution réalisée par Panza du processus d'établissement de la Théorie analytique des fonctions, de Lagrange à Cauchy[498], nous donne l'occasion de localiser le point précis à l'intérieur de l'espace des pratiques mathématiques où s'enracinent non pas certes les solutions, mais de façon plus significative les problèmes et les moyens qui articulent l'Expressionnisme frégéen. Ce point précis est celui où le problème des fonctions rencontre celui des nombres.

Comme l'indique Panza, le programme de Lagrange est orienté vers l'idée d'inscrire le Calcul différentiel dans une Théorie générale des fonctions, référée souvent comme « Analyse algébrique », à partir de laquelle refonder l'ensemble des mathématiques. Ce faisant, l'Analyse algébrique s'oppose à l'Arithmétique et se définit même dans cette opposition. C'est ainsi que Lagrange affirme :

> À proprement parler, l'Algèbre n'est en général que la Théorie des fonctions. Dans l'Arithmétique, on cherche des nombres par des conditions données entre ces nombres et d'autres nombres ; et les nombres qu'on trouve satisfont à ces conditions sans conserver aucune trace des opérations qui ont servi à les former. Dans l'Algèbre, au contraire, les quantités qu'on cherche doivent être des fonctions des quantités données, c'est-à-dire, des expressions qui représentent les différentes opérations qu'il faut faire sur ces quantités pour obtenir les valeurs des quantités cherchées. (Lagrange, 1877, pp. 327-328)

Cette mise à l'écart des nombres spécifiques, au nom des opérations par lesquelles on peut les obtenir à partir d'une quantité donnée, c'est ce qui donne à l'Analyse algébrique sa pureté et sa généralité. Aux nombres sont ainsi substitués dans ce cadre des « quantités algébriques », censées les « représenter ». On sait à quel point cette conception inspira les algébristes anglais, qui reconnaissaient en Lagrange une source directe pour sa construction d'une Algèbre symbolique abstraite. Mais à la différence de l'évolution de l'Algèbre anglaise, qui poursuivra la voie d'une généralisation de la notion d'opération accompagnée d'une exclusion définitive du nombre, le programme de Lagrange subsume la notion d'opération

---

rapports de distinction et d'articulation différents à chaque fois). Et c'est précisément dans les croisements problématiques entre ces axes multiples que se joue le sens de la démarche frégéenne. Nous ne nions pas pour le reste l'existence d'un rapport indirect entre les problèmes de Lagrange et de Frege. C'est d'ailleurs un lien de ce type qu'il s'agit pour nous de préciser.

[498] Un traitement plus détaillé de cette question peut être trouvé dans l'article de Ferraro et Panza sur Lagrange déjà référé (2012). Dans ce qui suit, nous restituons les idées fondamentales mises en avant par Panza sans nous arrêter sur des références précises.

sous celle de *fonction*, considérée comme mathématiquement primitive. Une telle approche, selon laquelle les quantités algébriques sont déterminées par un certain nombre d'opérations articulées de façon fonctionnelle conduit assez naturellement à une généralisation de la notion de fonction, prenant la forme de « fonctions arbitraires ».

Bien que la généralisation de la notion de fonction puisse être vue comme entièrement analogue à celle d'opération sous l'Algèbre anglaise, la différence entre ces deux approches est de nature. Car si la notion généralisée d'opération implique la définition de règles opératoires quelconques pour chaque opérateur, les conditions pour qu'une fonction arbitraire soit une fonction tiennent à des exigences liées aux pratiques de l'Analyse (typiquement des conditions de différentiabilité et intégrabilité). D'autre part, et de façon plus fondamentale pour nous, là où les opérations se définissent à un niveau d'entière abstraction par rapport au domaine des quantités, suivant lequel elles pourraient être interprétées *a posteriori* si besoin, la fonction reste, selon la définition de Lagrange, *elle-même une quantité*. Qui plus est, l'essence de cette quantité qu'est la fonction est d'être *déterminée par d'autres quantités*. Comme le souligne Panza, « pour Lagrange, les fonctions sont à la fois des expressions contenant des quantités et des quantités » (2011, p. 4). C'est d'ailleurs dans ce rapport équivoque que les fonctions maintiennent avec les quantités que Panza voit l'une des raisons principales de l'échec de l'approche de Lagrange[499]. Mais de manière surprenante, l'échec de son programme, n'entraîne pas le succès de la conception concurrente, celle qui défend une notion de fonction absolument arbitraire, non restreinte par une notion de quantité. Une telle conception, représentée par les formulations d'Euler dans les *Institutiones*[500], est, ainsi que le suggère Panza, trop imprécise et inefficace pour informer de façon effective une approche fonctionnelle des mathématiques. Aussi, devant les impossibilités de l'Analyse algébrique de Lagrange, la Théorie générale des fonctions trouvera-t-elle les moyens de se développer sur des bases différentes dans le courant du XIX[e] siècle : celles établies par les travaux d'*Augustin Louis Cauchy*.

À la différence de l'œuvre de Lagrange, ainsi que des travaux des algébristes anglais qu'elle avait inspirés, Cauchy détache l'Analyse, en tant que Théorie des fonctions, des méthodes générales de l'Algèbre, et de ce fait, de sa prétention à totaliser l'espace des mathématiques. L'Analyse est pour Cauchy une discipline mathématique particulière à côté

---

[499] Panza (2011, pp. 5-6) : « Lagrange tacitly assigns to them some properties that do not depend on their being constituted by appropriate expressions: he attributes to them a linear order and some metric relations, and also supposes they comply with continuity conditions. This is essential for his reductionist program to succeed. But it also produces a discrepancy between the understanding of functions as expressions and their understanding as quantities. This is one of the reasons for this program failed, in the end. ».

[500] Le titre complet du traité d'Euleur est : *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*.

des autres, et dans son *Cours d'Analyse* son refus de l'association de ses méthodes à celles de l'Algèbre ne laisse aucun doute[501]. Cette récusation de l'Algèbre, réalisée au nom de la rigueur mathématique, marque l'ouverture de l'ouvrage et détermine le sens de l'approche à présenter. Ces deux traits suffisent pour placer la tradition de l'Analyse continentale au XIX^e^ siècle en opposition à celle des algébristes de Cambridge. D'autant plus que si la fustigation des méthodes algébriques par Cauchy peut se faire sur le terrain de la rigueur, c'est précisément en faisant appel à une certitude que *seules les quantités et plus encore les nombres peuvent offrir*[502]. De cette façon, la notion de fonction dans l'Analyse est précédée par et tributaire de celles de quantité et de nombre, et plus généralement de celle de grandeur. C'est en effet par l'introduction de ces notions que commence le *Cours*[503], et c'est d'elles que la notion de fonction va dépendre entièrement, une fois introduite celle de quantité variable[504].

L'approche par Cauchy de la Théorie des fonctions diffère de celle de Lagrange comme l'*arithmétisation de l'Analyse*, dont elle sert de point de départ, diffère de l'*algébrisation de l'Analyse*, qui sous l'inspiration lagrangienne finira par se développer selon des voies originales outre-Manche. C'est précisément par une association de l'entreprise fondationnelle de Frege à celle de Lagrange, au nom du caractère primitif de la notion de fonction pour l'un et l'autre, que Panza cherche à détacher la pensée frégéenne du programme d'arithmétisation de l'Analyse. Toutefois, un tel détachement méconnait la nature intrinsèquement numérique ou arithmétique des fonctions mathématiques qui déterminent la notion logique de fonction pour Frege, dont nous avons montré à la fois les raisons et les conséquences. À la suite de

---

501 Cauchy (1821, pp. ij-iij) : « Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce […] ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. ». Propos qui se trouve redoublé par cette injonction, bien plus éloquente : « Soyons donc persuadés qu'il existe des vérités autres que les vérités de l'algèbre, des réalités autres que les objets sensibles. Cultivons avec ardeur les sciences mathématiques, sans vouloir les étendre au-delà de leur domaine ; et n'allons pas nous imaginer qu'on puisse attaquer l'histoire avec des formules, ni donner pour sanction à la morale des théorèmes d'algèbre ou de calcul intégral. » (p. vij).

502 Cauchy (1821, p. iij) : « En déterminant ces conditions et ces valeurs [pour la subsistance des formules algébrique], et en fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaitre toute incertitude ; et alors les différentes formules ne présentent plus que des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier par la substitution des nombres aux quantités elles-mêmes. »

503 Cauchy (1821, pp. 1-2) : « Pour éviter toute espèce de confusion dans le langage et l'écriture algébriques, nous allons fixer dans ces préliminaires la valeur de plusieurs termes et de plusieurs notations que nous emprunterons soit à 1'algèbre ordinaire, soit à la trigonométrie. […] Nous allons indiquer d'abord quelle idée il nous paroît convenable d'attacher à ces deux mots, *nombre* et *quantité*. / Nous prendrons toujours la dénomination de *nombres* dans le sens ou on 1'emploie en arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs ; et nous appliquerons uniquement la dénomination de *quantités* aux quantités réelles positives ou négatives, c'est-à-dire, aux nombres précèdes des signes + ou −. ».

504 Cauchy (1821, pp. 21-22) : « Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, les valeurs de quelques-unes étant données, on puisse en conclure celles de toutes les autres, on conçoit ces diverses quantités exprimées au moyen de plusieurs d'entre elles, qui prennent alors le nom de *variables indépendantes* ; et les quantités restantes, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des fonctions de ces mêmes variables. ».

notre travail, il apparaît ainsi que dans cette confrontation entre Lagrange et Cauchy, Frege se place, à l'inverse de ce que Panza cherchait à soutenir, plus du côté de Cauchy que de Lagrange[505]. Toujours loin d'un cadre ensembliste, Frege est après tout bien plus proche de l'arithmétisation de l'Analyse que Panza ne le voudrait.

Cependant, Panza a raison de contester l'attachement rigide de Frege au programme canonique d'arithmétisation de l'Analyse, tel qu'il s'établit d'après les formulations de Weierstrass ; et sans doute l'approche fonctionnelle constitue ce qui anime une divergence par rapport à ce programme[506]. En effet, comme nous l'avons établi, si l'Expressionnisme frégéen est le responsable de la nouveauté radicale de son travail dans le contexte des projets fondationnels de la fin du XIX^e^ siècle, c'est bien l'approche fonctionnelle de l'Arithmétique comme langage qui l'organise et le soutient. Dans ce sens, il faudrait dire que Frege se place *entre Lagrange et Cauchy*. Ce qui veut dire de manière très précise : dans ce point d'articulation décisif constitué par l'œuvre royale du « Prince des Mathématiques », *Carl Friedrich Gauss.*

V.2.2. Entre Lagrange et Cauchy, Gauss

Il faut donc s'arrêter avant la cristallisation d'une Théorie générale des fonctions analytiques par Cauchy, dans ce point où la possibilité d'asseoir les fonctions *algébriques* sur des *quantités* devient *possible*. Car, si Cauchy peut faire appel à la certitude des nombres et des quantités pour fonder l'Analyse dans toute sa généralité, c'est dans la mesure où un problème primordial concernant la nature quantitative de certaines expressions dérivées de l'Algèbre a trouvé la voie de sa résolution. Nous parlons bien évidemment des expressions contenant « $\sqrt{-1}$ », et de la nature imaginaire ou complexe des nombres qu'elles sont éventuellement capables de déterminer. Cette distinction entre « imaginaire » et « complexe » concentre d'ailleurs toute la difficulté de la compréhension et de l'établissement de ces

---

505 Par ailleurs, les raisons données par Panza pour contester la place de Cauchy dans la pensée frégéenne sont faibles : Frege critique la définition de fonction de Czuber, tributaire de celle de Cauchy. Mais Frege ne la critique pas plus que la définition soi-disant lagrangienne. Au demeurant, aucune référence explicite au programme de Lagrange ne peut être trouvée dans l'œuvre de Frege, sauf peut-être la définition de fonction citée par Panza, qui constitue le point de départ de la notion dont il veut prendre ses distances. Cette prise de distance passe de manière explicite, d'ailleurs, par Dirichlet et Cauchy, comme nous l'avons déjà mentionné (cf. *supra* p. 382).

506 De ce point de vue, la tentative de Panza est, malgré ses inexactitudes, plus suggestive que celle de Tappenden (2006), qui lie Frege à la tradition riemannienne à partir d'une affinité purement épistémologique ou méthodologique. La discussion de Panza autour de la distinction des conceptions possibles de la fonction au XVIII^e^ siècle (comme quantité et comme expression), avancée par Youschkevitch (1976) nous semble, en vue des problèmes qui sont les nôtres, à tous égards essentielle.

expressions comme de véritables quantités numériques[507]. Un projet de refondation de l'Analyse n'aurait pas su prétendre à la généralité revendiquée par Cauchy s'il n'avait pas pu étendre l'approche fonctionnelle à ce vaste domaine de l'imaginaire. C'est pourquoi le sort de la Théorie analytique des fonctions au XIXe siècle se joua pour l'essentiel dans le terrain de la Théorie des fonctions d'une variable complexe[508]. Et de fait, comme l'indique Jourdain (1915, p. 6), les préjugés de Cauchy à l'égard des « imaginaires » auraient retardé le développement de la théorie. Que Cauchy puisse considérer les « expressions imaginaires » comme ayant une nature quantitative, même « complexe », est donc essentiel pour la proposition d'une approche non algébrique de l'Analyse, rendant disponible dans l'espace des mathématiques une notion consistante de *fonction* comme alternative à celle d'*opération* pour entreprendre une formalisation du sens.

Toute la difficulté d'une telle tâche réside dans ce que l'expression « $\sqrt{-1}$ » est d'origine éminemment algébrique, et l'absence de toute intuition (géométrique ou arithmétique) à son égard incite naturellement à la considérer comme une entité purement symbolique, vide de tout contenu (notamment, quantitatif), et dans ce sens, purement « imaginaire », suivant une orientation à laquelle les algébristes anglais donneront toute sa consistance. Or, l'articulation entre le problème algébrique exprimé par « $\sqrt{-1}$ » et des intuitions, ou plus profondément, des déterminations à la fois géométriques et arithmétiques, habilitant une réduction des imaginaires aux complexes, constitue précisément l'une des contributions les plus remarquables de l'œuvre de Gauss.

Les rapports entre les travaux de Gauss et ceux de Cauchy sont pourtant loin d'être évidents[509]. On sait que Gauss disposait avant Cauchy, du moins en partie, d'une Théorie des fonctions complexes, qu'il ne publia cependant pas[510]. Pour sa part, la façon dont Cauchy envisage la nature quantitative des expressions imaginaires dans son *Cours* ne témoigne pas d'un lien direct avec les perspectives de Gauss sur le sujet, dont certaines ne seront entièrement formulées, ou du moins publiées, que quelques années plus tard. Mais l'important

---

507 C'est l'un des angles d'attaque de la belle entreprise de Dhombres et Alvarez dans leur histoire du Théorème fondamental de l'Algèbre (2011; 2013). Ce travail, essentiel à tous égards, constitue l'inspiration des pages qui suivent.

508 Cf. Kline (1972, §27). Philippe Jourdain compte cette voie comme l'une des deux suivant lesquelles s'est développée la Théorie des fonctions, l'autre définie par les travaux de Fourier et de Dirichlet (Jourdain, 1915, p. 2).

509 Sur les rapports entre l'œuvre de Gauss et celle de Cauchy sur ce point, voir Jourdain (1915, p. 6), Kline (1972, §27), mais surtout Dhombres et Alvarez (2013, ch. 4), qui soulèvent la place d'Argand dans le rapport entre les deux mathématiciens.

510 Kline (1972, p. 631) : « There is no doubt, if one judges from the thinking exhibited in the three proofs [of the fundamental theory of algebra] and in other unpublished works […] that by 1815 Gauss was in full possession of the geometrical theory of complex numbers and functions, though he did say in a letter of 1825 that "the true metaphysics of $\sqrt{-1}$ is elusive." ».

pour nous c'est moins d'établir une dépendance directe entre ces mathématiciens continentaux, que d'identifier le point même où les questions de la fonction et de la quantité s'articulent de façon à la fois solide et problématique, rendant possible tout un faisceau de pratiques mathématiques nouvelles où prend racine l'Expressionnisme de Frege. Dans ce sens, il est possible d'affirmer que l'acceptation et le succès de l'approche de Cauchy dépend bien d'une stabilisation générale de la conception des grandeurs dans l'espace des mathématiques pour laquelle l'œuvre de Gauss a été capitale[511].

L'aspect le plus célèbre de la contribution de Gauss à la compréhension des complexes comme des grandeurs ou des nombres, est donné par la représentation des expressions contenant « $\sqrt{-1}$ »[512] *comme des points dans un plan géométrique*. Cette représentation géométrique des nombres complexes avait était déjà proposée par Wessel et Argand en 1798 et 1806 respectivement, mais leur formulation, d'une portée nettement plus restreinte, passa en grande partie inaperçue[513]. Comparée à ces tentatives, et à d'autres développements de l'Analyse continentale, la formulation explicite de Gauss est relativement tardive : Gauss l'introduit dans sa célèbre *Theoria Residuorum biquadraticum. Commentatio Secunda*, publiée en 1832[514]. Mais comme le suggère Bourbaki, ses travaux depuis la fin du XVIII[e] siècle ne sauraient se comprendre sans la présupposition d'une « identification pleinement consciente des points du plan et des nombres complexes » (1984, p. 201). La référence donnée par Bourbaki, où Gauss présente son idée à Bessel dans une lettre de 1811 essentiellement dans les mêmes termes que dans son travail de 1832 ne laisse aucun doute sur cette antécédence ainsi que sur l'enjeu quantitatif ou numérique associé à cette représentation géométrique :

> De même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se figurer (« *sinnlich machen* ») le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan infini, où chaque point, déterminé par son abscisse *a* et son ordonnée *b*, représente en même temps la quantité $a + bi$. Le passage continu d'une valeur de *x* à une autre se fait par conséquent suivant une ligne, et peut donc s'effectuer d'une infinité de manières (Gauss, cité dans Bourbaki, 1984, pp. 201-202)

---

[511] Au demeurant, Cauchy reprendra en 1845-47 l'identification des quantités complexes avec les points d'un plan formulée par Gauss en 1832 (Cf. Dhombres & Alvarez, 2013, p. 286, note 50 au ch. 4).

[512] C'est-à-dire des expressions du type « $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ » où « α » et « β » sont des nombres.

[513] Pourtant, comme l'indique Dhombres, Cauchy reprend l'idée d'Argand, sans adopter la représentation géométrique elle-même, pour l'utiliser comme méthode de découpage des calculs dans son *Cours* (Dhombres & Alvarez, 2013, p. 144).

[514] Cf. Gauss (1832, p. 109).

L'appel à la géométrie pour déterminer les expressions imaginaires de l'Analyse algébrique peut pourtant surprendre dans un moment où la dégéométrisation du calcul infinitésimal était une exigence massivement assumée des deux côtés de la Manche. Mais il faut comprendre que ce qui était brigué derrière cette compréhension géométrique des imaginaires, ce n'est pas l'attribution d'une simple intuition qui garantisse à ces entités leur légitimité, mais plus profondément une articulation plus complexe entre les déterminations de l'Algèbre et celles de l'Arithmétique. En effet, l'appel aux propriétés géométriques des complexes dans les premiers travaux de Gauss se faisait dans le contexte d'une démonstration des résultats algébriques, alors que l'introduction de la représentation géométrique dans le traité de 1832 a lieu dans le cadre d'une recherche de résultats arithmétiques. On peut ainsi pressentir à quel point, derrière cette compréhension géométrique des imaginaires se joue une ré-articulation complexe de l'ensemble de l'espace mathématique selon laquelle se construit une alternative à celle qui, de Woodhouse à Boole, se tramait en Angleterre sous la forme de l'Algèbre symbolique abstraite.

Ce point d'articulation dont Gauss est le nom, qui se place entre ces deux moments de la pensée et de la pratique mathématique de la fonction déterminées par les projets de Lagrange et de Cauchy, ce point précis, donc, *est celui dans lequel s'enracinent les problèmes qui animent le projet frégéen de formalisation du sens*. Non pas que les problèmes qui s'y définissent soient *analogues* à ceux que l'on peut dégager d'une étude de l'œuvre de Frege[515]. Ces problèmes *sont* les problèmes dans lesquels s'origine la préoccupation de Frege pour la question du nombre, ainsi que ses premières tentatives d'en comprendre les déterminations essentielles par des moyens fonctionnels avant la *Begriffsschrift.* Un simple regard jeté sur l'œuvre mathématique de Frege, avant qu'il ne se voue de manière exclusive à la logique en 1879, suffit à le montrer.

En effet, 1873 Frege présente sa thèse doctorale en mathématiques à l'Université de Göttingen, sous le titre : *Sur une représentation géométrique des figures [Gebilde]*

[515] L'appel ultime à l'une ou l'autre figure de l'analogie est malheureusement trop fréquent parmi les travaux qui ont cherché à rapporter la pensée frégéenne à ses conditions mathématiques, même et surtout lorsqu'ils cherchaient à critiquer (et avec raison) son attachement au programme canonique (c'est-à-dire, weierstrassien) de l'arithmétisation de l'Analyse. C'est notamment le cas du rapprochement cherché avec Lagrange par Panza (2011), avec Riemann par Tappenden (2006), avec Poncelet par Wilson (1992; 2010), avec la « théorie générale des fonctions » par Baker et Hacker (1984)… Il est par ailleurs étrange que la figure de Gauss soit constamment négligée, alors que les travaux mathématiques de Frege s'y rattachent de manière explicite. Wilson mérite sans doute une place à part par la rigueur de son approche. Mais son argument en dernière instance purement « méthodologique » (analogique) ne tire pas toutes les conséquences possibles à cet effet et déçoit les espoirs qu'il pouvait susciter. Sluga (1980, pp. 40-48) ne relève lui non plus qu'un rapport purement méthodologique entre ces travaux antérieurs à la *Begriffsschrift* et le reste de l'œuvre de Frege.

imaginaires dans le plan[516]. Sa dissertation s'ouvre directement sur le problème de l'intuition à donner aux « figures imaginaires », et la représentation géométrique (étayée par toutes les ressources de la Géométrie algébrique et de l'Analyse, et inspirée de la Géométrie projective[517]) est vue comme un moyen d'étendre au domaine imaginaire les propriétés solidement établies pour les nombres réels. Ainsi, malgré certaines divergences entre les réels et les complexes à propos des opérations et inférences possibles (concernant notamment l'absence d'un ordre total pour les complexes), Frege soutient que la grande conformité entre les deux justifie l'introduction de formes imaginaires en Géométrie (1873, p. 2). Selon les termes dans lesquels il résume son propos :

> Par une représentation géométrique des formes imaginaires dans le plan nous entendons […] un type de corrélation en vertu de laquelle chaque élément réel ou imaginaire du plan possède un élément réel intuitif lui correspondant. Le premier avantage à gagner en est un qui est commun à tous les cas où il y a une relation un-à-un entre deux domaines d'éléments : que l'on peut parvenir à de nouvelles vérités simplement en reportant des propositions connues. Mais il y a un autre avantage propre à ce cas : que les relations non intuitives entre des formes imaginaires sont remplacées par des relations intuitives. (Frege, 1873, p. 3)[518]

Ces propos s'inscrivent sans équivoque dans la voie ouverte par Gauss ; plus encore, la construction à laquelle Frege se vouera au cours de ces presque 70 pages ne peut être vue que comme une reprise directe de celle du célèbre mathématicien allemand. L'idée de base de Frege pour la construction de cette représentation est la suivante : un point imaginaire étant déterminé par deux nombres complexes (tout comme un point réel est déterminé dans un plan par deux nombres réels), et chaque nombre complexe étant déterminé à son tour comme un point réel (selon la représentation célèbre de Gauss), l'idée de Frege est donc de déterminer géométriquement un point imaginaire à partir de deux points (réels), eux-mêmes définis dans des plans respectifs. Le point imaginaire est ainsi déterminé par la ligne qui connecte un point défini sur un plan avec un autre point, défini sur un autre plan. De la même façon, une ligne imaginaire étant définie par deux points imaginaires, elle pourra être déterminée par une surface se dessinant entre les lignes qui représentent les points imaginaires. De cette façon, tout comme Gauss avait introduit une ligne supplémentaire (comme axe imaginaire) à la ligne réelle pour pouvoir représenter les nombres complexes, Frege introduit deux plans, qu'il

---

[516] En allemand: *Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene*, réproduit en anglais dans Frege (1984, pp. 1-55).

[517] Pour une excellente restitution des ressources de la Géométrie projective dont se sert Frege, voir Wilson (1992; 2010). On pourra aussi consulter Belna (2002).

[518] Nous traduisons ici de l'anglais, comme pour le reste des citations de ce texte.

appelle respectivement « plan du réel » et « plan de l'imaginaire », pour représenter des paires de nombres complexes, c'est-à-dire des « points imaginaires », et construire à partir d'eux, au moyen des fonctions pourvues par l'Analyse complexe, l'ensemble d'instruments nécessaires (courbes, lignes droites, distances, intersections, angles, cercles, tangentes…) pour bâtir une géométrie dans laquelle représenter des figures imaginaires.

La construction de Frege est très alambiquée et somme toute assez inefficace. Mais l'important de cette tentative pour nous est son inscription sans équivoque, tant par son inspiration que par ses instruments, dans le cadre problématique déterminé par Gauss. Et de fait, *Gauss est le seul mathématicien explicitement mentionné en tant que tel* par Frege dans son mémoire[519]. Cette évocation a d'ailleurs lieu à plusieurs reprises, au sujet à chaque fois de sa représentation géométrique des nombres complexes. Qui plus est, chacun de ces appels comporte une nature différente, ce qui témoigne de la véritable exploration que Frege réalise du cadre problématique défini par cette question. En effet, la représentation gaussienne des complexes vient d'abord contribuer à la détermination des propriétés à la l'intérieur de la construction de Frege. Mais d'une autre manière, elle inspire ensuite, dans sa version polaire, une généralisation de la notion d'angle dans le cadre de la géométrie imaginaire que Frege développe (p. 19). Enfin, et de façon plus significative, sa dissertation se clôt sur l'évocation de la possibilité de généraliser la représentation des nombres complexes de Gauss, puisque dans la géométrie imaginaire ainsi établie elle n'en apparaît que comme un cas particulier[520]. La dissertation de Frege se présente alors comme une généralisation imaginaire de la Géométrie, rendue possible par la célèbre représentation gaussienne, mais permettant en retour, par une généralisation projective de cette géométrie imaginaire[521], une généralisation de la représentation gaussienne elle-même. On comprend dès lors que si l'approche gaussienne des grandeurs et des nombres, impliquée dans sa représentation géométrique des nombres complexes, fournit explicitement l'inspiration et les instruments pour le début des recherches frégéennes, elle en anime également le but et les perspectives. Et c'est bien par rapport à elle, et non sans un certain dépit, que Frege mesure dans les dernières lignes de sa

---

[519] Le mathématicien allemand Julius Plücker l'est aussi, de manière plus indirecte, par une allusion à des « complexes linéaires de Plücker » (Frege, 1873, p. 47). Sur le rapport entre les travaux de Plücker en Géométrie projective et la dissertation de Frege voir Wilson (2010).

[520] Frege, (1873, p. 55) : « Il devrait enfin être remarqué que la représentation de Gauss des nombres complexes peut être généralisée. […] Chaque plan tracé à travers la ligne guide de la ligne droite imaginaire qui recoupe la surface fondamentale divise la surface fondamentale en deux parties, qui représentent les nombres complexes par une correspondance un-à-un. On peut voir que la représentation de Gauss est le cas spécial où la surface fondamentale se réduit au couple de plans *E* et *U* ».

[521] Frege, (1873, p. 55) : « La relation entre les deux méthodes de représentation [celle de Gauss et celle possible à partir de la proposition de Frege lui-même] correspond à la relation entre la géométrie euclidienne et une géométrie dans laquelle la ligne à l'infini avec les deux points circulaires est remplacée par une conique non dégénérée. ».

thèse les résultats obtenus : « Nous réussirions cependant difficilement à rendre notre manière générale de représenter les nombres complexes aussi féconde que celle de Gauss » (p. 55).

Un an après l'obtention de son Doctorat, Frege reçoit son Habilitation (*Venia docendi*) à la Faculté de Philosophie d'Iéna, avec une dissertation intitulée : *Méthodes de calcul basées sur une extension du concept de quantité* [522]. Le titre montre déjà que ce qui intéresse Frege est bien le problème du concept de quantité dans le cadre de son délicat élargissement, et les premières lignes de ce texte, reprenant les préoccupations de sa dissertation doctorale, confirment l'origine gaussienne de sa motivation :

> Lorsque l'on considère des nombres complexes et leur représentation géométrique, nous abandonnons le champ du concept originel de quantité, tel qu'il est contenu spécialement dans les quantités de la géométrie euclidienne, ses lignes, surfaces et volumes. […] L'introduction des quantités négatives a ébranlé cette conception, et les quantités imaginaires l'ont rendue complètement impossible. […] Le concept s'est ainsi progressivement libéré de l'intuition et s'est rendu indépendant. Ceci est relativement irréprochable, spécialement parce que le caractère intuitif précédent était au fond une simple apparence. Lignes droites bornées et plans enfermés par des courbes peuvent certainement être saisis intuitivement, mais ce qui est quantitatif à propos d'eux, ce qui est commun à des longueurs et des surfaces, échappe à notre intuition. (Frege, 1874, p. 56)[523]

Ce travail marque pourtant le début de l'originalité de l'approche frégéenne, ce qui s'annonce déjà dans la critique de l'intuition géométrique contenue dans ces lignes. La référence aux courbes et surfaces bornées témoigne d'ailleurs d'une prise en compte des formulations de Cauchy, qui ne sont pour autant pas davantage épargnées par cette critique. L'abandon de l'intuition géométrique entraîne l'abandon de l'intuition tout court[524], et confirme que ce qui intéressait Frege sous la représentation géométrique, c'est la notion de quantité, et plus précisément d'Arithmétique et de nombre. Mais le problème du nombre reste toujours posé dans le cadre d'une pensée de la fonction. Aussi, le but explicite de ces pages ne peut-il être plus éloquent, et pourrait d'ailleurs être considéré comme celui qui animera son travail jusqu'à la fin : la méthode proposée « devrait nous permettre de reconnaître les parties de l'arithmétique qui seraient couvertes par une théorie du concept de quantité en tant que liée aux fonctions » (1874, p. 58).

---

[522] En allemand : *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen*.

[523] Nous traditions également ce texte à partir de sa version anglaise.

[524] Frege (1874, pp. 56-57) : « Et il est clair qu'un concept aussi vaste et abstrait que le concept de quantité ne peut être une intuition. Il y a par conséquent une différence entre géométrie et arithmétique dans la manière dont leurs principes fondamentaux sont fondés. Les éléments de toutes les constructions géométriques sont des intuitions et la géométrie se réfère à l'intuition comme source de ses axiomes. Dans la mesure où l'objet de l'arithmétique ne possède pas un caractère intuitif, ses propositions fondamentales ne peuvent pas non plus dériver de l'intuition. »

L'originalité de la méthode présentée par Frege dans ce texte qui appartient à la préhistoire de son œuvre logique est bouleversante. Elle surprend d'autant plus qu'elle est restée profondément négligée par les spécialistes de son œuvre. On y trouve la proposition d'une approche fonctionnelle qui contient toute la puissance d'un expressionnisme formel avant qu'il ne devienne figuratif. On aura l'occasion de l'évoquer une dernière fois, même si de façon bien plus rapide et rudimentaire que ce texte ne le mérite. Ce qui importe pour le moment, c'est de constater à quel point l'émergence du problème frégéen puise de manière directe dans le complexe d'articulations mathématiques noué par Gauss.

V.2.3. Gauss, de l'Algèbre à l'Arithmétique supérieure

Si la représentation géométrique des nombres complexes n'intéressait Frege que pour l'articulation intime qu'elle permettait d'assurer entre une Théorie des fonctions et une notion de quantité et de nombre, celle-ci n'en était pas moins, comme nous l'avons déjà annoncé, la motivation profonde de Gauss. L'abandon de l'intuition géométrique de la part de Frege dans son mémoire d'Habilitation en 1874 n'a dès lors aucune raison d'entraîner un rejet de la perspective gaussienne, même si c'est peut-être de cette façon que Frege l'a vécu[525]. Cela expliquerait d'ailleurs qu'il se soit rapproché des préceptes d'une arithmétisation de l'Analyse dans des termes qui seraient plus ceux de Weierstrass[526], et, à travers ce rapprochement s'expliquerait aussi la dérive figurative de l'Expressionnisme qu'il commençait alors à mettre en œuvre. Quoi qu'il en soit des dérives frégéennes que nous avons déjà suffisamment analysées, il faut surtout retenir que cet Expressionnisme se trouve intimement animé par l'articulation des déterminations mathématiques (fonctionnelles et numériques) que nous avons identifiée sous le nom de Gauss. Mais en quoi cette articulation consiste-t-elle au juste ?

Il faut tout d'abord comprendre que le problème mathématique qui se joue derrière l'expression « $\sqrt{-1}$ » n'est pas celui, restreint et après tout insignifiant sans des déterminations supplémentaires, de la solution de l'équation $x^2 = -1$ et du caractère quantitatif ou numérique d'une telle solution. Loin de se réduire à un seul aspect, une multiplicité de problèmes sont en jeu derrière la question des complexes et des imaginaires

---

[525] Sur la prééminence de l'Arithmétique sur la Géométrie chez Gauss voir Boniface (2007, p. 328).

[526] Sur les différents types ou « styles » d'arithmétisation, voir Petri et Schappacher (2007).

dans les mathématiques du XVII^e et du XVIII^e siècles[527]. Or, d'une manière ou d'une autre, tous ces problèmes se rapportent et se confrontent à la question d'une solution générale pour toute équation algébrique, c'est-à-dire pour toute expression de calcul comportant (dans le cas le plus simple) une inconnue déterminée par les opérations algébriques de base (addition, multiplication, exponentiation). Si, comme cela se dégageait du projet de Lagrange, les fonctions algébriques sont censées être des « quantités algébriques », force est bien de disposer d'un moyen général d'assurer la résolution en quantité de toute expression algébrique. Ou d'assurer, dans d'autres termes, que pour toute expression (équation) algébrique il existe au moins une solution.

C'est ce qu'établit le *Théorème fondamental de l'Algèbre*. En langage courant, ce théorème énonce de façon générale qu'*un polynôme non constant possède au moins une racine* ; c'est-à-dire qu'il existe un nombre qui, considéré comme valeur de la variable du polynôme, rend ce polynôme égal à 0. Si la question des nombres complexes est intimement liée à l'établissement de ce résultat, c'est parce que cet énoncé n'est vrai dans sa généralité que lorsque par « racine » on entend « racine complexe », et même lorsque les coefficients des polynômes envisagés sont eux-mêmes complexes. Mais il ne faut pas croire que l'établissement de ce théorème a consisté simplement à constater l'existence d'une solution complexe pour chaque expression algébrique, comme lorsque l'on cherche pour une équation la solution que l'on sait existante. L'évolution des recherches autour du problème aboutissant à la démonstration de ce théorème a impliqué un travail ardu et minutieux de *définition corrélative de ce qu'il fallait comprendre à la fois par « expression algébrique » et par « nombre complexe »*[528].

Disons-le tout de suite : Gauss est crédité d'avoir donné la première démonstration rigoureuse de ce théorème où s'articulent de façon essentielle les déterminations algébriques et quantitatives. De façon significative, sa première démonstration fait appel à des propriétés géométriques, et plus précisément topologiques. Mais Gauss a donné quatre démonstrations de ce théorème. Que Gauss ait démontré pour la première fois de façon rigoureuse ce résultat témoigne déjà de l'articulation des domaines que nous affirmions s'opérer dans son œuvre, et dont héritera l'Expressionnisme frégéen. Mais l'évolution de ces démonstrations met en relief un aspect fondamental de cette articulation qui se trouve au cœur

[527] Sur cette question on pourra consulter le premier volume de l'ouvrage de Dhombres et Alvarez (2011).

[528] L'exposition qui va suivre s'appuie principalement sur les deux volumes de Dhombres et Alvarez (2011; 2013), en plus des références courantes en histoire des mathématiques (Kline, 1972; Bourbaki, 1984; Dahan-Dalmedico & Peiffer, 1986). Les deux volumes de Dhombres et Alvarez comportent d'ailleurs l'ensemble d'outils nécessaires pour comprendre les aspects techniques du théorème, auxquels nous renvoyons dans le cas où nous ne le donnerions pas nous-mêmes.

de l'Expressionnisme tel qu'il ressort de notre recherche. Cet aspect touchant à l'essence de l'Arithmétique, se trouve intimement lié, sans s'y réduire, à l'établissement des complexes comme un domaine quantitatif consistant[529], autrement dit au problème même qui motive le début des recherches du jeune Frege. Mais pour saisir ce qui s'y joue pour notre recherche, il faut d'abord comprendre quelques aspects essentiels du problème qui motive le Théorème fondamental de l'Algèbre et qui ne sont pas immédiatement perceptibles dans les termes de son énoncé courant, tel que nous l'avons donné. Notamment, ceux qui concernent la structuration des expressions algébriques par rapport à laquelle se décide celle des nombres complexes venant les résoudre en général.

L'énoncé du théorème porte sur des « polynômes », en tant que structure générale à laquelle l'écriture de toute équation algébrique peut être ramenée. Cette structure se présente comme une somme de termes, ou « monômes », de la forme

$$a_k x^n$$

où « a_k » exprime un coefficient, « x » la variable (ou « inconnue »), et « n » une puissance entière définissant le « degré » du monôme (le degré d'un polynôme étant à son tour défini par le plus haut degré de ses monômes). Si bien que toute expression algébrique[530] peut être ramenée *de manière unique* (pour $a_n = 1$) à la forme[531] :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

Mais la structure générale du polynôme, si naturelle à nos yeux, est elle-même le résultat d'un processus non trivial de sémiotisation des déterminations algébriques, motivé par la recherche d'une solution générale pour les équations en question. Le début de ce processus peut être identifié dans les travaux de Descartes, notamment dans le cadre de sa « méthode des indéterminées », où ce que nous appelons aujourd'hui polynôme est appelé par Descartes « écriture ordonnée par puissances décroissantes » de la « somme d'une équation »[532].

Par rapport à cet ordre ou structure par laquelle les équations trouvent une expression unique, Descartes énonce dans sa *Géométrie*, sans fournir aucune preuve, un rapport entre le degré du polynôme – qu'il appelle « dimension » – et le nombre de racines qu'il peut accepter :

---

[529] C'est d'ailleurs Gauss qui introduit le vocabulaire de « nombre complexe ». Cf. Dhombres et Alvarez (2011, p. 208).

[530] Nous nous limitons bien évidement à des expressions ne comportant qu'une seule variable.

[531] Pour une définition didactique des aspects élémentaires du polynôme en vue du Théorème fondamental, voir Dhombres et Alvarez (2011, p. 3).

[532] En effet, comme l'indiquent Dhombres et Alvarez, c'est à cette « méthode des indéterminées » proposée par Descartes qu'est directement associée la première considération du polynôme à une variable comme « un objet formel général à partir des coefficients » (2011, p. XXI). Notamment, c'est dans le cadre de cette méthode qu'est postulée l'unicité de l'écriture polynomiale par puissances décroissantes. Pour cette histoire du polynôme, voir (2011, ch. 1-2).

> Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité. (Descartes, 1637/1964, p. 444)

Presque aussitôt, ces mêmes racines sont associées à une propriété des expressions polynomiales, à savoir la capacité de ces dernières d'être factorisées, selon un principe remarquable qui établit que si α est une racine d'un certain polynôme $P(x)$ de degré $n > 1$, alors celui-ci peut être factorisé par $(x - \alpha)$, de telle sorte que

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x),$$

où $Q(x)$ est un polynôme de degré $n - 1$. On voit immédiatement que lorsque le degré du polynôme $Q(x)$ est lui-même plus grand que 1, le même principe peut lui être appliqué, ce qui permet de poursuivre la factorisation de $P(x)$ (toute racine de $Q(x)$ étant par ailleurs racine de $P(x)$). À supposer que l'on puisse trouver toutes les racines de $P(x)$ (où ce qui revient au même, les racines des polynômes quotients $Q(x)$ successifs), se dessine ainsi la possibilité d'établir *une égalité entre l'expression du polynôme comme somme des termes de type* $a_k x^n$ *et une autre dans laquelle il apparaît comme produit de facteurs de la forme* $(x - \alpha_k)$ (où les α_k seraient les racines de $P(x)$). De surcroît, puisque chaque racine permet la factorisation d'un polynôme $Q(x)$ de degré $n - 1$, il ne saurait pas y avoir un nombre de racines supérieur au degré du polynôme $P(x)$, *ce qui confirme le rapport entre degré et nombre de racines* énoncé par Descartes (bien que Descartes ne raisonne pas de cette manière).

Pourtant, un problème évident se pose dans ce processus de factorisation successive, à savoir les cas où un polynôme n'accepte pas de racines, ou pour le dire en termes un peu moins troublants étant donné que le Théorème fondamental de l'Algèbre a déjà été énoncé, le cas où une équation algébrique n'a pas de solutions. C'est notamment le cas des équations dont la résolution oblige à calculer la racine carrée d'un nombre négatif[533], comme par exemple $x^2 + 1 = 0$. Or si le rapport énoncé par Descartes entre le degré du polynôme et le nombre de racines incite à considérer l'équivalence entre les deux types d'expression (additive et multiplicative) en dépit de cette limite imposée par l'impossibilité de résolution de certaines équations, une remarque introduite par Descartes quelques pages plus loin va fournir de manière inattendue, et malgré Descartes sans doute, la raison, l'orientation ou le prétexte, d'une recherche où cette équivalence sera envisagée en elle-même et pour elle-même. En effet, parlant toujours de ce que nous reconnaissons comme des polynômes, Descartes affirme :

[533] Et de manière générale, c'est le cas des polynômes de second degré dont le discriminant est inférieur à 0, auquel tous les autres cas peuvent être ramenés. Mais une fois de plus, cette réduction fait partie de l'évolution du problème.

> Au reste, tant les vraies racines que les fausses [c'est-à-dire, les positives et les négatives] ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine. (Descartes, 1637/1964, pp. 453-454)

Alors que le nombre de racines positives ou négatives d'un polynôme peut s'avérer plus petit que son degré, Descartes invite, avec cette postulation de l'existence de racines purement *imaginaires*, en face desquelles les autres apparaissent comme *réelles*, à combler ce manque d'autant de racines qu'il en faudrait pour attendre le nombre maximal de racines possibles selon le degré. Et c'est bien cela que Descartes fait à chaque fois qu'une telle situation se présente[534], de telle sorte qu'il établit de fait *une égalité stricte entre le degré du polynôme et le nombre de ses racines*.

Si Descartes postule l'existence des imaginaires, c'est sans doute pour s'assurer de la généralité de sa méthode[535]. Mais ce faisant, il ne peut pas empêcher que cette égalité vienne rencontrer le principe de factorisation des polynômes qu'il avait déjà établi pour les racines réelles, suggérant ainsi un principe de factorisation *totale* au moyen de l'ensemble de racines existantes (réelles ou imaginaires). Ce n'est certainement pas de cette façon que Descartes pose ou veut poser le problème ; pour une raison au moins, les racines imaginaires, en tant que quantités impossibles, ne sauraient pour lui être douées des propriétés quantitatives ou opératoires nécessaires à la factorisation. Elles ne sauraient guère être douées des propriétés tout court, d'ailleurs, car comme l'indiquent Dhombres et Alvarez, Descartes ne pense les imaginaires que pour mieux les exclure. Mais l'important c'est qu'en ouvrant l'espace entièrement indéterminé (si ce n'était par leur nombre) des imaginaires, la question se pose de la possibilité générale pour tout polynôme d'être factorisé en facteurs simples. Ce qui implique de manière plus significative, d'établir une *égalité ou équivalence générale entre deux types d'écriture* : d'une part, l'écriture de l'ensemble d'éléments d'une équation sous la forme d'un polynôme unitaire[536] de degré $n \geq 1$, et donc d'une somme de termes de type

---

[534] Ainsi, par exemple, par rapport à l'équation sans racines réelles $x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0$, qu'il factorise en deux expressions de deuxième degré $x^2 - 4x + 5$ et $x^2 + 4x + 7$, Descarte affirme : « Et pourcequ'on ne trouve aucune racine, ni vraie ni fausse, en ces deux dernières équations, on connoît de là que les quatre de l'équation dont elles procèdent sont imaginaires, et que le problème pour lequel on l'a trouvée est plan de sa nature, mais qu'il ne sauroit en aucune façon être construit, à cause que les quantités données ne peuvent se joindre. » (1637/1964, p. 461).

[535] Descartes (1637/1964, p. 467) : « Et enfin si ce cercle ne coupe ni ne touche la parabole en aucun point, cela témoigne qu'il n'y a aucune racine ni vraie ni fausse en l'équation, et qu'elles sont toutes imaginaires. En sorte que cette règle est la plus générale et la plus accomplie qu'il soit possible de souhaiter. »

[536] Unitaire, c'est-à-dire dont le coefficient du terme de degré plus élevé est égal à 1, ce qui est toujours possible en divisant tout polynôme non unitaire par l'inverse du coefficient de son terme de degré le plus élevé. Autrement dit, un polynôme de la forme :

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0.$$

$a_k x^n$; de l'autre, l'écriture de cette même équation comme produit de binômes unitaires de premier degré, c'est-à-dire comme produit de facteurs de la forme $(x - \alpha_k)$. Plus concrètement :

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n);$$

ou encore, en accentuant la dualité entre une écriture *additive* et une écriture *multiplicative* :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = \prod_{k=0}^{n} (x - \alpha_k)\,,$$

(où les α_k dans les expressions à droite du signe égal sont les racines de l'expression à gauche)[537].

Associer l'imaginaire indéterminé aux déterminations à la fois opératoires et quantitatives des α_k, voilà l'une des tâches fondamentales qui se dessine derrière le problème mathématique d'une expression comme « $\sqrt{-1}$ ». Non sans impliquer pourtant toute une subtile série d'articulations concernant le degré d'un polynôme, le nombre de ses racines et celui des facteurs simples qu'il est susceptible d'admettre. Tout cela dans le cadre général suggéré par une équivalence d'écriture transformant de manière non triviale addition et multiplication et inversement. *Si une notion de quantité est à établir au cœur d'une approche fonctionnelle déterminée par les opérations algébriques, c'est dans l'articulation hautement problématique de l'ensemble de ces éléments qu'elle doit avoir lieu.*

Que l'on dispose aujourd'hui du Théorème fondamental de l'Algèbre veut dire que cette articulation a été accomplie[538]. Qu'après de multiples tentatives insuffisantes, dont celle de Lagrange lui-même, ce soit Gauss qui ait donné non une mais plusieurs preuves rigoureuses, cela constitue sans doute un signe de ce que, à travers lui, l'Expressionnisme frégéen trouve sa source et ses conditions dans le champ inédit ouvert par lui où se joue ce que le XIX^e^ pourra penser sous le terme de « quantité ».

Il faut même aller plus loin. Car comme nous l'avons annoncé au long de notre recherche, c'est grâce à l'articulation problématique de l'ensemble bigarré de ces déterminations qu'un principe de contenu pourra résister de manière consistante à l'intérieur de la logique de Boole. En effet, à travers notre analyse de l'œuvre de Boole dans la troisième partie de ce travail, nous avons mis en lumière un certain nombre d'écueils ou de difficultés

C'est sur ces polynômes que l'unicité d'écriture est assurée.

537 Au demeurant, les racines α_k dans l'expression de droite ne sont pas sans rapport avec les coefficients a_k dans celle de droite. Sur ces relations, empruntées à Viète, s'appuie la méthode cartésienne des indéterminés. Elles déterminent les *fonctions symétriques élémentaires*, appelées à avoir sa place dans l'histoire du Théorème fondamental de l'Algèbre, mais fondamentalement, dans la Théorie de groupes de Galois, qui suivant l'une des voies ouvertes par les travaux de Gauss, offrira au XIXe siècle un nouveau cadre général pour l'Algèbre.

538 En effet, il suffit de revenir à l'énoncé que nous en avons donné pour comprendre que l'équivalence entre les deux écritures en question est assurée.

que les développements sémiotiques de Boole en vue de l'établissement d'une logique éprouvaient concernant leur consistance ou leur accord avec les principes mathématiques établis[539]. On peut voir comment les déterminations que nous venons de survoler s'y rattachent déjà. À commencer par ce principe fondamental autour duquel tourne l'ensemble de la logique booléenne, à savoir $x^2 = x$. Si ce principe est, par exemple, capable de contenir dans le système de Boole le principe logique capital de la non contradiction, c'est dans la mesure où, au moyen d'un nombre restreint d'opérations simples, cette expression peut être transformée en « $x(1-x) = 0$ », dont le sens logique dans le système de Boole est celui de l'inexistence d'une classe déterminée par la classe de *x* et celle de sa négation. Boole ne cache pas le sens mathématique des lois qui permettent ce passage, bien au contraire. Or c'est dans d'une Algèbre des polynômes que de telles opérations reçoivent tout leur sens. De la même manière, c'est bien par les questions évoquées dans ces dernières pages que l'adoption de la loi booléenne justifie le principe du tiers-exclu, ou dans les termes de Boole, le caractère dichotomique de la pensée. Puisque comme Boole le remarquait lui-même, la loi fondamentale de la pensée est exprimée par une équation de second degré, qui se laisse factoriser en deux termes, dont son système assure encore le sens logique[540]. Qui plus est, la justification pour l'introduction dans son système des signes numériques « 1 » et « 0 » est celle d'être les seuls nombres qui satisfont à l'équation en question ; c'est donc bien en tant que racines de cette équation que 1 et 0 sont admis comme des constantes logiques, et qui pourront recevoir le sens d' « Univers » et de « Rien ». Sans doute Boole voit-il un lien entre la nature dichotomique de sa logique et une logique de l'Univers et du Rien. C'est sur un tel lien que s'appuie sa proposition timide d'une « Algèbre duale ». Mais faute d'un lien formel et intrinsèque entre la dichotomie et ces deux constantes numériques (qui n'est autre que celui entre la factorisation d'une équation et le nombre de ses racines, déterminés tous les deux par le degré de l'équation), Boole fait appel à une justification purement spéculative et son Algèbre Duale reste ainsi contingente. Le double nom par lequel Boole renvoie à cette structure (tantôt comme « Arithmétique de 0 et 1 », tantôt comme « Algèbre à deux valeurs ») témoignait, comme nous l'avons souligné, du cœur du problème. Pour donner solidité à cette structure, Boole aurait dû saisir ce qui est de nature essentiellement arithmétique au milieu de toutes ces lourdes déterminations algébriques, ainsi que ce qu'il y a d'algébrique dans les nombres 1 et 0 en tant que racines d'une équation. La compréhension de cette solidarité aurait jeté, plus profondément, quelque lumière entre les termes logiques déterminés par la loi

---

[539] Cf. *supra* III.3.1 et III.3.2.

[540] On se souviendra que Boole considère à cette occasion des équations de troisième degré, dont la décomposition en trois facteurs est vue comme imposant une logique trichotomique.

logique fondamentale $x^2 = x$ et les signes numériques présents dans son système comme conséquence du fait que $x + x = 2x$. Nous l'avons souligné : le lien interne entre les signes « 0 » et « 1 » en tant que valeurs numériques satisfaisant l'équation $x^2 - x = 0$ et les signes « 0 » et « 1 » en tant qu'éléments d'une Algèbre ou Arithmétique duale est demeuré constamment absent dans l'œuvre de Boole. Or il est aisé de voir que le Théorème fondamental de l'Algèbre est le résultat qui, dans les mathématiques, établit de façon précise le lien entre ces propriétés multiples, qui sont mathématiques tout autant que sémiotiques. L'incorporation de ce qui s'y joue en termes sémiotiques pour une réflexion logique qui chercherait non pas à le démontrer mais à s'y appuyer pourrait sans doute ouvrir de perspectives nouvelles.

De ce point de vue, on se souviendra que les signes numériques dans le système de Boole étaient marqués d'une profonde ambiguïté, provenant de la double régulation de la répétition, qui déterminait deux principes hétérogènes de différenciation : un principe de différenciation numérique exprimé sous la forme « nx », et un principe de différenciation conceptuelle s'exprimant comme « x^n ». L'incapacité de réduire cette ambiguïté et les contradictions auxquelles elle donnait lieu ont sans doute été l'une de causes principales de l'abandon de cette approche singulière de Boole au profit de celle de ses successeurs. Plus précisément, l'un des aspects fondamentaux de l'inconsistance de son système était donné par le fait que les signes numériques à la place de ces deux usages de « *n* » ne savaient pas trouver le principe de leur accord, ce qui revenait à dire qu'un sens ne pouvait pas être donné *en général* à une égalité du type $x^n = nx$. Or, en trouvant toujours un « *x* » pour lequel cette expression, prise comme équation algébrique, a un sens, le théorème fondamental donne un principe formel pour cette commune mesure. La mise en jeu des propriétés de l'Arithmétique dans le cadre de ce théorème (effectuée, comme nous le verrons, par Gauss) offrira d'ailleurs les instruments pour donner un sens aux expressions aberrantes auxquelles cette situation donnait lieu, tels que « $3 = 9$ ». De façon plus générale, enfin, l'ensemble de ces effets d'inconsistance étaient animés par une hétérogénéité non résolue entre l'opération d'addition et celle de multiplication. Nous avons montré à quel point cette hétérogénéité était délibérée chez Boole, s'attachant en dernière instance à une intention de faire exister à l'intérieur de son système un double principe de contenu (objectal et conceptuel). La résolution triviale de cette hétérogénéité par l'adoption de l'idempotence pour l'addition proposée par Jevons ne pouvait donc pas constituer pour Boole une voie acceptable. Pourtant, sans un autre moyen de résoudre cette disparité, la dualité non triviale entre l'addition et la multiplication, dans laquelle se jouait l'accord entre les deux principes de contenu, réclamait d'être abandonnée. Et avec elle, les principes de contenu tout court. L'équivalence générale entre une écriture additive et une écriture multiplicative qui sert de cadre sémiotique au Théorème fondamental de l'Algèbre procure, si on la regarde d'un point de vue sémiotique, des déterminations précises pour donner forme à cette dualité sémiotique primordiale avec des instruments nouveaux.

Certes, ce ne sont là que des fragments dont on ne peut tout au plus que pressentir la pertinence. Nous les disposons d'ailleurs dans un sens qui va du plus avéré jusqu'au plus incertain. En effet, si la dichotomie logique est explicitement une conséquence de la factorisation polynomiale, il n'y a pas de manière immédiatement évidente, par exemple, de rapporter formellement l'une à l'autre la dualité entre addition et multiplication telle qu'elle résulte du Théorème fondamental de l'Algèbre et celle de la logique non booléenne de Boole pour montrer qu'elles relèvent du *même* problème. Ce lien est pourtant bien présent au niveau des *écritures* respectives. Et il ne faut pas oublier que les projets de formalisation du sens au XIXe siècle dont les logiques formelles sont le résultat n'ont au fond jamais consisté en rien d'autre que dans l'élaboration rigoureuse de ces liens somme toute improbables. Autrement dit, si la logique s'est vue mathématisée, cela n'a aucunement été par un processus simple de modélisation mathématique des propriétés logiques bien établies par ailleurs, mais par un travail minutieux de sémiotisation appuyé sur ce que nous avons appelé des *synthèses mathématiques*. Dans ce sens, ce que la disposition de ces fragments montre déjà comme en surface, c'est que les problèmes résultant de la volonté de préserver un principe de contenu dans le cadre d'une logique symbolique qui associe ses déterminations à celles des mathématiques (et à celles de l'Algèbre plus précisément) trouvent dans le cadre des synthèses de l'Analyse continentale, telles qu'elles se nouent de façon privilégiée dans l'œuvre de Gauss, les moyens de se *penser*. Si bien que dans l'espace de ces synthèses, la volonté de contenu de la logique de Boole rejoint celle de la logique du contenu qui préoccupe Frege, malgré la différence de l'approche sémiotique dont ces deux logiques résultent.

Si les deux tentatives pour faire consister des principes de contenu à l'intérieur d'une logique formelle finissent par échouer, c'est moins à cause du caractère infondé du nouage entre la notion de contenu et la nature sémiotique du nombre que de la complexité de cette nature. C'est précisément de cette complexité qu'il est question dans les problèmes de l'Analyse continentale que nous soulevons ici. Qu'elle concerne le nombre dans sa nature *sémiotique*, cela se laisse voir à travers le fait que l'écriture des nombres telle que nous la connaissons, et, plus important, telle que ces auteurs l'ont connue et pratiquée, recèle une structure polynomiale presque comme sa grammaire. En effet, loin de pouvoir être considéré comme un signe simple, un chiffre comme « 173527 » est bien *articulé* selon une forme qui se laisse capturer comme :

$$1 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

C’est dire qu’en fixant dans une expression polynomiale une valeur pour la variable, on dispose d’une structure où les coefficients déterminent l’écriture d’un nombre selon un principe positionnel qui n’est autre que celui des chiffres arabes. Cette structure à double face qui détermine l’*expression* d’un nombre soit en fixant les coefficients et en faisant varier la variable, soit en fixant une valeur pour la variable tout en faisant varier les coefficients, ne détermine pas moins son *contenu*. On pouvait la pressentir derrière les embarras de Babbage lorsqu’il se voyait contraint d’accepter l’existence de deux types de symboles abstraits[541]. Et après tout c’est bien une version non toujours restreinte de ce fonctionnement de double variation que Frege cherche à exprimer au moyen de sa notion de fonction. Or, même lorsque la fonction de Frege commencera à recevoir des limitations provenant d’une source étrangère à cet expressionnisme fonctionnel, et loin déjà des époques où ses problèmes trouvaient dans l’espace de cette Analyse ses références explicites, on a pu voir comment les synthèses appartenant à cet espace continuaient à agir en silence aux moments déterminants de son architecture. Comme, par exemple, lorsque l’identité des parcours de valeurs, sur lequel s’appuyait leur fameux caractère objectal, était assurée par la vérité d’expressions comme « $4x^2 - 4x = x(x-4)$ »[542]. Enfin, c’est encore cette complexité que l’on retrouve, poussée jusqu’à la contradiction, dans les résultats de Gödel. Nous n’aurons le temps que de le suggérer. Mais, avant de le faire, nous devons encore disposer quelques fragments de cette archéologie à partir de l’œuvre de Gauss, car c’est lui qui a donné la mesure de cette complexité dans laquelle le nombre se *détermine*.

V.2.4. Gauss et la mesure de la complexité du nombre

On l’a déjà dit : qu’il existe aujourd’hui et depuis longtemps un Théorème fondamental de l’Algèbre veut dire que l’articulation entre les différentes régions de la pratique mathématique où se disposent tous ces fragments quelque peu éclatés des conditions formelles d’une logique du contenu a bien eu lieu. Cela a supposé de remplir la brèche ouverte entre les quantités réelles et les imaginaires, et nous savons déjà que cette question a été résolue par la voie d’une réduction des imaginaires aux complexes opérée de façon définitive par Gauss. C’est pourquoi il nous semble que l’essentiel de cette articulation opérée par Gauss peut être vu à travers le prisme de sa démonstration de ce théorème, et notamment

---

[541] Cf. *supra* p. 169.

[542] Cf. Frege (1891, pp. 85-87), et *supra* p. 425.

de l'évolution entre sa première démonstration datant de 1799 et la seconde, de 1815, mettant en jeu les différents aspects de cette articulation qui ne s'y réduit pourtant pas.

Si, dans ses démonstrations du Théorème fondamental de l'Algèbre (que Gauss n'a d'ailleurs jamais appelé de cette façon), la réduction des imaginaires aux complexes constitue un but explicite, les choses sont beaucoup moins claires quant à l'association des complexes aux quantités réelles. Et cela malgré le fait que Gauss ait très tôt manifesté qu'il était parfaitement disposé à considérer les premiers au même titre que les seconds[543]. Ainsi, dans une note de sa première démonstration, Gauss rejette explicitement des imaginaires pour ainsi dire « purs » (du type $a\sqrt{-1}$), alors qu'il accepte les imaginaires complexes de la forme $a + b\sqrt{-1}$ comme des grandeurs possibles :

> S'il faut effectivement garder les grandeurs imaginaires en Analyse (ce qui pour de multiples raisons qu'il faudrait certes exposer longuement apparaît plus juste que de les rejeter), il faut alors les considérer de façon nécessaire comme autant possibles que les grandeurs réelles ; c'est pourquoi je souhaite englober sous la même dénomination de grandeurs possibles aussi bien les réelles que les imaginaires. (Gauss, 1799, p. 114, note)

Sans s'étendre sur les raisons de cette acceptation possible, il repousse son analyse détaillée pour une autre occasion. Une chose est pourtant claire, cette acceptation n'est ni automatique, ni évidente. C'est pourquoi si Gauss montre que des valeurs pouvant être ramenées à la forme « $a + b\sqrt{-1}$ » suffisent en général pour annuler un polynôme de degré quelconque, et donc qu'il n'y a rien d'imaginaire en dehors des valeurs de cette forme (qu'il n'y a pas de quantité imaginaire *impossible*), il se garde pourtant bien de considérer cette forme elle-même comme une quantité simple définissant une racine, et encore plus d'envisager des coefficients de cette forme pour les polynômes. Aussi, la propriété qu'il cherche à démontrer est-elle, comme l'indique le titre de sa dissertation de 1799[544], celle selon laquelle un polynôme *réel* se laisse décomposer en facteurs *réels* de premier ou de *second degré*. On comprend que Gauss considère comme *irréductibles* certains facteurs de second

---

[543] En effet, dans la même lettre de 1811 à Bessel citée par Bourbaki plus haut, Gauss affirme : « dans le royaume des grandeurs, les imaginaires $a + b\sqrt{-1} = a + bi$ doivent être considérées comme ayant les mêmes droits que les réelles. La question, ici, n'est pas celle des avantages pratiques, mais plutôt que, pour moi, l'Analyse est une science indépendante qui, en excluant les grandeurs fictives perdrait énormément en beauté et en rondeurs et à chaque instant serait dans l'obligation d'ajouter des limitations des plus encombrantes à des vérités qui seraient sinon généralement valides » (Gauss, 1917, p. 366).

[…*man in dem Reiche der Grössen die imaginären* $a + b\sqrt{-1} = a + bi$ *als gleiche Rechte mit den reellen geniessend ansehen müsse. Es ist hier nicht von praktischem Nutzen die Rede, sondern die Analyse ist mir eine selbsständige Wissenschaft, die durch Zurücksetzung jener fingirten Grössen ausserordentlich an Schönheit und Ründung verlieren und alle Augenblick Wahrheiten, die sonst allgemein gelten, höchst lästige Beschränkungen beizufügen genöthigt seyn würde*.]

[544] « Nouvelle démonstration du théorème assurant que toute fonction algébrique entière d'une variable est résoluble en facteurs réels du premier ou du second degré ».

degré, alors même que la stratégie de sa première démonstration est de prouver que des valeurs de la forme « $a + b\sqrt{-1}$ » sont capables d'annuler n'importe quel polynôme. C'est dire que, si les complexes ont sans doute un sens dans l'espace des mathématiques, leur nature quantitative ne saurait pour lui être assurée par ces propriétés appartenant à l'Analyse algébrique[545].

Mais elles ne sauraient l'être plus par celles de la Géométrie. Et cela malgré le fait que sa première démonstration ait recours à la Géométrie des complexes pour faire apparaître les propriétés topologiques qui assurent le résultat. Or ce passage en apparence incontournable des complexes par la Géométrie n'est pas ici mis en avance pour établir une association aux réels qui viendrait justifier leur identité de statut (comme cela sera le cas pour Argand[546], et comme ce le sera aussi, mais d'une tout autre forme, lorsqu'il introduira sa célèbre représentation géométrique une trentaine d'années plus tard). Si une association aux réels a lieu dans ce passage par la Géométrie, c'est moins pour sanctionner l'unité des complexes, que pour assurer leur désagrégation. Qui plus est, dans l'ensemble de sa dissertation, Gauss cherche autant que possible, et par divers moyens, à éviter de faire porter les éléments centraux de la preuve sur ces propriétés géométriques. L'effacement du recours à la Géométrie sera d'ailleurs la motivation explicite de la production de sa seconde démonstration en 1815. Comprendre par quels moyens Gauss cherche à échapper à ces déterminations des complexes c'est donc comprendre ce qui pour lui pourrait constituer la véritable raison de leur caractère quantitatif ou numérique, ou, comme il le dira plus tard lorsqu'il s'agira de les poser dans un cadre Arithmétique, *d'éclairer leur métaphysique en tant que grandeurs*.

Pour le comprendre, donnons très rapidement la stratégie générale de cette première démonstration. L'idée de Gauss est qu'il suffit que tout polynôme s'annule en prenant pour sa variable une valeur de la forme $a + b\sqrt{-1}$ pour qu'il puisse être décomposé en facteurs de premier ou de second degré (Gauss évite soigneusement de parler de racine pour une telle valeur complexe). De cette façon, les facteurs de second degré qui assurent dans tous les cas la factorisation réelle totale d'un polynôme sont de la forme $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$. Il est facile

---

[545] Gauss (1799, p. 12) : « depuis ce temps où les Analystes reconnurent qu'il existe une infinité d'équations qui ne possèdent généralement de racines que si l'on admet des grandeurs de la forme $a + b\sqrt{-1}$, on considéra ces grandeurs comme d'une sorte tout à fait particulière que l'on qualifia d'*imaginaires* pour les distinguer des *réelles*, et on les introduisit partout en Analyse. De quel droit ceci fut-il réalisé, je ne veux pas le justifier ici. J'absoudrai ma démonstration de tout recours à des grandeurs imaginaires, bien que moi aussi je pourrais m'autoriser la même liberté dont tous les nouveaux Analystes ont profité. ». Une note des éditeurs indique que Gauss réserve ici le mot « imaginaire » à ce que nous appelons un nombre complexe, abandonnant le sens que lui avait conféré Descartes.

[546] Cf. Dhombres et Alvarez (2013, p. 89 sqq).

de voir que derrière cette expression se cache le produit de binômes complexes conjugués : $(x - a + b\sqrt{-1})(x - a - b\sqrt{-1})$. Mais écrit comme une expression de second degré, l'épineux signe « $\sqrt{-1}$ » est contourné. Au demeurant, l'expression « fonction algébrique entière » pour désigner les polynômes témoigne de la perspective fonctionnelle dans laquelle il s'inscrit, dans la lignée de Lagrange[547]. En effet, Lagrange avait tenté une démonstration du théorème dans la continuité d'Euler, mais l'existence d'autant de racines que de degrés du polynôme ne s'appuyait en dernière instance que sur le graphe de la fonction[548]. Gauss, en revanche, travaillera avec un paramétrage trigonométrique du binôme $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ [549], à partir duquel il sépare ce qui de nos jours apparaît comme la partie réelle et la partie imaginaire dans une expression complexe ; cela lui permet de les traiter comme deux fonctions polynomiales réelles distinctes[550]. La tâche est donc de montrer qu'il existe nécessairement des valeurs pour lesquelles ces deux fonctions s'annulent simultanément, ce qui équivaut à l'annulation du polynôme à valeurs complexes que le travail avec ces deux fonctions a pour but d'esquiver. Leur annulation simultanée suffit donc à rendre le polynôme réel factorisable par le binôme de second degré en question. Or, l'adoption d'une forme trigonométrique induit une approche géométrique où l'annulation simultanée des deux fonctions en questions se laisse envisager comme le croisement de deux courbes[551]. La preuve de Gauss s'appuiera enfin sur les propriétés topologiques de ces courbes, qui assurent que ces courbes ne peuvent pas ne pas se rencontrer.

On voit donc que le recours à la Géométrie n'est pas ici celui par lequel des quantités imaginaires se voient représentées comme autant de points dans un plan. Gauss n'y fait appel à la Géométrie que pour capturer une circonstance précise concernant les deux valeurs réelles

---

[547] Dhombres et Alvarez (2013, p. 83) : « Gauss, comme Laplace et Lagrange, évoque la fonction X. C'est, faut-il penser, sa façon d'individualiser le polynôme, et elle consonne avec le choix fait dans cet ouvrage d'un parti pris fonctionnel. ». L'adjectif « entière » anticipe d'ailleurs un rapport à l'Arithmétique qui ne sera complètement ostensible que dans sa seconde preuve. Comme l'indiquent toujours Dhombres et Alvarez (2013, p. 203) : « Aussi bien l'appellation de « fonction entière », si elle rappelle qu'il ne s'agit pas de fonctions rationnelles, signale chez Gauss aussi bien cette analogie avec les entiers et l'arithmétique. »

[548] Voir Dhombres et Alvarez (2011, ch. 7.2).

[549] Notamment : $x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2$ avec $a = r\cos\varphi$ et $r^2 = a^2 + b^2$.

[550] A savoir, selon une notation modernisée :

$$r^m \cos m\varphi + \sum_{k=1}^{k=m} A_k r^{m-k}[\cos(m-k)\varphi]$$

et

$$r^m \sin m\varphi + \sum_{k=1}^{k=m} A_k r^{m-k}[\sin(m-k)\varphi]$$

[551] Plus précisément, le croisement de deux surfaces avec un plan, dans la mesure où Gauss ne préjuge pas de l'existence d'une fonction explicite dans le plan de chacune de ces fonctions à deux variables (cf. Dhombres & Alvarez, 2013, pp. 94-95).

qui agissent derrière cette forme, à savoir l'annulation simultanée de leur fonctionnalisation polynomiale. Plusieurs remarques trahissent d'ailleurs que Gauss méprise le secours de la Géométrie : son insistance sur le caractère algébrique des courbes en question (1799, p. 133), sa présentation des exemples à travers des graphes adressés uniquement à des « lecteurs moins familiers avec les investigations générales et abstraites » (p. 134), ou sa récusation de l'existence que Lagrange accordait aux racines d'un polynôme, alors que cette existence était assurée en dernière instance par le graphe de la fonction polynomiale. Mais au-delà de ces circonstances, Dhombres et Alvarez arrivent plus profondément à déceler dans la démarche de Gauss une volonté d'asseoir les déterminations essentielles de la complexité en jeu sur de tout autres bases. À commencer par le cadre polynomial dans lequel se place Gauss dès le début qui, quoique désigné en termes de fonctions, est envisagé selon les propriétés d'une Algèbre des polynômes que les auteurs n'hésitent pas à appeler « pré-algèbre commutative »[552]. Mais à cette algèbre dont les polynômes sont les termes se superpose une autre, à savoir celle déterminée par les instruments trigonométriques dans lesquels Gauss décide de capturer effectivement le fonctionnement des nombres complexes. En effet, malgré le contexte géométrique naturellement induit par ce cadre trigonométrique[553], les auteurs relèvent l'ensemble de traits qui rendent l'usage que Gauss en fait principalement algébrique. D'abord, l'écriture polynomiale dans laquelle Gauss introduit ses expressions trigonométriques, qui ne sont là que pour exprimer ce qui se laisserait autrement exprimer comme racine complexe d'un polynôme, et traiter au moyen de la seule algèbre polynomiale. Et si ce cadre polynomial est abandonné au moment des calculs, il ne l'est que pour donner lieu à une autre algèbre dans la démonstration de ses lemmes, que Dhombres et Alvarez qualifient d'algèbre des formes homogènes à deux variables. D'autres mécanismes sémiotiques sont utilisés alors, notamment la disposition des termes des expressions trigonométriques sous la forme d'un tableau, qui accentue de façon délibérée les propriétés algébriques et combinatoires dont découlent les résultats des calculs[554], et évite, comme le remarquent les auteurs, la représentation spatiale des nombres complexes. Enfin, la preuve finale s'accomplit dans le terrain de l'Analyse et dans le contexte d'une représentation géométrique de courbes. Pourtant, Gauss insiste, comme il a été dit, sur la nature algébrique de ces courbes. Plus profondément, ce ne seront pas des propriétés géométriques à proprement parler qui viendront assurer l'existence d'un point de

---

[552] Dhombres et Alvarez (2013, p. 84) : « Gauss est le premier à insister sur une délimitation précise de cette possible algèbre quant aux variables concernées, et la rigueur algébrique est localisée par le maniement séparé des réels et des complexes. ».

[553] Où les deux variables en jeu se rattachent respectivement à des angles (dont on calcule effectivement le cosinus et le sinus), et à des modules.

[554] La nature algébrique de cette forme trigonométrique et de l'utilisation des sinus et des cosinus sera confirmée dans la troisième preuve de Gauss, en 1816 (cf. Dhombres & Alvarez, 2013, p. 281).

rencontre entre les courbes, mais topologiques – ou comme le dit Gauss, de la « géométrie de position » –, que Gauss traite par des moyens essentiellement combinatoires, ce qui fera dire à Bourbaki qu'il s'agit de l' « un des premiers exemples d'un raisonnement de pure Topologie appliqué à un problème d'Algèbre » (1984, p. 201).

Mais quelle est la signification à donner à toutes ces dimensions algébriques sur lesquelles Gauss cherche avec tant d'insistance à faire porter le poids d'un résultat où se détermine le sens profond des nombres complexes ? Certainement pas celle de l'Analyse algébrique qui, comme il a été dit, ne suffit pas aux yeux de Gauss pour assurer leur existence et leurs propriétés. À travers leur analyse de la démonstration de Gauss, Dhombres et Alvarez ne cessent de suggérer, même subrepticement, une autre réponse ; il convient donc de les citer sur ce point décisif, lorsque cette suggestion devient explicite :

> Le jeu qu'il mène sur les facteurs, et jusqu'à l'usage du verbe « contenir » pour indiquer une mise en facteurs, soulignent combien pour Gauss la nature de cette algèbre est associée à l'écriture en produits. Cette nature pourrait faire un parallèle avec la méthode des indéterminées et cette fois l'inspiration serait arithmétique, avec la représentation d'un nombre entier comme produit de nombres premiers. L'écriture multiplicative polynomiale devrait donc posséder son théorème d'unicité *ad hoc*, qui correspondrait à l'unicité de l'écriture additive d'un polynôme selon les puissances décroissantes, unicité fondatrice de la méthode cartésienne des indéterminées […]. Le point 3° [555] requiert donc de Gauss un excursus sur les racines multiples qui est l'analogue des puissances d'un même nombre premier dans l'écriture arithmétique, mais qui le conduit à préciser l'énoncé de Descartes de l'égalité au degré du polynôme du nombre de racines […]. Ce développement a déjà été examiné chez de nombreux auteurs précédents, et Lagrange en faisait en 1798 le principe fondateur de l'algèbre. Or l'explication de cette égalité est radicalement critiquée par Gauss. (Dhombres & Alvarez, 2013, p. 84)

C'est donc la structure articulée par la divisibilité, et plus précisément, par la division euclidienne, avec ses propriétés de mise en facteurs, ses effets d'irréductibilité, ses procédures algorithmiques et jusqu'à ses conditions d'unicité d'écriture, qui oriente le déploiement d'un territoire solide pour le devenir quantitatif de la fonctionnalité algébrique. Autrement dit, *l'Arithmétique*. Cependant ce nom ne saurait prendre dans l'œuvre de Gauss la signification de l'Arithmétique élémentaire, mais celle de l'Arithmétique *supérieure* (c'est-à-dire, ce que nous connaissons sous le nom de « Théorie des nombres »), telle que Gauss la qualifie et la détermine dans ses incommensurables *Disquisitiones Arithmeticae*. Dans cette Arithmétique,

---

[555] « Si pour un certain nombre de valeurs α_i non nécessairement distinctes, on a $P(x) = \prod(x - \alpha_i)$ aucun autre binôme unitaire $(x - \beta)$, où β est différent de tous les α_i, ne peut être « contenu » dans P » (Dhombres & Alvarez, 2013, p. 83).

l'opération de multiplication occupe une place fondamentale, non réduite à une opération dérivée de l'addition. D'où le sens qu'il y a à mettre l'accent sur l'écriture en produits, et plus généralement sur la divisibilité (euclidienne) ; celle-ci concentre, avec ses facteurs, ses quotients et ses restes, tout la portée problématique du rapport complexe entre les deux lois qui structurent l'Arithmétique élémentaire, addition et multiplication. C'est d'ailleurs la division euclidienne, telle qu'elle avait été décrite par des algébristes comme Étienne Bézout, qui, pour Dhombres et Alvarez, serait capable de régir entièrement ce qu'ils ont appelé « pré-algèbre commutative » pour les polynômes réels[556]. Plusieurs éléments confirment ce caractère décisif de la divisibilité comme principe structurant les différentes dimensions algébriques sur lesquelles Gauss fait porter le poids de sa démonstration, à commencer par le titre même de sa dissertation. Or, les auteurs pointent de façon plus précise vers un résultat qui concentre en un certain sens l'ensemble de ces déterminations, à savoir le *théorème de Bézout*, qui établit l'identité :

$$ax + by = 1$$

pour a et b premiers entre eux[557]. En effet, l'existence d'une telle identité pour des termes de type a et b assure l'ensemble des propriétés essentielles qui font d'eux des éléments d'une Arithmétique, et détermine en ce sens, leur nature quantitative[558]. En particulier, l'identité de Bézout se trouve intimement liée à l'algorithme d'Euclide pour déterminer le plus grand commun diviseur, à la résolution des équations diophantiennes, et de manière plus significative, à l'unicité de la décomposition en facteurs premiers et au Théorème des restes chinois. Comme le remarquent ces auteurs, l'idée que cette relation était capable de structurer l'Algèbre des polynômes aussi bien que l'Arithmétique était présente chez Gauss depuis le moment même de la préparation de sa dissertation doctorale, qui coïncide d'ailleurs avec l'époque de gestation des *Disquisitiones*[559]. Une note dans le journal mathématique de Gauss datant du 19 août de 1796 l'atteste :

> Soient des fonctions quelconques P et Q d'une quantité algébrique indéterminée. On a :
>
> $$tP + uQ = 1$$

---

[556] Voir Dhombres et Alvarez (2013, pp. 83-84).

[557] Autrement dit, ce résultat – énoncé d'abord par Claude Gaspard Bachet pour les entiers, et généralisé ensuite par Etienne Bézout pour les polynômes – établit qu'il est toujours possible de trouver deux entiers relatifs x et y tel que pour les entiers a et b on ait l'égalité $ax + by = 1$ si et seulement si a et b sont premiers entre eux (autrement dit, s'ils n'ont pas de diviseur commun). Plus généralement, le théorème établit que pour a et b premiers entre eux, on a

$$ax + by = \mathrm{pgcd}(a, b).$$

[558] On remarquera au passage la commune mesure que cette identité assure entre les lois d'addition et de multiplication pour les entiers.

[559] Voir Dhombres et Alvarez (2013, p. 107, note 13). D'après la préface des *Disquisitiones*, paru en 1801, Gauss y travaille depuis 1795, comme en témoignent les notes de son journal (cf. Eymard & Lafon, 1956).

aussi bien en algèbre spécieuse qu'en algèbre numérique. (Gauss cité dans Dhombres & Alvarez, 2013, p. 107)

La justesse de cette analyse se voit confirmée par l'évolution des perspectives de Gauss lui-même. Car, comme nous l'avons anticipé, en 1815 Gauss produira une nouvelle preuve du Théorème général de l'Algèbre, pour remédier au secours de la Géométrie dont relevait celle de 1799. Comme l'exprime à l'ouverture du texte de sa nouvelle démonstration, parue en 1816[560] :

> …j'espère que ne sera pas mal reçu par les géomètres le fait que je revienne sur la même très grave question, et qu'à partir de principes totalement différents j'essaie de donner une autre preuve, non moins rigoureuse. Attendu que cette preuve antérieure a au moins en partie dépendu de considérations géométriques, la présente au contraire reposera seulement sur des principes analytiques. (Gauss, 1816, p. 227)

Malgré cette volonté explicite de se déprendre des déterminations géométriques, Gauss ne considère pas moins rigoureuse sa première démonstration, qui « ne semble rien laisser à désirer sur le plan de la rigueur et de la simplicité » (1816, p. 227). C'est dire à quel point les vrais piliers de sa démarche résident ailleurs à ses yeux. Sa seconde démonstration aura pour tâche de préciser cet « ailleurs ». Aussi, la première étape de ce travail consiste à établir les propriétés algébriques des polynômes, appelés toujours « fonctions algébriques entières », où l'adjectif « entier » renvoie ouvertement ici aux nombres entiers de l'Arithmétique. La divisibilité des polynômes est alors invoquée comme point de départ. Il s'agit, plus précisément, d'établir d'emblée une propriété appartenant au plus grand commun diviseur de deux polynômes. En partant de deux polynômes Y et Y', et en suivant l'algorithme de la division euclidienne appliqué aux polynômes (réels), dont le degré diminue avec chaque division, Gauss parvient à une première division sans reste définissant un polynôme $Y^{(\mu)}$ comme plus grand diviseur commun de Y et Y'. De ce polynôme tous les autres diviseurs de Y et Y' résultent par multiplication par un scalaire. Or, dans le cas où $Y^{(\mu)}$ est de degré 0 (et donc, un nombre), cela indique que les deux polynômes de départ n'ont pas diviseurs communs (c'est-à-dire, sont premiers entre eux, bien que Gauss ne s'exprime pas comme ça). Il en résulte dans ce cas qu'il est possible de trouver deux polynômes Z et Z', tels que :

$$ZY + Z'Y' = 1,$$

et réciproquement. De cette manière, Gauss établit d'entrée de jeu l'identité de Bézout pour les polynômes, et définit ainsi virtuellement le cadre de ce qu'on comprend aujourd'hui (mais

[560] Dont le titre est : « Une autre nouvelle preuve du théorème selon lequel toute fonction rationnelle algébrique entière d'une variable peut être résolue en facteurs réels du premier et du second degré ».

uniquement comme conséquence de l'élaboration postérieure de ces idées !) comme un anneau de type $[X]$.

C'est dans ce cadre, et suivant les possibilités d'une décomposition totale d'un polynôme en produits binomiaux de premier degré, que la stratégie générale de la preuve sera structurée. L'identité de Bézout donne à Gauss un critère sûr et précis pour rapporter l'existence de racines à la factorisation et inversement, à savoir l'existence d'un diviseur commun entre un certain polynôme P et le binôme $(x - \alpha)$ (avec $P(\alpha) = O$) susceptible de le factoriser. Si bien que la preuve se déroulera dans le contexte d'une *double écriture* (somme de monômes et produit de binômes), que Gauss présente tour à tour, sans pourtant proposer une égalité générale entre elles, puisque c'est de la possibilité générale de cette égalité d'écritures qu'il est avant tout question[561]. Cette possibilité sera d'ailleurs établie en mettant en avant le rôle des fonctions symétriques[562] comme mécanisme fondamental du passage entre les deux écritures, ainsi que par l'introduction du discriminant qui définit les conditions pour l'annulation d'un polynôme. Gauss parviendra de cette manière au résultat que tout polynôme possède des facteurs de la forme $(x - A)$, où A est « une quantité soit réelle, soit de la forme $g + h\sqrt{-1}$ » (1816, p. 250). Dans le premier cas, l'identité de Bézout assure la mise en facteur d'un binôme de premier degré ; dans le second, le polynôme est divisible par le facteur réel de second degré $x^2 - 2gx + g^2 + h^2$, selon l'énoncé qu'il s'agissait de démontrer.

---

[561] Gauss (1816, p. 234) : « Bien sûr, la validité de cette preuve très simple repose sur l'hypothèse que les fonctions entières Y et Y' peuvent être résolues en facteurs simples. Mais ce serait commettre une pétition de principe que de poser cette hypothèse alors qu'il s'agit de démontrer la possibilité générale de la résolution ».

[562] Cf. note 537 p. 488 ci-dessus.

V.3. L'expression arithmétique

V.3.1. Les Disquisitiones

Ni géométriques, ni totalement algébriques, les preuves du Théorème fondamental de l'Algèbre offertes par Gauss à la pensée et à la pratique mathématiques révèlent dans leur évolution que l'articulation de domaines qui se joue derrière cette « très grave question » relève de l'Arithmétique, dans ses dimensions supérieures. C'est donc sur ce domaine que sont naturellement projetées à partir de l'œuvre de Gauss les questions ouvertes autour de la nature quantitative, voire numérique, d'expressions comme « $a + b\sqrt{-1}$ », au croisement problématique des pratiques formelles qui agissent sous ce théorème capital. Et de fait, lorsque Gauss introduira bien plus tard sa célèbre représentation géométrique des expressions complexes, ce sera bien dans le cadre des dimensions les plus profondes de cette Arithmétique qu'il le fera. Notamment, dans le contexte d'une généralisation au quatrième degré de la loi de réciprocité quadratique, que Gauss appelait le « Théorème d'Or » de la « Reine des Mathématiques ». À cette « Reine » qu'était pour lui l'Arithmétique supérieure – ou dans des termes toujours actuels, la Théorie des nombres[563] –, Gauss a offert avec ses *Disquisitiones Arithmeticae* de 1801 l'ensemble le plus cohérent de principes, de méthodes et de résultats qu'il ait peut-être jamais offert à une discipline et que cette discipline ait sans doute jamais reçu de la part d'un mathématicien. À tel point qu'il est possible de dire que c'est avec les *Disquisitiones* que la Théorie des nombres est née comme un domaine mathématique à part entière. Il ne saurait être ici question pour nous de nous plonger dans les profondeurs de cette œuvre immense[564]. En revanche, nous voudrions relever encore quelques

[563] Le traducteur de la première édition française des *Disquisitiones*, datant de 1807, parle déjà de « Théorie des nombres » dans sa présentation. C'est sans doute une manière de lier les recherches de Gauss à celles de Legendre, qui avait publié un « Essai sur la Théorie des Nombres », auquel Gauss fait référence à plusieurs reprises dans son ouvrage.

[564] Pour une analyse en profondeur des différentes dimensions de ce texte fondateur, voir le très beau recueil de Goldstein et alii (2007). Sur le rôle des *Disquisitiones* dans l'articulation des différentes disciplines, aussi bien que dans la définition d'une discipline nouvelle, on pourra voir plus particulièrement les deux articles de Goldstein et Schappacher correspondant à la première partie de cet ouvrage.

principes essentiels qui informent la conception du nombre se dégageant de ce domaine. Même si nous ne pouvons ici que les suggérer, ces éléments indiqueront la voie par laquelle l'Expressionnisme, qui en est à plus d'un titre l'écho et l'effet, aurait pu déployer davantage le problème qui lui était inhérent. Et dans un certain sens, la voie par laquelle il l'a effectivement atteint.

Dans la préface aux *Disquisitiones*, Gauss définit le territoire de l'Arithmétique, à la fois par rapport à l'Algèbre et à l'Analyse : son objet principal est le traitement des nombres entiers. Cela peut aller jusqu'à la considération des nombres rationnels dans la mesure où ceux-ci s'expriment au moyen d'entiers, mais jamais jusqu'aux irrationnels (Gauss, 1801/1989, p. xj). Si bien que l'Arithmétique de Gauss se place bien à ce niveau élémentaire du nombre auquel les différents courants d'arithmétisation feront appel dans leur recherche d'un appui solide pour les complexités de l'Analyse[565]. Seulement, Gauss signale le besoin d'établir une distinction au sein même de cette Arithmétique. D'une part il y aurait « l'art de former les nombres et de les calculer, c'est-à-dire, l'art de représenter les nombres par des signes convenables (par exemple, suivant le système décimal), et d'exécuter les opérations arithmétiques », pour lequel il réserve le nom d'Arithmétique élémentaire. De l'autre, une Arithmétique supérieure, définie par « les recherches générales sur les affections particulières aux nombres entiers » (pp. xj-xij). Inutile de dire que dans cette seconde Arithmétique, la première trouvera les fondements qui la soutiennent et les principes qui la régissent.

La grande originalité de l'approche proposée par Gauss dans cet ouvrage réside, dans une très grande mesure, dans son introduction d'une notion radicalement nouvelle concernant les nombres entiers, à savoir *la congruence*. La première section des *Disquisitiones* est entièrement dédiée à la présentation de cette notion, qui ne fut cependant pas immédiatement acceptée par ses contemporains[566]. Gauss la présente dans les termes suivants, ouvrant le texte du traité :

> Si un nombre a divise [*metiur* : mesure] la différence des nombres b et c, b et c sont dits *congrus* suivant a, sinon *incongrus*. a s'appellera le *module* ; chacun des nombres b et c, *résidus* de l'autre dans le premier cas, et *non résidus* dans le second. (Gauss, 1801/1989, p. 1)

L'idée est simple : il s'agit d'établir une relation entre tous les nombres b et c qui remplissent la condition $b - c = ka$, ce qui revient à lier entre eux tous les nombres de la forme $b + ka$, avec a défini comme un module déterminé et k un entier quelconque. On remarquera déjà que cette notion implique une compréhension du nombre (entier) comme essentiellement

[565] Sur le rapport des *Disquisitiones* aux différents projets d'arithmétisation de l'Analyse, cf. Ferreirós (2007).
[566] Voir, par exemple, la réaction de Legendre dans Goldstein et Schappacher (2007a, p. 23).

déterminé de façon simultanée par les opérations d'addition et de multiplication. Simultanéité qui dans le cadre des entiers est bien incarnée, comme il a été dit, par la divisibilité euclidienne. Gauss est sans doute très conscient de cette dualité puisque, comme le font remarquer Goldstein et Schappacher (2007a, p. 6, note 12), en plus du terme euclidien classique « mesurer », attaché généralement à la notion d'addition, Gauss utilise aussi souvent celui de « diviser »[567]. C'est donc bien de ce rapport problématique qu'il sera question dans l'Arithmétique modulaire que Gauss commence ainsi à mettre en place.

Définie de cette manière, la congruence entre des nombres constitue une relation telle qu'à tout nombre correspond un et un seul nombre compris entre 0 et $a-1$, que Gauss appelle « résidus minima ». Ce résidu minimal est déterminé par le reste de la division euclidienne du nombre de départ par le module a. La relation de congruence est conservée à travers les opérations arithmétiques élémentaires (addition, multiplication, puissance), ainsi que pour les fonctions polynomiales. Autrement dit, si suivant un module déterminé, p est congru à q, et r est congru à s, $p+r$ est congru à $q+s$. Il en va de même pour le reste des opérations. Il en découle que l'ensemble de fonctions algébriques se laissent traiter à partir des seuls résidus minima, devenus des sortes de représentants de l'ensemble de ses résidus. La totalité des entiers peut donc se réduire, en ce qui concerne les solutions des équations algébriques, à cette série finie de nombres qui ne cessent de se répéter suivant un cycle ou une période déterminée par le module[568].

Dire que l'ensemble des opérations se laisse traiter à partir des résidus minimaux, c'est dire que *l'essence de l'Arithmétique et du nombre réside dans cette modularité*. La congruence donne à Gauss une méthode extrêmement puissante pour aborder les problèmes de l'Arithmétique. Mais elle lui donne bien plus : elle lui donne un cadre général où la nature même des nombres et de ses propriétés se laisse comprendre d'une façon nouvelle[569]. Comme le soulignent Goldstein et Schappacher (2007a, p. 6), la pratique de considérer des équations uniquement jusqu'à un certain entier existait déjà avant Gauss, si bien que la véritable

---

[567] Cette diversité de vocabulaire n'est pas généralement rendue dans les traductions, comme en témoigne la citation ci-dessus.

[568] En termes plus actuels, résultant de la reformulation à partir des concepts qui sont, au moins en partie, le résultat d'une élaboration de ces idées, on dira : la congruence détermine une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive) qui quotiente l'ensemble des entiers relatifs en autant de classes que le module, et des opérations peuvent être définies sur ces classes pour constituer un groupe fini dans lequel l'arithmétique des entiers peut être surjectée, avec $ka \equiv 0$ (a étant le module et k un entier).

[569] Gauss insiste souvent sur les effets de reformulation du cadre général engendrés par sa méthode. Par exemple, au début de la cinquième section, après avoir reconnu les contributions de Fermat, Euler et Lagrange, par rapport aux « formes du second degré » il affirme : « un examen plus approfondi des *formes* nous a fait voir tant de choses nouvelles, que nous avons cru utile de reprendre ce sujet en entier, […]. D'ailleurs la méthode que nous avons employée nous appartient presque en entier, et les choses que nous pouvions ajouter n'auraient pas été entendues sans une nouvelle exposition. » (Gauss, 1801/1989, p. 118).

nouveauté de son approche réside plutôt dans le fait d'avoir transformé ce dispositif calculatoire en un sujet à part entière. Or cette méthode et ce cadre seraient irrémédiablement inefficaces si les notions de congruence et de modularité n'arrivaient pas à se détacher du reste des opérations au moyen d'une écriture qui les isole, les stabilise et les rende opérationnelles. Aussi, Gauss introduit-il, aussitôt la congruence présentée, une notation qui signera l'ensemble de sa recherche et qui restera en vigueur jusqu'à nos jours :

> Nous désignerons dorénavant la congruence de deux nombres par ce signe $\equiv$, en y joignant, lorsqu'il sera nécessaire, le module renfermé entre parenthèses ; ainsi $-16 \equiv 9\ (\mathrm{mod.}\, 5)$, $-7 \equiv 15\ (\mathrm{mod.}\, 11)$. (Gauss, 1801/1989, p. 2)

En note, Gauss justifie l'adoption de ce signe par la « grande analogie » entre l'égalité et la congruence, mais se démarque de Legendre qui utilisait directement le signe d'égalité pour se référer à des phénomènes de congruence, ce qui n'allait pas, comme le suggère Gauss, sans un risque constant d'ambiguïté. C'est dire à quel point *la congruence et la modularité constituent une véritable sémiotisation*, c'est-à-dire, une mise en signe, par laquelle on accorde un statut autonome à des propriétés émergentes des pratiques sur d'autres signes, dont l'ambiguïté est toujours l'essence première. En ce sens le geste de Gauss est assimilable à celui des algébristes de Cambridge. À la grande différence pourtant, que *les propriétés ainsi capturées ne sauraient jamais être attribuées par Gauss à des déterminations symboliques*. Restant au plus près des déterminations des nombres, Gauss ne considère les signes et les notations que comme de simples moyens d'accéder à une nature dont ceux-ci ne sauraient détenir la vérité. C'est d'ailleurs un trait auquel on reconnaît l'Arithmétique supérieure par rapport à l'élémentaire, dans la mesure où Gauss relègue uniquement dans cette dernière, comme on l'a vu, la question de la représentation des nombres « par des signes convenables ». Plus tard, à l'occasion du théorème de Wilson dans la troisième section, Gauss explicitera ce dédain des signes :

> Waring avoue que la démonstration lui en semble d'autant plus difficile qu'il n'y a point de *notation* par laquelle on puisse exprimer un nombre premier ; pour nous, nous pensons que la démonstration de cette sorte de vérités doit être puisée dans les principes plutôt que dans la notation. (Gauss, 1801/1989, p. 56)

Cette remarque de Gauss sera plus tard reprise par Dedekind pour faire l'éloge de l'intrinsèque (*das Innerlich*) contre l'extrinsèque (*das Äußerliche*) en mathématiques :

> Ces derniers mots, pris au sens général, expriment une grande pensée scientifique, la préférence de ce qui est interne par rapport à ce qui est externe. Cette opposition se retrouve dans presque tous les domaines des mathématiques ; que l'on pense à la Théorie des fonctions et à la définition riemannienne d'une fonction par ses propriétés caractéristiques

> internes, desquelles découlent avec nécessité les modes de présentation externe. (Dedekind, 2008, pp. 99-100)[570]

La sémiotisation de la congruence et la voie qu'elle ouvre à l'intérieur de la pensée mathématique du nombre se font donc au nom de propriétés qui se veulent radicalement indépendantes des aspects purement sémiotiques des nombres, dans le but de libérer les nombres de leurs représentations ou expressions particulières[571]. Le paradoxe est que, ce faisant, *jamais les mathématiques n'ont autant fait foisonner les différents moyens de représentation des nombres, ni autant exploré par là-même les principes de leurs dimensions sémiotiques*. Ces deux choses ne sont, après tout, contradictoires qu'en apparence, puisque seule une confrontation des différentes représentations du nombre permet de dégager les principes qui agissent à la base de cette variation. En effet, l'adoption d'une perspective ouvertement symbolique entraînait chez les algébristes anglais le refus de tout statut sémiotique au nombre et l'adoption d'une notion du signe où la seule « représentation » possible pour un nombre était celle du symbole (littéral) abstrait. En revanche, en restant au plus près des nombres et quitte à dédaigner tout recours à une symbolique abstraite, l'approche arithmétique de Gauss, qui se poursuivra jusqu'à Dedekind et au-delà, finit par assumer, comme malgré elle, la multiplicité des dimensions sémiotiques qui animent leurs différentes représentations possibles, dans le but d'en dégager un système unique et cohérent de principes. Le fait que Gauss garde le terme « représentation » pour un mode particulier par lequel les nombres peuvent être exprimés (celui des *formes*[572]), ainsi que son usage constant du terme « expression » pour nommer les multiples suites de signes renvoyant à des nombres, nous autorise à parler ici des différentes dimensions de l'expression numérique, dont nous nous contenterons ici de mentionner très rapidement les traits les plus déterminants.

---

[570] Dans une lettre à Lipschitz, Dedekind assume cette idée comme son but personnel : « Mon effort dans la théorie des nombres tend à appuyer la recherche non pas sur des formes de présentation ou des expressions fortuites mais sur des concepts fondamentaux simples : je cherche par là à atteindre dans ce domaine – même si la comparaison peut sembler présomptueuse peut-être – quelque chose de semblable à ce que Riemann a accompli en théorie des fonctions. » (Dedekind, 2008, pp. 260-261).

[571] On se souviendra que Peacock présentait de cette manière l'Arithmétique dans son Algèbre, où la référence à Gauss était explicite. Cf. *supra* p. 251.

[572] Dans le sens, par exemple, où un nombre est « représenté » par une forme quadratique : « Nous dirons qu'un nombre donné est *représenté* par une forme donnée, si l'on peut trouver pour les indéterminées de cette forme des valeurs qui la rendent égale au nombre donné » (Gauss, 1801/1989, p. 119).

V.3.2. La complexité expressive du nombre

Le premier mécanisme d'expression des nombres mis en avant par Gauss est celui de la congruence elle-même[573]. En effet, dans le contexte d'une modularité déterminée, un nombre peut être remplacé par n'importe quel autre nombre congruent, sans porter atteinte au résultat de l'opération. En ce sens, la modularité capture une certaine variation susceptible d'avoir lieu dans des expressions numériques selon un rapport de substitution que Gauss va jusqu'à traiter en termes d'équivalence[574]. En effet, dans une expression comme :

$$16 + 3 \equiv 24 \; (\mathrm{mod.}\, 5),$$

le nombre 16 peut être remplacé par -9 sans altérer la vérité de l'équation, puisque $16 \equiv -9 \, (\mathrm{mod.}\, 5)$. L'existence de résidus minima ajoute une couche supplémentaire à cette dimension de l'expression. Car, grâce à la relation de congruence ainsi définie, on ne perd rien à remplacer tous les nombres par leurs résidus minima correspondants, qui se voient de cette manière investis d'une puissance expressive nouvelle. On sait que cette différence entre un nombre naturel et ce même nombre en tant que « représentant » de tous ceux qui lui sont congrus selon un module, est de nos jours capturée par la différence entre un nombre et une classe d'équivalence entre des nombres. Mais il ne faut pas oublier que Gauss n'opère pas cette distinction, et qu'ainsi le sens d'un nombre est investi chez lui d'une ambiguïté analogue à celle qu'il dénonçait chez Legendre par rapport au signe d'égalité. Ce qui confirme l'idée d'une ambiguïté essentielle à la base de tout processus de sémiotisation. Ce n'est pas nécessaire d'insister sur le fait que cette ambiguïté problématique est la même que nous avons trouvé à l'œuvre dans les deux grands projets de formalisation du sens du XIXe siècle.

Cette puissance d'expression nouvelle ouvre d'ailleurs sur un aspect essentiel de la nature sémiotique des nombres. Car malgré sa volonté de détacher son Arithmétique supérieure de la question de la représentation de nombres par des signes, Gauss ne peut pas s'empêcher de la mentionner à la fin de la première section des *Disquisitiones,* une fois présentée l'ensemble restreint d'outils de la modularité :

> Plusieurs des théorèmes que l'on a coutume d'exposer dans les traités d'arithmétique, s'appuient sur ceux que nous avons présentés ; par exemple, la règle pour reconnaître si un nombre est divisible par 9, 11, ou tout autre nombre. Suivant le module 9 toutes les puissances de 10 sont congrues à l'unité ; donc si le nombre est de la forme $a + 10b +$

[573] Gauss (1801/1989, p. 11) : « Nous appelons congruence l'expression de deux quantités congrues, à l'instar des équations ».

[574] Gauss (1801/1989, p. 11) : « Comme les résolutions de la congruence […] se présentent d'elles-mêmes, et que sous cet aspect les nombres congrus doivent être considérés comme équivalens, nous regarderons ces solutions comme une seule et même. ».

> $100b + 1000d + etc.$, il aura, suivant le module 9, le même résidu $minimum$ que $a + b + c + etc.$ Il est clair d'après cela, que si l'on ajoute les figures du nombre, sans avoir égard au rang qu'elles occupent, la somme que l'on obtiendra, et le nombre proposé auront les mêmes résidus *minima* ; si donc ce dernier est divisible par 9, la somme des chiffres le sera aussi, et seulement dans ce cas. (Gauss, 1801/1989, pp. 4-5)

C'est dire à quel point l'Arithmétique supérieure capture les principes de l'Arithmétique élémentaire, et plus précisément, la modularité ceux de l'écriture (arabe) des nombres la plus ordinaire. Car après tout, si la simple écriture des nombres était aussi arbitraire qu'on a voulu la croire, il n'y a aucune raison pour que ses « figures » constituantes nous disent quoi que ce soit sur les propriétés arithmétiques du nombre que leur composition représente. De cette façon, la modularité montre que *l'essentiel du nombre réside dans l'articulation même de ces figures*, et qu'aucune écriture du nombre n'est possible sans qu'elle n'inscrive dans son articulation les propriétés de ce qu'elle est censée représenter. Les chiffres, ou plus généralement, les figures[575], les expressions *figurales*, constituent ainsi de véritables graphèmes, dont la combinaison selon une structure précise fait d'elles les éléments sémiotiques de l'expression du nombre. Les *Disquisitiones* réalisent ainsi la conception du nombre que la figuration frégéenne déclarera un siècle plus tard impossible, fermant la voie à l'expressionnisme qui l'avait conduit jusque là. Car ces expressions figurales que sont les figures ou les chiffres, auxquels Gauss donne une place dans son Arithmétique, constituent exactement les parties insignifiantes agissant au niveau articulatoire des unités non composées, entrevues par Frege dans son annexe aux *Grundgesetze*[576]. Et le signe « 2 » ne trouve un sens dans le cadre de cette Arithmétique des congruences que par la variation de toutes les expressions qui l'incluent, ou plus généralement, de toutes les modularités qui l'investissent de la capacité d'être le représentant à chaque fois de nombres différents (d'être leur résidu minimal).

Cette inhérence du contenu de la représentation aux articulations propres des signes sur lesquels cette représentation voudrait se servir comme d'un simple instrument est bien ce qu'il faut appeler : *expression*. Dans ce sens, le nombre est par essence *expressif*. Par essence, c'est-à-dire que cette expressivité, capable de renverser tout ordre représentatif qui voudrait le capturer, définit le nombre comme tel. Rien n'est entièrement un nombre s'il n'est que représenté ou symbolisé ; car dès qu'un nombre *fonctionne* comme un nombre, ce

[575] C'est bien Gauss qui parle de « figures », et qui les envisage de fait dans ces termes. Voir par exemple la sixième section de ses *Disquisitiones*, où il se consacre à la conversion de fractions ordinaires en fractions décimales (donc au passage d'une représentation dans une autre) par l'utilisation des figures décimales (Gauss, 1801/1989, §§ 312-318).

[576] Cf. *supra* p. 459.

fonctionnement se confond avec celui des signes, dont la représentation devait neutraliser l'existence pour pouvoir se donner comme telle. Voilà leur caractère concret. Mais voilà leur abstraction aussi, puisque le nombre ne saurait être un objet comme les autres. Ontologiquement abstrait, le nombre tient sa concrétude des signes mêmes dans lesquels il se donne ; autrement dit de ce que le symbolisme tenait pour le plus abstrait. C'est à cela qu'il doit de pouvoir déconstruire l'opposition de l'abstrait et du concret, pouvoir proprement expressif au niveau même duquel son contenu se joue.

Nous avons déjà signalé que la structure suivant laquelle se composent les figures pour exprimer un nombre correspond dans un sens très précis à la structure polynômiale[577], avec tout ce que cela engage en termes de rapport entre racines et facteurs, et de rapport entre deux écritures, additive et multiplicative. En déterminant des règles de calcul à partir des figures ou des chiffres (ou d'une autre manière, des coefficients des polynômes), mais aussi en étant capable d'établir, comme le montrera Gauss dans le reste du traité, des principes de résolution (entière) pour l'ensemble des fonctions algébriques entières, la modularité montre sa capacité à saisir les ressorts internes de cette structure. Mais dans la correspondance entre cette structure et l'écriture du nombre comme telle, l'approche de Gauss va plus loin. Car par l'expression des nombres au moyen de leurs résidus minima, l'existence des figures elles-mêmes acquiert une nouvelle rationalité. Cela constitue sans doute une dimension nouvelle dans l'exploration sémiotique du nombre opérée par les *Disquisitiones*. En effet, dans la première section, Gauss avait montré qu'à tout nombre correspondait un et un seul résidu minimum, qui est compris entre 0 et $m-1$ (m étant le module). La troisième section montrera la façon de lier l'ensemble de ces résidus minima à un certain fonctionnement des puissances, à savoir les séries géométriques (c'est-à-dire, du type $1, a, a^2, a^3$ ...). Car si a est une racine primitive modulo un nombre premier p (c'est-à-dire, si on a $a^{p-1} \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\, p)$), alors tous les résidus minima de puissances $a, a^2, a^3 \ldots a^{p-1}$ seront différents, de telle sorte qu'ils pourront être associés un à un à ces puissances. De cette manière, les résidus minima capables de fonctionner comme des atomes d'écriture se montrent, grâce à l'approche en termes de congruences, associés aux propriétés des opérations algébriques d'exponentiation. Il en résulte une propriété remarquable : par ce moyen, le nombre de racines d'une expression algébrique se trouve associé au nombre de classes de congruences déterminé par la modularité. Notamment, ces nombres coïncident lorsque l'on considère un module p premier par rapport à une expression de degré $p-1$.

---

[577] Il est significatif d'ailleurs que Gauss évite cette forme dans le passage que nous venons de citer, comme s'il ne voulait pas mélanger l'ensemble des propriétés algébriques avec la « simple » écriture du nombre.

Un résultat associé à ces propriétés nous permet de suggérer l'importance de ce lien pour les problèmes qui sont les nôtres, à savoir, le *petit Théorème de Fermat*, que Gauss démontre dans cette troisième section, peu avant d'arriver au résultat que nous venons d'énoncer. Ce théorème célèbre dû à Pierre Fermat, établit la congruence

$$a^p \equiv a\ (\mathrm{mod.}\,p)$$ [578]

On peut voir dès lors dans quelle mesure l'ensemble de ces recherches fournit une cohérence pour les déterminations qui dans l'œuvre de Boole demeuraient obstinément dispersées. Car à travers ces résultats on peut comprendre qu'en imposant, pour des raisons strictement logiques, la loi $x^2 = x$, *Boole forçait l'ensemble de son système à fonctionner comme une arithmétique modulo 2*, suivant le degré de cette équation. Dans une arithmétique modulo un nombre premier *p*, le polynôme $x^p - x$ a p racines, et est ainsi entièrement décomposé, de telle sorte que ces racines se trouvent intimement associées aux p classes d'équivalences déterminées par la relation de congruence. On peut constater d'ailleurs que cette modularité aurait permis de donner un sens à l'ensemble d'expressions aberrantes du type $3 = 9$, $0 = 2$, $-1 = 1$, $4 = 2$ (expressions qui sont toutes vraies si on les considère comme des congruences modulo 2). Pourtant, la consistance d'une telle structure aurait requis que Boole assume d'une manière ou d'une autre une loi pour l'addition du type $x + x = 0$, dont le sens logique resterait à définir. En absence de cette loi, son système n'arrive pas à constituer une véritable arithmétique. L'effort de Hailperin pour la restituer sans porter atteinte aux intuitions originales de Boole est à cet égard remarquable, et on ne s'étonnera pas que dans cette reconstitution il fasse appel aux ressources fournies par l'évolution de ces idées gaussiennes.

La série de dimensions de l'expression numérique ne s'arrête certainement pas là. Il faut sans doute mentionner celle pour laquelle Gauss réserve le nom spécifique de « représentation », et qui occupe la cinquième section des *Disquisitiones*, et presque la moitié de l'ouvrage. Pour cela Gauss introduit la notion de *forme* pour désigner des fonctions binaires quadratiques du type $ax^2 + 2bxy + cy^2$, et affirme ensuite :

> Nous dirons qu'un nombre donné est *représenté* par une forme donnée, si l'on peut trouver pour les indéterminées de cette forme des valeurs qui la rendent égale au nombre donné (Gauss, 1801/1989, p. 119).

[578] Soit dit en passant, Gauss notait ce résultat dans son journal juste avant l'identité de Bézout pour les polynômes, dont on a vu l'importance pour sa seconde démonstration du Théorème fondamental de l'Algèbre. Cf. la traduction française du journal de Gauss dans Eymard et Lafon (1956, p. 27).

En termes d'expression d'un nombre, cette conception croise celle par laquelle une expression polynomiale peut aussi l'exprimer, mais la structure particulière de ces formes quadratiques comporte sans doute des spécificités qui définissent un territoire à part entière[579].

Plus intéressant pour nous, en revanche, est le rôle central joué dans l'ensemble de cet espace expressif par les nombres premiers[580]. On vient de voir à quel point c'est par eux qu'un lien peut être établi entre les degrés des équations, le nombre de racines, et celui des classes de congruence. Mais avant d'occuper cette place décisive dans l'articulation générale des multiples principes de représentation numérique, ils jouent un rôle plus fondamental qui est présenté par Gauss dans les premières pages de la seconde section. Nous parlons bien évidemment du *Théorème fondamental de l'Arithmétique*, qui établit la décomposition unique d'un nombre en facteurs premiers. Si la possibilité d'une décomposition en facteurs premiers est évidente, l'unicité de cette décomposition a bien pour Gauss besoin d'une preuve, qu'il fournit aussitôt, et qui est habituellement considérée comme la première démonstration complète de ce théorème[581]. L'importance de ce résultat du point de vue de l'expression des nombres entiers réside, non seulement dans la possibilité de trouver un principe d'identité pour tout nombre (puisqu'en tant qu'elle est unique, tout nombre peut être directement associé à sa décomposition en facteurs premiers), mais aussi dans ce que cette identité se trouve articulée dans une structure qui se laisse manipuler comme telle. Notamment, suivant ce théorème, l'identité de tout nombre peut être capturée par une structure de la forme :

$$p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r},$$

où les p_i sont des nombres premiers (généralement rangés en ordre croissant), et les exposants n_i indiquent le nombre de fois qu'un nombre premier déterminé apparaît dans la décomposition[582]. De cette manière, la décomposition en facteurs premiers *habilite à la fois une expression et un calcul* des nombres. D'une part, grâce à cette structure, les nombres se laissent exprimer dans leur singularité suivant une articulation nouvelle, déterminée uniquement par les exposants des nombres premiers mis en facteurs[583]. Ainsi, la suite de

[579] Notamment, un rapport privilégié à l'espace, dans la mesure où une forme quadratique détermine une norme où une mesure de distance.

[580] La généralité à laquelle les nombres premiers permettent d'accéder est constamment reconnue par Gauss. Par exemple, au début de la troisième section des *Disquisitiones* : « Nous avons parlé jusqu'ici de modules quelconques, pourvu qu'ils fussent premiers avec a. À présent examinons à part les modules qui sont des nombres premiers absolus, et établissons sur ce fondement des recherches plus générales » (Gauss, 1801/1989, p. 32).

[581] Cf. Bourbaki (1984, p. 111, note).

[582] Selon les exemples données par Gauss : $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$; $2880 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$, et $864 = 2^5 \cdot 3^2$.

[583] En accordant d'attribuer une puissance égale à 0 pour les nombres premiers qui n'appartiennent pas à la décomposition d'un certain nombre, selon la convention usuelle : $a^0 = 1$.

nombres $(3, 2, 0, 1)$ peut exprimer le nombre 504, et $(6, 2, 1)$ le nombre 2880, dans la mesure où :

$$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1, \text{et}$$
$$2880 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

ce qui implique, comme il apparaît ici avec évidence, d'ordonner les facteurs premiers par ordre croissant, en faisant figurer tous les termes de la série de nombres premiers jusqu'au plus grand facteur du nombre en question, quitte à les affecter d'une puissance nulle (comme dans le cas du facteur 5 dans la décomposition de 504). Envisagés de cette manière, les nombres premiers deviennent de véritables instruments sémiotiques, notamment, des marqueurs de position pour des figures se composant dès lors suivant une logique hétérogène à celle de l'écriture décimale, mais pas moins effective par rapport à l'identité d'un nombre. Mais d'autre part, les nombres premiers ne perdent pas pour autant leurs propriétés strictement calculatoires, bien au contraire. Les figures ou chiffres dont ces nombres marquent la position continuent à être les puissances de ces nombres, et la juxtaposition de ces facteurs ne perd pas le sens multiplicatif. Aussi, l'arrangement particulier qu'ils disposent habilite de nouvelles techniques de calcul, notamment associées aux propriétés de la multiplication et de la divisibilité, mais pas uniquement. À commencer par la multiplication de deux nombres, qui se laisse traiter simplement à partir de la somme des exposants des facteurs respectifs correspondants[584]. Il en va de même pour la divisibilité d'un nombre par un autre, déterminée par la circonstance que toutes les puissances de la décomposition en facteurs premiers d'un nombre sont égales ou plus petites que celle de l'autre. De la même manière on peut, par exemple, déterminer facilement le plus grand diviseur commun, et le plus petit commun multiple, la primalité entre deux nombres étant donnée enfin par le fait de ne partager aucun facteur premier, ce qui se laisse voir aussi au niveau de leurs exposants, et le calcul sur les exposants allant jusqu'à considérer des rapports de divisibilité entre eux[585]. Ce ne sont là que des exemples élémentaires, que Gauss arrive à expédier dans les premières pages de la seconde section des *Disquisitiones*. Des propriétés bien plus complexes feront apparition avec le développement de l'ouvrage, pour laquelle cette représentation des nombres deviendra essentielle. Ces exemples simples suffisent cependant pour témoigner de la dimension calculatoire attachée à cette décomposition des nombres, qui s'associe ainsi à sa dimension

[584] Dans notre exemple : $504 \cdot 2880 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 1451520$.

[585] Dans notre exemple des nombres $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ et $2880 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$, on a $3 < 6$ pour le facteur 2, et $1 > 0$ pour le facteur 7, d'où l'on peut conclure qu'aucun de ces nombres ne divise l'autre. Pour des cas où l'on fait appel à la divisibilité entre exposants, voir par exemple les *Disquisitiones* (Gauss, 1801/1989, p. 9).

.

expressive pour affirmer la puissance de cette structure articulatoire dans le cadre de la compréhension du nombre.

V.3.3. Les deux structures

Regardée comme structure à la fois expressive et calculatoire attachée aux nombres, la décomposition des nombres en facteurs premiers se rapproche de la structure polynomiale. Comme nous l'avons vu, cette dernière incarne aussi un principe par lequel tout nombre se laisse exprimer (les places étant déterminées par les puissances de l'inconnue, les coefficients étant les figures), auquel il est associé une ou plusieurs dimensions calculatoires. Que cette dernière puisse paraître plus naturelle du fait qu'elle capture les mécanismes mêmes qui se cachent derrière notre écriture courante des nombres ne change rien à l'essentiel, puisque cette naturalité n'est que l'effet d'une pratique sur des signes historiquement déterminée. Si une chose apparaît avec clarté dans cette confrontation de la structure polynomiale avec la structure des facteurs premiers, c'est la non naturalité et la complexité du nombre quant à ses déterminations sémiotiques. En premier lieu, puisque l'existence de ces deux structures témoigne de la nature nécessairement articulée de l'écriture des nombres. Un système d'écriture qui prévoirait un signe simple (une « figure ») pour chaque nombre serait non seulement impraticable du fait de son infinité (et donc, pas un système d'écriture du tout), mais aussi non calculatoire. Nous avons vu comment la nécessité de ce caractère articulatoire du nombre s'est présentée à Frege à la fin de son parcours, dénonçant l'erreur de sa conception du nombre comme signe simple. La nature calculatoire des nombres qui constitue l'Arithmétique est certes attachée aux dimensions fonctionnelles ou opératoires qui leur sont associées. Mais avant d'entrer dans des rapports fonctionnels ou opératoires, *les nombres sont constitués par elles*. Autrement dit, ce ne sont pas les nombres qui entrent dans des structures fonctionnelles, ce sont les structures fonctionnelles *qui résident dans le nombre* ; et c'est bien par cette articulation fonctionnelle *interne* au nombre qu'il peut, seulement ensuite, entrer dans d'autres rapports opérationnels ou fonctionnels déterminant à leur tour l'articulation interne d'un nouveau nombre. Si bien que, dans tout ce système mobile et ramifié, le nombre n'est rien d'autre que cette articulation fonctionnelle spécifique comme constitution interne d'un contenu envisagé comme unique (d'où l'importance de l'unicité d'écriture dans chacun des structures en question).

Ce fait peut être, sinon directement observé, du moins trouvé au niveau même de l'écriture des nombres, où il agit de manière nécessaire et privilégiée. Le trouver ne veut rien dire d'autre que trouver la structure même de son articulation sémiotique. Structure sémiotique qui, pour des raisons profondes qui n'ont cessé de fasciner mathématiciens, logiciens et philosophes, ne peut ne pas être mathématique du même coup. Que les nombres n'entrent pas dans des structures, mais soient eux même des structures, voilà ce qu'un simple regard sémiotique posé sur des structures comme celle du polynôme ou celle de la décomposition en facteurs premiers suffit à faire comprendre. Mais il faudrait encore dire que cette compréhension ne survient que lorsqu'on regarde *et* la structure polynomiale *et* celle des facteurs premiers. Car c'est dans la possibilité qu'un même nombre soit décrit par deux structures hétérogènes, ou encore, qu'à une même écriture correspondent deux nombres différents selon la structure que l'on peut projeter sur elle, que se joue la compréhension de son essence articulatoire et structurale. Dans d'autres termes : que l'essence du nombre soit *structurale* veut aussi dire qu'elle est nécessairement *complexe*, c'est-à-dire, déterminée par le rapport *d'au moins deux structures à la fois*.

Arrêtons-nous un instant sur quelques aspects de ce point fondamental. La structure polynomiale est déjà une structure complexe. Il suffit de peu pour s'en apercevoir. Soit l'écriture :

$$111$$

Notre pratique courante des signes tendra à y voir le nombre qu'on appelle « cent onze », alors qu'un habitant de l'Empire Romain y verrait sans doute le nombre « trois »[586], et que, à cause du développement massif de l'informatique, dans moins d'un siècle on n'arrivera peut-être pas à ne pas y voir le nombre « sept ». Ou quoi d'autre encore ? Cette question n'est pourtant pas rhétorique. Quel nombre ne pourrait-on pas voir ? Ou plus précisément, à quelle condition ce que nous pouvons y voir pourra être dit un nombre ? Ces questions constituent l'autre face de celles que nous avons rencontrées dans nos analyses des signes numériques dans le système de Boole, concernant les limites de la capacité d'un signe à symboliser ou exprimer un nombre[587]. Nous en concluions, alors comme maintenant, à la dualité, à la complexité intrinsèque du nombre. Car la réponse dans tous les cas viendra du côté du dégagement d'une structure, à la fois articulatoire (au sens sémiotique), constituant comme la syntaxe et la grammaire des signes, et fonctionnelle ou opératoire (au sens mathématique), ouvrant un espace virtuel de puissance calculatoire. Dans les trois cas précédents, il s'agit bien d'une structure du type :

$$1x^2 + 1x^1 + 1x^0,$$

---

[586] Jean-Yves Girard aime parler des « entiers de Cro-Magnon » (2006, p. 128). Il n'y a sans doute pas besoin de remonter aussi loin. Toujours est-il que le système romain de numération comporte des subtilités que le système de Cro-Magnon permet provisoirement de contourner, et c'est à celui-ci que nous nous référons ici ; plus précisément, à une écriture en base 1, si un système de la sorte avait un sens…

[587] Cf. *supra* p. 298.

où la valeur de x varie pour être respectivement 10, 1 et 2. Par sa capture au moyen de la figure (à la fois sémiotique et mathématique) « x », la variation entre « cent-once », « trois », et « sept » se voit comme « mesurée » par 10, 1 et 2. Mais cette seule structure n'est pas suffisante. Encore faut-il, symétriquement, qu'une certaine équivalence d'un autre type puisse être établie entre 10, 1, et 2, notamment entre des structures de variation du type :

$$a10^2 + b10^1 + c10^0$$
$$a1^2 + b1^1 + c1^0$$
$$a2^2 + b2^1 + c2^0,$$

de telle sorte que 003, 111 et 011 [588], viendraient mesurer à leur tour, à travers cette structure, la variation entre 10, 1 et 2.

La structure polynomiale se trouve au croisement de ces deux structures, chacune comportant déjà plusieurs niveaux et degrés de variation. Et si quelque chose comme un nombre se laisse déterminer au croisement improbable de ces structures, *c'est dans la mesure où des renvois fixes peuvent être établis au milieu de ce système complexe de variation*. C'est là l'un des sens les plus intimes de l'Algèbre, qui n'a cessé d'être numérique que pour le redevenir sous une forme nouvelle (à savoir, celle des anneaux et des corps). Que ses déterminations algébriques incontournables ne suffisent pas néanmoins pour réduire celles de l'Arithmétique, l'histoire entière des mathématiques en témoigne, et nous avons eu l'occasion d'en évoquer quelques épisodes. C'est cette fixité qui est venue à chaque fois perturber l'organisation sémiotique des systèmes logiques que nous avons abordés. Cette immobilité des signes numériques qui donnait l'aspect des objets à exclure aux yeux de Woodhouse ; cette rigidité que Babbage devait reconnaître au milieu de ses signes pour sélectionner les véritables symboles ; ce même attachement au singulier qui réapparaissait au niveau des symboles de Boole, marquant d'une différence à chaque fois renouvelée la signification d'un symbole qui se voulait général. Douées d'une *puissance référentielle immanente*, les nombres sont indissociables d'une dimension spécifique et inexorable du signe et de la signification, où se noue la racine commune de l'indiciel, de l'indicatif et de l'indexical. Indissociables, cela veut dire que les nombres ne peuvent pas être incorporés dans un système de signes sans y installer une dimension de rigidité significative, d'*indication*, avec le régime indiciel qui le supporte et l'indexicalité qu'elle implique. Mais aussi qu'à chaque fois que le plus simple mécanisme d'indices viendra s'installer dans un système de signes, ce sont les nombres tout entiers qui s'installeront avec lui, et déploieront la dimension indicative qui leur est inhérente.

[588] Ou encore 0000007, 1111111, et 0000111 ; ce qui nous obligerait à penser à des polynômes de degré 7, déterminant 7 places pour des figures.

C’est sans doute cette puissance indicative attachée aux nombres, ou plus précisément, c’est cette puissance indicative qui est indiscernable de l’être même des nombres, qui les a rendus aussi inséparables d’une dimension de contenu dans la logique. C’est certainement le cas pour l’œuvre singulière de Boole. C’est en tout cas vrai pour Frege, pour qui les nombres ont toujours été le modèle et la raison de la référence. C’est en reconnaissant et en assumant cette référentialité attachée au nombre que Frege ouvrit des voies nouvelles pour une logique du contenu. Mais c’est par là aussi qu’il a fini par les fermer pour une logique du sens. Car l’indication propre au nombre ne se laisse pas réduire à la simple référence. Cette dernière est gouvernée comme de l’extérieur par les exigences d’une forme objectale comme point d’attribution immobile, alors que la fixité du nombre qui détermine sa puissance indicative est un effet inhérent à la structure même des signes. C’est cette irréductibilité de l’indication non référentielle qui a fini par, si l’on peut dire, lui revenir en plein visage. *Andeutung vs. Bedeutung*. Mais les signes, les *indices*, de cet éclatement étaient déjà là dès le début. Car après tout, Frege ne s’est jamais véritablement arrêté sur le statut décisif du signe « x » dans une expression comme « $F(x)$ ». Il s’est toujours contenté de dire qu’un tel signe « *indique* (andeuten) *de façon indéterminée* »[589]. Prise dans l’interstice qui se creuse entre *Sinn* et *Bedeutung*, entre sens et référence, Frege a toujours refusé toute puissance de contenu à la *Andeutung*, à l’indication en tant que telle.

> La partie « a est plus grand que 2 » n’exprime plus une pensée ; elle n’exprime ni une pensée qui est vraie, ni une pensée qui est fausse, parce que « a » ni ne désigne un objet, comme le fait un nom propre, ni ne confère la généralité du contenu à cette partie. Relativement à cette partie, « a » n’a aucun but, n’a rien à apporter pour conférer à cette partie un sens quelconque. […] Les lettres, comme le « a » de notre exemple, qui servent à conférer à une phrase la généralité du contenu sont, en vertu de leur rôle, essentiellement différentes des noms propres. Je dis qu’un nom propre signifie un objet ; « a » indique un objet, il n’a pas de signification, il ne désigne ou ne signifie rien. Dans le langage ordinaire, des mots comme « quelque chose » ou « il » occupent souvent le rôle des lettres ; dans certains cas, cependant, rien n’occupe ce rôle. À ce point de vue, comme à d’autres, le langage est incomplet. (Frege, 1906a, pp. 226-227)

À tel point Frege a négligé les indices qu’il les a identifiés avec leur propre effacement, postulant de manière incessante l’équivalence entre les expressions « $F(x)$ » et « $F(\ )$ ». Cet effacement de l’indication s’est avéré à chaque fois impossible ; qui plus est, sa présence nécessaire impliquait en retour l’effacement de la référence. Car du fait de cette insignifiance

[589] Cette compréhension des signes de type « x » dans des expressions de type « $F(x)$ » en termes d’indication, est constante et stable du début à la fin de l’œuvre de Frege. Un traitement particulièrement explicite sur cette question peut être trouvé dans Frege (1892-95, p. 143).

d'un signe comme « x », une expression comme « $x^2 + 3x$ » est elle aussi dénuée de contenu[590]. Mais c'est sur rien d'autre que sur une « objectalisation » référentielle de cette expression que sont construits les parcours de valeurs (les extensions) dont le système de Frege s'est rendu tellement dépendant. Frege l'aura appris avec douleur au tournant d'un nouveau siècle qui ne sera finalement pas le sien :

> Une propriété de la langue, néfaste pour la fiabilité de l'action de penser, est sa propension à créer des noms propres auxquels nul objet ne correspond. […] Un exemple particulièrement remarquable en est la formation d'un nom propre selon le modèle « l'extension du concept *a* », par exemple « l'extension du concept étoile fixe ». Cette expression semble désigner un objet qui pourrait linguistiquement être désigné ainsi. De là sont nés les paradoxes de la Théorie des ensembles, paradoxes qui ont ruiné celle-ci. J'ai moi-même succombé à cette illusion, dans ma tentative de fondation logique des nombres, en voulant les concevoir comme des ensembles. […] …'concept étoile fixe' est une désignation de concept, et s'oppose ainsi le plus nettement à tout nom propre. Nous sommes empêtrés dans des difficultés innombrables à cause de cet idiotisme.
>
> Mais penser n'est-il pas parler ? Comment est-il possible que penser et parler entrent en conflit ? Ne serait-ce pas que le penser entre en conflit avec lui-même ? Ne serait-ce pas alors la fin de la possibilité de penser ? (Frege, 1924-25a, p. 318)

L'abattement de Frege n'a d'égal que la profondeur de sa signification. Mais si l'apparition des contradictions dans son idéographie est sans doute l'occasion de l' « échec complet »[591] du programme, elle n'en est sans doute ni la cause ni la source. Cette source résidait déjà dans la négligence de la complexité structurale définissant la fixité du nombre, ainsi que dans l'essentielle ambiguïté que celle-ci recèle. De cette ambigüité complexe, un exemple comme celui de l'expression « 111 » permet de donner le sentiment. Sans doute cette complexité n'apparaît pas comme telle lorsque nous rencontrons le signe « 111 » à côté d'une galerie de l'avenue Victor Hugo, ou en haut d'une page de *Notre-Dame de Paris*. Tout comme on ne pense pas à la série d'articulations complexes à de niveaux multiples qui ont lieu lorsqu'on énonce le mot « cheval » devant un cheval, où lorsqu'on comprend le mot « indécorable » que nous n'avons jamais entendu auparavant. Le nombre n'est pourtant pas un mot, et toute association simple aux caractères sémiotiques du mot est sans doute vouée à l'échec. Partageant certains principes articulatoires et structuraux avec les mots, le nombre

[590] Frege (1904, p. 166) : « Que désigne « $x^2 + 3x$ » ? Rien, à vrai dire, car la lettre « x » indique un nombre mais ne le désigne pas. Si on substitue à x un signe numérique, on obtient une expression qui désigne un nombre : rien de nouveau, donc. Tout comme « x », l'expression « $x^2 + 3x$ » indique sans désigner. ».

[591] C'est Frege qui parle ainsi : « Mes efforts pour apporter de la lumière sur les questions concernant le mot « nombre », les termes numériques individuels et les signes numériques, semblent avoir abouti à un échec complet » (Frege, 1924, p. 313).

s’en distingue au moins par deux aspects fondamentaux : la fixité des renvois structuraux qui le définit et le détermine, et la dimension calculatoire qu’il habilite.

V.3.4. Les synthèses de Gauss

Paradoxalement, c’est la première source d’inspiration de Frege, qui mieux que nul autre aura appris aux mathématiques la complexité calculatoire de cette fixité variable. Car en plus des défaillances propres à la structure polynomiale (et algébrique en général) quant à sa capacité de clore le système des renvois fixes[592], l’espace où ces renvois cherchent à avoir lieu peut toujours être complexifié par l’adjonction de structures nouvelles, de telle sorte que la question des limites de ces renvois se pose à nouveau. Aussi, le foisonnement de dimensions expressives du nombre dans les *Disquisitiones* de Gauss, dont nous n’avons fait qu’un recensement rapide, apparaît comme la façon de donner à ce problème du nombre son plus haut degré d’intensité. À commencer par les congruences, qui déterminent une façon nouvelle par laquelle deux expressions numériques peuvent renvoyer l’une à l’autre. En effet, à la question du renvoi de « 111 » au « 1101111 » on peut répondre par l’investissement de ces deux expressions dans une structure polynomiale qui fixerait ce renvoi en disant que « 111 » en base 10 correspond bien à « 1101111 » en base 2, ce qui est bien un effet des mécanismes décrits ci-dessous. Mais on pourrait aussi penser ce renvoi en termes de congruences et dire que « 111 » renvoie à « 1101111 » modulo 3 (ou encore, modulo 6…). Ce qui supposerait d’investir ces expressions dans une structure entièrement différente, notamment celle de la décomposition des nombres premiers. De cette façon, ces deux expressions se laisseraient ramener de manière unique à la structure :

$$p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r},$$

où la fixité du renvoi se laisserait établir grâce à un nouveau renvoi entre les expressions « 010000000001 » et « 01001000000000000010000000000000000000000000000000000000 000000000000000000000000000000000000000000001 ».

On pourrait poursuivre cette explicitation des aspects des complexités qui sont engendrées par ce moyen, mais nous espérons que l’on aura compris déjà l’essentiel : loin de constituer un élément simple, le nombre vit au croisement de toutes ces dimensions toujours indéterminées de complexité expressive, précisément là, aux points où un système de renvois fixes entre des expressions parvient à être établi au moyen des rapports entre des structures

[592] Dont le problème des nombres complexes n’est qu’un des multiples aspects. Le problème des nombres transcendants saura ouvrir toute un autre domaine de recherche, définissant le terrain d’un Théorie analytique des nombres.

hétérogènes qui peuvent s'y déceler. De cette essence structurale du nombre dans l'espace ouvert de la complexité expressive, la Théorie du nombre de Gauss a su soulever le problème, tout en offrant plusieurs solutions. Les dimensions qui se dégagent de cette complexité sont multiples, et cela est sans doute à la fois un effet et une cause de l'articulation entre les différents domaines de mathématiques que nous avons vu s'opérer sous son nom[593]. De cette complexité nous ne prétendons nullement donner ici plus que le pressentiment. Nous voudrions pourtant en souligner un aspect qui est de la plus haute importance pour le problème qui a été le nôtre. Si la confrontation entre la structure polynomiale et celle de la factorisation permet à la fois de soulever le problème de la complexité du nombre et de suggérer des voies pour sa solution, cette confrontation recèle une hétérogénéité peut-être plus élémentaire, entre l'opération d'addition et celle de la multiplication. Nous avons vu comment la question derrière le Théorème fondamental de l'Algèbre pouvait être vue comme celle d'une équivalence entre deux écritures, l'une additive, l'autre multiplicative. En mettant en avant la décomposition en facteurs premiers comme moyen privilégié de représenter un nombre, les *Disquisitiones* font de la multiplication un principe constitutif du nombre irréductible en principe à l'addition. L'exigence de se combiner avec l'addition malgré cette irréductibilité font de la complexité résultante l'élément dynamique qui anime le problème de l'essence du nombre. Cette complexité se révèle lorsque, dans la recherche des principes fondamentaux du nombre, on tente de capturer son essence en remontant à ses constituants élémentaires. En effet, qui n'a pas eu l'idée de dire que « 10 » n'est qu'un raccourci d'écriture pour « $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ ». Le nombre « 1 » serait ainsi le seul constituant élémentaire du nombre, dont les autres résulteraient par une simple composition additive, qui ne serait rien d'autre qu'un principe d'itération. Or, cela n'est vrai qu'à moitié, c'est-à-dire seulement pour l'une des lois qui déterminent les propriétés arithmétiques. Si l'on cherche les constituants élémentaires du nombre 10 selon la loi multiplicative, nous trouverons que « 10 » est un raccourci d'écriture pour « $2 \cdot 5$ ». Et sans doute on tentera d'expliquer que cette dernière expression n'est à son tour qu'un raccourci d'écriture pour « $(1+1+1+1+1)+(1+1+1+1+1)$ ». Mais d'une part il n'est pas clair par quel moyen *simple* le « 2 » dans « $2 \cdot 5$ » renvoie à la fois à « $1+1$ » et à ce que les parenthèses viennent marquer dans l'expression additive développée. D'autre part, et plus profondément, les seules propriétés de la loi additive ne sauraient pas contenir la raison pour laquelle du point de vue de la multiplication, le nombre 10 accepte d'être décomposé de cette façon, et de cette façon seulement. Et encore moins la raison de la série des termes qui n'acceptent pas

[593] Que l'on songe seulement à l'introduction de la représentation géométrique pour penser les nombres complexes dans le contexte de l'Arithmétique supérieure.

d’être multiplicativement décomposés du tout, et qui doivent dès lors être envisagés comme élémentaires du point de vue de la multiplication. La mise en avant de la décomposition des nombres en facteurs premiers comme principe privilégié de leur écriture et de leur identité oblige donc à assumer que l’hétérogénéité entre la multiplication et l’addition est constitutive, et que l’essence du nombre se joue dans l’accord possible entre ces deux principes hétérogènes, avec ses règles de composition et ses unités élémentaires respectives. Comprendre ceci, c’est comprendre en même temps à quel point l’essence d’un nombre est irrémédiablement inséparable du système de son écriture. À condition de comprendre la complexité qui se cache au cœur même de chaque signe numérique. C’est-à-dire, à condition de comprendre que dans toute écriture les deux principes mobilisés respectivement par l’addition et la multiplication sont déjà en jeu, nécessairement incarnées par les principes sémiotiques qui gouvernent son articulation incontournable. Mais à condition de comprendre aussi que l’unicité de contenu ou de sens qui en résulte est l’effet du rapport complexe entre des structures de variation, agissant toujours au risque d’une ambiguïté essentielle, contre laquelle elles arrivent pourtant à définir des plages – plus ou moins locales, plus ou moins étendues – de parfaite certitude. À condition, enfin, d’assumer que ces ambiguïtés et ces certitudes peuvent toujours être tour à tour aiguisées ou subverties par l’intervention de structures nouvelles, dont le statut et les propriétés, avant tout *sémiotiques*, deviennent mathématiques *du même coup*.

La forme polynômiale est l’une de ces structures, dont on peut voir d’ailleurs qu’elle articule l’addition et la multiplication dans un arrangement où se jouent les principes de l’écriture arabe des nombres. L’écriture en facteurs qui résulte de sa factorisation en est une autre, où l’articulation addition-multiplication est autrement réalisée sous la forme des quotients et des restes. Ces deux structures rejouent à un niveau supérieur de complexité l’hétérogénéité entre les lois additive et multiplicative[594]. C’est dans l’accord entre ces deux structures que Gauss entend poser et résoudre le problème de la nature quantitative ou numérique des expressions algébriques, et du nombre complexe en particulier. Cela ressort avec clarté du traitement que ces expressions reçoivent depuis sa dissertation de 1797, jusqu’à l’introduction de la représentation géométrique des nombres complexes, et des « entiers de Gauss » dans son mémoire de 1832, en passant par sa seconde démonstration du Théorème fondamental de l’Algèbre de 1815. Mais ce que la plupart des instruments et résultats élémentaires mis en jeu dans les *Disquisitiones* permettent de comprendre, c’est que cette

[594] À un niveau supérieur, puisque impliquant dans chaque cas déjà une certaine association entre addition et multiplication.

résolution passe de façon privilégiée par une série de résultats assurant des renvois fixes entre des expressions qui combinent les deux opérations d'addition et de multiplication.

Ces instruments et résultats constituent l'appareillage par lequel l'espace de l'Arithmétique qui accompagne, oriente et soutient le cheminement de Gauss, se structure et se définit. L'articulation qu'ils assurent entre addition et multiplication se laisse voir déjà dès le début de l'ouvrage, avec l'introduction de la congruence qui, en tant qu'instrument fondamental de l'Arithmétique supérieure, se présente, comme nous l'avons vu, comme une relation entre des nombres exprimés sous forme d'une combinaison des deux opérations ($b + ka$). Le Théorème fondamental de l'Arithmétique établit, quant à lui, l'unicité de l'écriture multiplicative de tout nombre, et fournit ainsi un rapport fixe avec toutes les écritures additives qui lui sont associées, notamment celles qui sont uniques, comme celle polynomiale des bases, ou encore celle de l'itération de l'addition sur l'unité. Le théorème de Bézout, dont nous avons déjà montré l'importance dans le cadre d'une démonstration non géométrique du théorème fondamental de l'Algèbre, ainsi que l'articulation particulière qu'il réalise entre addition et multiplication, est introduit dans la seconde section des *Disquisitiones* sous la forme $ax = by \pm 1$, pour a et b premiers entre eux[595]. Il prépare une série de résultats concernant les congruences linéaires, dont l'algorithme d'Euclide, et plus important encore, le célèbre *Théorème des restes chinois*. Ce dernier théorème porte sur des systèmes de congruences. Plus précisément, il assure l'existence d'une solution pour un système de congruences de type :

$$x \equiv r_1 \ (\mathrm{mod.}\, m_1)$$
$$x \equiv r_2 \ (\mathrm{mod.}\, m_2)$$
$$\dots$$
$$x \equiv r_k \ (\mathrm{mod.}\, m_k),$$

où les r_i sont des entiers donnés et les m_i sont des entiers deux à deux premiers entre eux. Cette solution est d'ailleurs unique, modulo le produit de tous les m_i. Autrement dit, ce résultat assure que, étant donné une série quelconque de nombres, on peut toujours trouver un autre nombre auquel ils renvoient de manière simultanée, suivant des modularités respectives convenablement choisies. Le calcul effectif de cette solution repose d'ailleurs sur le théorème de Bézout. L'importance de ce résultat par rapport aux problèmes que nous avons soulevés réside dans ce qu'il garantit que, dans le cadre de la structure de la modularité, *il est toujours possible de trouver la raison du renvoi entre des nombres quelconques*. Dans ce sens, ce théorème contient à sa façon *le principe d'une fonctionnalité expressive généralisée* dans le

[595] Gauss attribue la preuve de ce théorème à Euler, et signale aussi que Lagrange l'a obtenu par d'autres méthodes. Il reconnaît en annexe qu'il était déjà donné par Bachet (Gauss, 1801/1989, pp. 12-13).

cadre des nombres entiers, du moins dans le sens du renvoi qui est lié à cette notion ; ce qui fait de la modularité le principe qui commande sa dimension articulatoire. Pour le reste, des résultats comme celui du Théorème fondamental de l'Algèbre, et ceux qui y sont associés dans les pages des *Disquisitiones* (notamment dans la cinquième section), non moins que les résultats concernant les congruences de degré supérieur (lois de réciprocité), ou la théorie des formes, élargissent sans la fermer la liste de moyens par lesquels Gauss opère les synthèses qui permettent de tisser des renvois fixes entre des expressions articulées, dans l'espace virtuel ouvert par l'hétérogénéité de ses structures.

V.3.5. De Gauss à Gödel

Naturellement, une telle conception, ou plutôt un tel faisceau de pratiques à la fois mathématiques et sémiotiques sur les nombres, devait conduire à l'élaboration d'une notion de nombre orientée par celle de primalité comme principe de définition des éléments numériques irréductibles, dont l'ensemble des nombres résulterait par combinaison, au moyen de deux lois hétérogènes. Ce sera, on le sait, la voie empruntée par Kummer, suivant la piste de la décomposition unique en facteurs premiers pour des structures d'entiers où elle faisait défaut[596]. Les travaux de Kummer constitueront le point de départ de la Théorie des *idéaux*, à laquelle Dedekind donnera toute sa portée générale avec sa Théorie des anneaux[597].

Pourtant, malgré la multiplicité des dimensions sémiotiques imbriquées dans l'ensemble de ces pratiques, de ces problèmes et de ces solutions, le développement d'une conception du nombre en accord avec elles a eu lieu à l'écart de toute réflexion consciente et explicite sur la nature des signes. La méfiance dont Gauss témoignait envers l'arbitraire des signes, malgré la pratique inédite des signes qu'il proposait, s'est perpétuée au moins jusqu'à Dedekind. On a vu comment celui-ci faisait l'apologie des concepts contre les représentations ou les expressions arbitraires, au nom d'une primauté des propriétés internes sur les formes externes. Et pourtant, nous ne saurions y voir que l'évidence d'un second rendez-vous manqué entre la tradition gaussienne et le projet frégéen de formalisation du sens. Car l'Expressionnisme formel que Frege élabore avec tant de minutie ne se présente comme rien d'autre que comme un système de moyens effectifs par lesquels le concept peut être dégagé au milieu des expressions comme des propriétés internes se dégageraient à partir d'une multiplicité de

---

[596] Les « entiers cycliques », où l'on remarque précisément que les nombres complexes ne jouissent pas de cette propriété d'unicité. Sur les idéaux de Kummer, voir Bölling (2007).

[597] Sur la Théorie des idéaux, que nous ne saurions ici que mentionner, on pourra consulter Bell (1927), Dugac (1976), Edwards (1980; 1983) ou Avigad (2006).

formes externes. C’est bien là tout le sens de la notion de contenu dans son articulation à son autre le plus propre, l’expression. C’est bien là le sens d’une logique du sens.

Nous ne saurions dire quelles auraient été les conséquences pour l’Arithmétique sous la forme de cette Théorie des nombres si elle était arrivée à réfléchir et à expliciter la conception du signe et de la signification qu’elle incarnait peut-être à son insu. Probablement aucune. Car après tout qu’elle ne l’ait pas fait (ou du moins pas sous une forme générale et cohérente justifiant son identification) indique bien qu’elle n’en a pas eu véritablement besoin pour se développer comme telle (à la différence de l’Algèbre abstraite anglaise). Mais l’important pour nous n’est pas tant dans les effets d’une telle réflexion strictement sémiotique sur les mathématiques elles-mêmes, auxquelles nous reconnaissons, fût-ce pour des raisons méthodologiques, le statut d’un domaine de pratiques sémiotiques autonome et souverain. L’important pour nous, en revanche, se trouve dans les conditions que ces pratiques fournissaient pour la réussite d’un Expressionnisme formel résultant, malgré tout, des problèmes posés dans le cadre de cette arithmétisation si particulière de l’Analyse, et qui a dû payer du prix de la figuration le fait de s’en être détaché.

La façon dont cet expressionnisme émerge du problème de l’articulation entre les pratiques fonctionnelles et numériques enracinées dans la tradition de Gauss peut être entrevue, comme nous l’avons indiqué, dans la thèse d’Habilitation de Frege de 1874. Avec la même clarté d’ailleurs que l’on y peut voir le germe de ce qui finira pour détacher l’Expressionnisme des bases mêmes qui le soutenaient. En effet, le rejet d’un fondement géométrique pour la généralisation de la notion de grandeur ou de quantité pousse Frege à proposer une méthode proprement expressive (selon un sens de ce mot que son travail logique s’occuperait de donner par la suite). On verra ainsi Frege explorer les différents domaines de l’Analyse fonctionnelle à la recherche d’un motif « quantitatif » qui se dégagerait au niveau même de leurs expressions, et qui est lui-même exprimé en termes fonctionnels. Dans la mesure où un motif de ce type pourrait y être repéré, le domaine en question pourra être envisagé comme un « domaine quantitatif ». Si nous appelons expressive cette démarche, c’est dans la mesure où la propriété quantitative interne est dégagée comme l’invariant des formes externes, de telle sorte qu’un concept de quantité puisse être construit à partir des expressions analytiques. Une telle démarche hérite de bien plus que de l’inspiration des pratiques gaussiennes. Pourtant, elle les trahit sur un point capital. Car au moment de concevoir le motif dont l’actualisation dans un domaine expressif justifierait qu’on le traite comme un domaine quantitatif (ce qui veut tout simplement dire : au moment de proposer un concept de quantité), Frege se contente de le définir selon le fonctionnent de la simple addition[598]. Une définition de l'addition en termes récursifs s'en suit, suivant une fonction conçue en termes de « succession »[599]. La multiplication ne tardera pas d'ailleurs à se voir réduite à l'addition. La porte est ainsi ouverte à d'autres arithmétisations, dans lesquelles la simplicité sémiotique du nombre ne pourra pas coexister avec sa complexité expressive.

Il faudra attendre l'irruption de Gödel dans la grande histoire de la logique pour que la série des déterminations formelles issues de la tradition arithmétique inaugurée par Gauss soient mobilisées à l'intérieur même de la logique, où elles pourront enfin exercer toute leur puissance proprement sémiotique. Le caractère expressionniste de l'approche de ses célèbres résultats de 1931 transparaît dès le début de la présentation des résultats à exposer, où les formules d'un système formel sont envisagées dans leur aspect strictement externe[600]. C'est à ce niveau purement expressif que Gödel arrivera à associer de manière inattendue logique et Arithmétique, exactement là où Frege avait tenté à sa manière de le faire, avant que les représentations de la volonté fondationnelle de la logique n'effacent ce travail constitutif essentiel de la formalisation du sens. Et c'est précisément à ce niveau que Gödel fera ce que Frege n'a pas su faire, à savoir assumer la complexité constitutive des dimensions expressives du nombre pour les investir de toute leur portée logique. Ou plus précisément, obliger à les assumer, en les faisant jouer contre les représentations qui les recèlent. Aussi, Gödel fera-t-il appel aux instruments privilégiés de la Théorie des nombres pour bâtir tout l'appareillage sémiotique d'un système qui se révèlera excessivement expressif [601].

Ce n'est sans doute plus le moment de faire la liste et l'analyse de l'ensemble de ces instruments, en les rapportant simultanément à Frege et à Gauss. Qu'il suffise seulement de dire, concernant le rapport au premier, que les expressions logiques sont associées au fonctionnement des nombres et que leur articulation est effectivement définie par des moyens fonctionnels, en limitant les fonctions aux fonctions purement arithmétiques ou entières[602]. Les rapprochements semblent s'arrêter là, puisque ce n'est certainement pas de la même façon

---

[598] Frege (1874, p. 57) : « Or quel est le sujet de ces propositions fondamentales dont l'arithmétique pousse comme d'une graine ? La réponse est : addition ; car les autres méthodes de calcul résultent de celle-ci. C'est pourquoi il y a une connexion si intime entre les concepts d'addition et de quantité que le dernier ne peut pas être saisi du tout sans le premier ».

[599] Frege (1874, p. 58) : « Si l'on répète une opération f en lui soumettant à nouveau constamment ses résultats, on peut regarder les applications répétées de l'opération f comme de nouvelles opérations. Or il est clair que deux ou plus des opérations obtenues de cette manière, ff, fff…, agissant en succession sur un objet, peuvent toujours être remplacées par une seule opération consistant de la même façon en une répétition de f. »

[600] Gödel parle des formules d'un système formel « considérées extérieurement » (*äußsserlich betrachtet*) comme des suites finies de signes élémentaires (1931/1986, p. 146).

[601] Girard indique que Gödel reprend certains de ces instruments d'un cours sur les corps de classes qu'il venait de suivre. Cf. Girard (2006, p. 39).

[602] Que Gödel appelle « *zahlentheoretische Funktion* », et qu'il explicite comme celle dont le domaine de définition est la classe d'entiers non négatifs et les valeurs sont des entiers non négatifs. Cf. Gödel (1931/1986, p. 157).

que Frege et Gödel envisagent et la forme numérique des termes et formules, et leur articulation fonctionnelle. Pourtant, après avoir montré quelques aspects de la complexité de l'Arithmétique dans sa dimension sémiotique, ces deux approches de la numéricité et de la fonctionnalité ne devraient pas apparaître comme différant en nature. Quant à la Théorie des nombres, les emprunts sont plus explicites et fort connus. Ils déterminent l'essentiel de l'étonnante et dûment célèbre codification à laquelle Gödel se livre, et à laquelle il doit l'essentiel de ses résultats. Nous avons eu l'occasion d'évoquer au moins deux de ces instruments empruntés, d'une importance décisive pour les démonstrations de Gödel : la décomposition unique en facteurs premiers et le Théorème des restes chinois. Ces deux résultats cruciaux de la Théorie du nombre sont mis en jeu par Gödel en raison de leurs propriétés sémiotiques inhérentes. Le premier est employé comme structure sous-jacente des expressions : la décomposition en facteurs premiers code les formules en faisant jouer les différents aspects sémiotiques que nous y avons signalés. Le second est utilisé comme mécanisme universel de la fonctionnalité : il code par un nombre unique les différentes évaluations possibles d'une fonction arithmétique récursive quelconque. S'accomplit ainsi la jonction interne mais problématique entre articulation et inférence, à laquelle l'Expressionnisme frégéen prétendait, sans véritablement parvenir à atteindre.

Que toutes ces ressources aient été mobilisées et que cette jonction ait été accomplie dans une structure où les signes sont signes de signes uniquement pour installer de manière irrémédiable l'ambiguïté et le paradoxe au centre de la pensée logique, voilà la vérité que l'Expressionnisme avait peut-être à assumer pour qu'enfin une logique du sens puisse être envisagée comme telle. Cet accomplissement a ouvert sans doute une nouvelle période, en établissant de nouvelles conditions pour la pensée logique, ou plus généralement pour la formalisation du sens. Toute tentative pour négliger ces conditions, dissimulera dès lors sans façon le renoncement aux enjeux du projet toujours renouvelé d'une logique du sens. Et avec eux, à n'en pas douter, ceux aussi de la philosophie toute entière.

Conclusion

Dans le flou inégal qui se découvre lorsque l'on a écarté les images que la logique formelle a projetées sur ses origines récentes, une chose au moins se voit avec clarté : ce dont il s'agit dans la logique formelle, ce sont des *signes*. On dira que cela a toujours été le cas, depuis Aristote jusqu'à Russell et au-delà. Mais bien que la logique, comme bien d'autres choses, n'ait jamais pu se passer d'un travail – plus ou moins minutieux, plus ou moins conscient – sur les signes dont elle se servait, ce n'est à aucun moment des signes en tant que tels qu'elle parlait ou qu'elle voulait parler[603]. L'aménagement des signes a toujours constitué une étape préliminaire pour la saisie méthodique de l'être, de l'événement, de la pensée ou du langage dans le meilleur des cas[604]. De fait, la logique traditionnelle s'est si peu occupée des signes en tant que tels, que le véritable souci des signes a dû lui arriver *du dehors*. C'est là un fait que le regard le plus rapide jeté sur le processus de mathématisation de la logique devrait déjà suffire à établir : à la différence de Whately ou de Mill, de Herbart ou de Sigwart, les deux artisans de ce que l'on appelle de nos jours « logique formelle » étaient de véritables mathématiciens, qui ne sont devenus des logiciens qu'en parcourant dans toute sa sinuosité la voie d'une réflexion sur les signes mathématiques, à la fois réclamée et orientée par les mathématiques elles-mêmes. De ce point de vue, la mathématisation ou la formalisation de la logique ne constitue pas la scientificité enfin acquise d'un savoir millénaire, au terme d'une évolution guidée par la rationalisation progressive de ses principes et de ses procédures. Typiquement attachée à la pensée et au langage, la logique n'est devenue formelle qu'en se reconnaissant dans une réflexion, ou plutôt dans une construction, qui lui était par principe étrangère, concernant le fonctionnement et la nature des signes dans les mathématiques, par les mathématiques et pour les mathématiques. Ou plutôt, elle ne l'est devenue qu'en étant

---

[603] Le cas des Stoïciens réclamerait sans doute un traitement spécial. Pour la théorie stoïcienne du signe on pourra regarder le travail classique d'Émile Bréhier (1962), l'article de Verbeke (2006) ainsi que l'ouvrage collective édité par Manetti (1996).

[604] Ce qui explique pourquoi, après tant d'années de réflexion logique, ce ne fut que dans la seconde moitié du XIX^e^ siècle que les premiers « systèmes formels » de signes commencèrent avec timidité à être dessinés pour la logique.

capturée, réduite et rendue obsolète par une *analyse sémiotique des mathématiques* qui, la dépassant de toutes parts, se trouvait capable de rendre compte incidemment des mécanismes de la Syllogistique où la logique traditionnelle tendait à s'enfermer.

Le plus surprenant pourtant est que, en devenant logiciens, ces mathématiciens soient devenus philosophes du même coup. En effet, dans le cours sinueux de son déploiement, le mouvement par lequel la Syllogistique a été supplantée sans façon a dû se confronter inexorablement à la série des thèmes qui définissaient traditionnellement l'espace problématique de la vieille métaphysique. C'est ainsi que nous avons vu des discussions en apparence techniques, comme celle des raisons pour l'acceptation d'une expression comme « $\sqrt{-1}$ » en mathématiques, des conditions pour l'efficacité de l'égalité $\varrho^m f(\pi)u = \lambda^m f(\pi)\varrho^m u$, ou des effets d'imposer des lois comme $x^2 = x$ ou $x^3 = x$ ou encore $x + x = x$, pour les termes algébriques ; ou d'une manière différente, des réflexions sur le sens de « $x + 5$ », ou même de « $x + 5 = 7$ » comme « $f(x)$ », sur le rapport entre des expressions comme « $x^2 - 4x$ » et « $x(x - 4)$ », sur les usages d'une écriture du type « ἐ$f(\varepsilon)$ », ou sur les conditions, enfin, qui pourraient faire que $f(a) = g(a)$ – nous avons vu ces discussions, donc, évoluer jusqu'à atteindre la position *générale* de problèmes tels que celui de l'essence de l'identité ou de la différence, ou celui du rapport des parties au tout, de la place de l'intuition, du rapport entre objets et concepts, des formes de la répétition, des effets de l'espace et du temps, des facultés de l'esprit, de la valeur de ses représentations, du statut du langage, de la vérité et du sens, voire de l'existence, de la nature des formes, de celle des contenus… En devenant l'espace où les problèmes logiques se laissaient replacer depuis une perspective inédite, la sémiotique des mathématiques est devenue le lieu où les problèmes typiquement métaphysiques pouvaient être traités à nouveaux frais. Ainsi, de la même façon que Boole et Frege s'empressaient de montrer la possibilité de capturer les déterminations de la Syllogistique dans leurs systèmes respectifs aussitôt construits, ils n'ont pas hésité à confronter avec le même empressement les conclusions qui découlaient des mécanismes ainsi établis avec les postulats classiquement soutenus par la tradition de la métaphysique occidentale. De ce point de vue, le processus de mathématisation de la logique a impliqué la naissance d'un principe critique antimétaphysique pour la philosophie, dont le XX^e siècle s'emploiera à explorer la puissance, et aussi les limites.

Certes, la philosophie n'a pas attendu le déclenchement d'une mathématisation de la logique pour se doter de principes critiques contre la métaphysique. L'empreinte kantienne qui sera celle de la philosophie tout au long du XIX^e siècle (et au-delà) est là pour en témoigner. D'autre part, les réflexions sur les mathématiques du XIX^e siècle n'ont certainement pas été à l'abri des formulations philosophiques qui influençaient leur temps. Nous avons mentionné, par exemple, l'importance de Trendelenburg pour Frege (non moins que pour Schröder), et à travers lui de Leibniz et de la philosophie post-idéaliste allemande. La philosophie de Locke, de Hume ou de Mill pourrait sans doute occuper une place analogue pour la logique algébrique anglaise. Mais malgré ces influences diffuses, l'indépendance par rapport à la tradition philosophique dont témoignent l'évolution de leurs problèmes et la construction de leurs solutions reste tout de même surprenante. Les recours à l'autorité philosophique n'existent guère dans les textes, et les noms des philosophes ne sont généralement convoqués que pour être critiqués ou contestés. L'originalité, et même la force d'un tel geste, après tout philosophique, réside pourtant moins dans la spontanéité des réflexions, que dans l'efficacité de ce qui en était la source. Cette source, ces nouveaux logiciens ne cessent pas de la nommer et de l'exhiber : *ce sont les signes*. Et plus précisément, les signes mathématiques, c'est-à-dire, les signes que la *pratique* mathématique s'était vue forcée de créer, introduire, façonner, accepter et questionner comme résultat de sa propre évolution interne. Si bien que, de Woodhouse à Boole et aux Booléens, des premières recherches mathématiques de Frege jusqu'à sa correspondance avec Russell, l'analyse sémiotique des mathématiques apparaît, de manière massive, assumée et explicite, comme le sol sur lequel poussa spontanément une réflexion de type nouveau sur des thèmes anciens, une réflexion qui ne tarderait pas à se présenter comme philosophie.

Si ces auteurs refusaient pourtant avec énergie tout appel à la métaphysique, c'est que leurs formulations étaient dépourvues de toute prétention spéculative. Se développant au plus près d'une pratique sémiotique des mathématiques pas toujours irréprochable, la sémiologie naissante où s'agençaient ces énoncés philosophiques n'a jamais cessé d'avoir pour but et pour critère ultime les effets de stabilisation et de consistance qu'elle pourrait avoir sur ces pratiques. Ce faisant, la formalisation du sens, comme processus historiquement déterminé, et associé aux effets de cette mathématisation de la logique sur la compréhension du sens et de la signification, définissait un domaine nouveau dont les énoncés typiquement philosophiques pouvaient être justiciables. Elle attachait ainsi l'activité productrice de la philosophie (productrice de concepts, d'énoncés, de consistance) au terrain d'une pratique où cette activité pouvait être évaluée et mesurée, où elle acceptait d'être confrontée à d'autres créations semblables devant des problèmes dont le traitement viendrait confirmer ou infirmer leur efficacité. Dans ce terrain, cette efficacité, tout autant que les objections dont elle pouvait être l'objet, se laissaient *exhiber*. C'est sur ce terrain encore embryonnaire mais déjà solide que les discussions entre Boole et Cayley autour de l'interprétation ou de la signification prennent appui, ainsi que celle de Boole et de Jevons sur la différence et la répétition. C'est sur lui aussi que Frege peut montrer à Schröder que le langage peut ne pas être abstrait, ou que le contenu peut être formel, comme c'est sur ce terrain également que Russell peut proposer à Frege des formes multiples de l'identité, des touts qui ne seraient pas des objets, ou des individus qui n'auraient pas de sens ; et c'est encore sur lui que Frege peut récuser tant les idées subjectives que la référence généralisée, au nom d'un sens multiple qui reste pourtant lié aux objets et à la vérité.

On peut dire que de cette manière, la mathématisation de la logique a inventé pour la philosophie une nouvelle *positivité*. Seulement, on comprend mal une telle affirmation si l'on veut en tirer la conclusion immédiate que la philosophie a accédé par là aux conditions qui pourraient faire d'elle un savoir « positif ». Pour une raison au moins, cette positivité est celle du signe. Or la positivité d'un signe, c'est-à-dire l'ensemble des conditions qui font qu'un signe se laisse reconnaître comme gisant là, devant nous, dans toute l'évidence de leur être, cette positivité-là est *par essence* hautement *problématique*. On ne reconnaît pas un signe de la même manière que l'on reconnaît ou l'on constate la présence d'un caillou ou d'un visage, ou encore d'un fermion ou d'un gène ; même si (ou précisément parce que) pour reconnaître un gène ou un fermion il faut reconnaître des signes[605]. Car, comme la linguistique du XX^{e} siècle le montrera, pour reconnaître un signe, il faut d'abord le présupposer, c'est-à-dire le poser comme étant déjà là[606]. Plus précisément, la reconnaissance d'un signe comme tel implique l'action préalable d'une structure complexe *aux effets de laquelle l'être du signe se réduit* [607]. Ce n'est pas pour autant que le signe est moins « positif ». Les signes sont bien « là », devant nous, comme l'est chacun des mots de cette page devant son lecteur, et constituent bien en tant que tels l'objet d'une expérience. « Positif », le signe l'est donc dans un sens très singulier. Cela ne cesse pas d'être le cas à l'intérieur du domaine prétendument aseptisé des mathématiques, où une série innombrable de difficultés d'ordre sémiotique semblent être écartées par principe. Qu'il suffise de penser à l'attitude de Woodhouse et de Gauss devant « le même » signe « $\sqrt{-1}$ ». Dans un tel signe Woodhouse ne voit que la marque de l'extension de la portée des opérations hors du domaine quantitatif, alors que Gauss ne voit que l'extension du domaine quantitatif lui-même. Ce qui veut dire que le premier ne peut le reconnaître que dans le cadre d'une structure opératoire abstraite (constituée par l'addition, la multiplication, la soustraction et la division, comme des opérations non quantitatives), alors que le second ne le reconnaît que dans le cadre de la

---

[605] Patrice Maniglier a exploré et mis en avant les multiples dimensions de cette positivité problématique du signe, dans sa belle étude sur Saussure : *La vie énigmatique des signes* (2006).

[606] C'est ce qui conduira Saussure à poser l'antécédence problématique de la « langue » sur la « parole ». Voir sur ce point la discussion sur les « identités » dans Maniglier (2006, p. 82 sqq.).

[607] L'illustration de cette circonstance par la référence au jeu d'échecs est classique : un pion n'est *vu* comme tel que par rapport à tous les autres pièces, auxquelles il est lié par un ensemble déterminé des règles. Ce ne serait qu'une banalité si l'on ne comprenait pas que le pion *n'est rien d'autre* qu'un effet de ce faisceau des rapports et des règles (la preuve étant que l'on peut toujours remplacer une pièce perdue par n'importe quel autre objet, à condition de ne pas altérer l'ensemble de ces rapports), et que parmi les conditions pour qu'un tel « être » existe comme tel, on compte une complexité non réductible du système de rapports et de règles.

structure numérique, définie par les expressions du type « $a + b\sqrt{-1}$ ». Qui plus est, pour que chacun de ces deux mathématiciens puisse voir ce signe comme il le voit, toutes sortes de constructions et de contorsions deviennent nécessaires, impliquant autant de nouvelles ambiguïtés et divergences. Ainsi, par exemple, comme résultat du développement de ces deux positivités respectives pour le signe « $\sqrt{-1}$ », sur le « même » plan géométrique où Babbage ne verra que des figures, Gauss arrivera à voir les nombres complexes. Et la même chose peut être dite du statut des signes en apparence bien plus inoffensifs comme « $a + x = b$ », « $2 + 5 = 7$ » et jusqu'à « 111 », dont l'ensemble des pages précédentes raconte suffisamment l'histoire délicate.

Étrange positivité que celle du signe. Elle ne dispose ses éléments avec évidence devant nos yeux qu'en semant entre nous et eux embûches et fausses pistes, glissements et impasses, équivoques et circularités. Du fait qu'il est déterminé à l'interface de plusieurs structures, le signe reste toujours intrinsèquement ambigu. De cette ambiguïté les mathématiques ont tiré les plus grandes prouesses, lorsque « regardé autrement », un certain signe mathématique s'avérait appartenir avec la même évidence à deux structures *à la fois* : cela est le cas, par exemple, des exposants des formules de Newton et de Leibniz qui appartiennent à la fois à l'Algèbre et au Calcul différentiel ; ou du signe « $+$ » qui appartient pour Woodhouse à la fois au calcul numérique (portant sur des signes numériques) et à l'opératoire algébrique (portant sur des lettres) ; ou du signe « $=$ » qui peut, comme dans le cas de Legendre, exprimer à la fois l'égalité arithmétique ou la congruence ; ou encore du signe « 3 » qui est, chez Gauss, à la fois un nombre, et le représentant de tous les nombres qui lui sont congruents suivant un certain module ; ou enfin, d'un point dans un plan, qui peut être vu à la fois comme un objet géométrique impliquant des propriétés topologiques, et un élément arithmétique comportant des propriétés algébriques… Des domaines entiers des mathématiques dépendent de ces « découvertes » (l'Algèbre abstraite, la Théorie des nombres, la Topologie algébrique). Mais de telles prouesses sont inséparables d'une élaboration, d'une « résonnance intuitive particulière » dans un « langage propre »[608], qui trouve son lieu dans la multiplicité dispersée, incertaine et problématique du signe, et du signe mathématique non moins que tout autre, tel qu'il se présente, tel qu'il est « là ».

[608] C'est Bourbaki qui s'exprime ainsi dans un passage si beau qu'on ne peut s'empêcher de le citer : « Or, chaque structure apporte avec elle son langage propre, tout chargé de résonances intuitives particulières […] ; et pour le chercheur qui brusquement découvre cette structure dans les phénomènes qu'il étudie, c'est comme une modulation subite orientant d'un seul coup dans une direction inattendue le courant intuitif de sa pensée, et éclairant d'un jour nouveau le paysage mathématique où il se meut ». (Bourbaki, 1998, p. 42). On ne s'étonnera pas, au demeurant, que l'exemple choisi par Bourbaki pour illustrer cette situation soit celui de la représentation géométrique des imaginaires. Pour une analyse de ce texte dans le cadre du problème du structuralisme en mathématiques, voir Rabouin (2011).

De cette élaboration, la logique formelle n'est que l'effet de surface. En tant que résultats de ce processus, les systèmes logiques susceptibles d'être érigés sur la base de cette positivité singulière sont habités par les incertitudes que cette positivité comporte. C'est d'ailleurs leur vocation que de réduire autant que possible cette incertitude. Que de tels systèmes aient été effectivement construits veut dire que cet espace sémiotique qui s'interpose entre les mathématiques et la logique a trouvé une organisation relative et une certaine stabilité, en dépit de leur incertitude essentielle. Autrement dit, malgré l'équivoque qui lui revient en droit, le domaine de l'analyse sémiotique des mathématiques parvient à architecturer *de fait* des régimes de détermination suffisamment généraux et stables pour supporter la constitution de ces systèmes rigoureux de signification que seront les systèmes de la logique formelle. Cette stabilisation n'implique pas cependant une clôture ou une résolution définitive des ambiguïtés, et la pluralité de ces régimes trahit encore la persistance d'une ambivalence au sein des signes « formels ».

C'est de cette façon que, en prenant comme point de départ l'opposition en surface de deux systèmes logiques, celui institué par les Booléens et celui effectivement proposé par Frege, nous sommes parvenus à identifier l'existence de deux régimes à l'intérieur de l'espace de la formalisation du sens, prenant tous les deux racine dans des développements mathématiques du début du XIX^e^ siècle. Après le long parcours qui nous a permis de les comprendre et de les problématiser dans le détail, il convient ici de rassembler les éléments dispersés de chacun de ces deux régimes, pour les présenter dans l'unité qu'ils composent. Pour une meilleure compréhension de cette récapitulation systématique, on pourra se référer au tableau comparatif que nous insérons en annexe, dont les pages suivantes constituent un commentaire détaillé.

*
* *

Le premier de ces régimes, que nous avons appelé « *Abstraction symbolique* », est directement associé à la naissance de l'*Algèbre abstraite* anglaise. Nous avons vu se développer ce nouveau domaine ou discipline mathématique, comme une réponse à des questions provenant des dimensions algébriques décelées au niveau même des objets et propriétés de l'Analyse, sous l'inspiration du projet d'*Analyse algébrique* de Lagrange, et de la méthode du *calcul d'opérations*. Le manque de rigueur attribué à certaines techniques pourtant efficaces de cette pratique mathématique entraîna l'inscription des objets et propriétés sur lesquels ces techniques portaient, dans un plan où ils n'apparaissaient que comme des propriétés des signes. Cette ouverture de l'espace sémiotique comme espace immédiatement associé aux mathématiques fut sans doute l'originalité des algébristes anglais. Elle fut si radicale, d'ailleurs, qu'elle impliqua une sémiotisation générale de l'espace des mathématiques, à travers laquelle s'accomplissait l'aménagement d'un espace privilégié pour une Algèbre de type nouveau.

La sémiotisation de l'espace des mathématiques motivée par ces pratiques algébriques particulières a permis de préciser les fonctionnements des signes qui lui étaient associés. C'est ainsi que l'espace circonscrit dans lequel les algébristes anglais se sont placés fut celui des signes « généraux » incarnant des propriétés « générales » (à la différence, par exemple, de celui de la Géométrie, dont les signes sont individuels). Cette généralité a été aussitôt localisée au niveau du fonctionnement des *signes d'opération* : « $+$ », « $\times$ », etc. Mais elle ne se laisse voir en tant que telle que lorsque la singularité des signes numériques est écartée au moyen de leur littéralisation (c'est-à-dire par le passage, par exemple, de « $x^2 + 3 = 4x$ » à « $x^2 + a = bx$ »). Cette *littéralisation* est, dans ce cadre, le modèle de sémiotisation par lequel se trouve capturée la généralité que les algébristes reconnaissaient au niveau des signes opératoires. Certes, la simple littéralisation des signes numériques n'a rien d'original au XIX[e] siècle ; elle sert ici uniquement à faire ressortir l'aspect général (c'est-à-dire, plus que numérique ou calculatoire) des signes d'opération. Mais la véritable découverte ou invention qui a lieu à ce niveau des fonctionnements de la strate sémiotique, consiste dans la littéralisation des opérations elles-mêmes, qui accèdent ainsi à une généralité analogue. Les signes littéraux qui symbolisent, non pas de nombres, mais des opérations particulières, sont envisagés comme des *opérateurs*, c'est-à-dire des signes dont la fonction est d'agir de manière opératoire sur d'autres signes. L'opérateur constitue donc l'unité de fonctionnement délimitant la région propre à l'Abstraction symbolique, au niveau inférieur de sa strate sémiotique.

Mais une telle sémiotisation comporte une perte de détermination, puisque des opérations très différentes (comme la différentiation et la multiplication, par exemple) se voient recevoir le même statut sémiotique. C'est pourquoi cette sémiotisation par littéralisation des opérations vient accompagnée des *lois combinatoires*, exprimées sous la forme d'égalités, qui définissent le comportement des signes ainsi conçus à l'égard d'autres signes du même type. Ainsi, un signe général d'opération « f » peut se voir déterminé par des lois comme :

$$f(a) + f(b) = f(a + b)$$

$$f_{,}f(a) = ff_{,}(a),$$

ce qui permet de définir les propriétés générales d'opérations (dans ce cas, la distributivité et la commutativité). Par leur soumission à ces lois, ces opérateurs offrent un statut précis aux propriétés qui agissaient, effectivement mais de manière irréfléchie, au niveau des pratiques mathématiques (telles que le calcul d'opérations).

Considéré dans son existence purement sémiotique, l'opérateur consiste dans un signe envisagé comme simple, inarticulé, inanalysable ou atomique (comme une lettre), maintenant un rapport supposé de généralité par rapport à des signes particuliers capables éventuellement de prendre sa place, et avec lesquels les liens sont arbitraires par ailleurs. Les algébristes appelleront un tel signe un *symbole*. Sa détermination provient de son fonctionnement, qui réside dans sa combinaison avec d'autres signes du même type, suivant des lois combinatoires établies explicitement, et nommées conséquemment « lois symboliques ». De ce fait, toute articulation des symboles est *externe*, c'est-à-dire qu'elle n'a lieu que par la composition de symboles différents. Les symboles étant « atomiques », leur *différence* au niveau sémiotique est de l'ordre de la *distinction* simple et totale ; il ne saurait pas y avoir de distinctions partielles entre deux symboles : soit ils sont distincts (comme « a » et « b »), soit ils sont le même (comme « a » et « a »)[609]. L'indistinction entre deux symboles est d'ailleurs vécue comme *répétition*, ce qui prend dans ce contexte opératoire le sens de l'*itération*. Enfin, le domaine sémiotique des symboles est pensé comme *homogène*, ce qui veut dire que le statut des symboles est, du moins quant à leur fonctionnement sémiotique, le même pour tous : rien n'empêche, du point de vue de leur statut sémiotique, qu'un symbole agisse en tant qu'opérateur sur un autre et inversement. Cette homogénéité, d'ailleurs, rend le fonctionnement des signes particulièrement enclin à établir des *symétries* (comme la distributivité ou l'associativité, par exemple).

L'ensemble de ces caractéristiques définit ainsi une région de consistance minimale pour les fonctionnements sémiotiques provenant des zones spécifiques des mathématiques qui sont à la base de ce processus de sémiotisation. Pourtant, cette consistance ne saurait s'établir et même fonctionner comme telle sans un réseau, rudimentaire mais efficace, de catégories ou de concepts, grâce auquel les mécanismes particuliers de cette consistance trouvent une intelligibilité, une stabilité et une organisation. Dans ce sens, cette conceptualité, que nous avons qualifiée de « sémiologique », ne vient pas après un fonctionnement sémiotique déjà donné, mais se construit progressivement et agit à même ce fonctionnement des signes, qui évolue, quant à lui, au rythme de cette construction. La notion de *généralité* comme propriété du signe à chercher ou à construire est sans doute la plus immédiate (et en conséquence, irréfléchie) de ces catégories. C'est elle qui opère les premières distinctions et définit le terrain où un fonctionnement sémiotique est à mettre en marche. Elle reste pour cela la plus

[609] La linguistique structurale parlerait peut-être ici d'unités distinctives, « oppositionnelles » au sens de Saussure.

disséminée et la plus implicite des catégories sémiologiques de ce régime. Celle de *symbole* lui correspond d'ailleurs, dans l'ampleur de sa portée, mais d'une façon déterminée cette fois-ci : elle qualifie de manière précise le statut du signe capable d'assumer et d'effectuer cette généralité spécifique. Le concept de symbole réunit la série des propriétés et fonctionnements sémiotiques de ce régime (littéralisation, composition combinatoire, soumission à des lois, distinction simple…) et leur offre un statut unifié. De cette façon, « symbolique » vient qualifier tout mécanisme sémiotique trouvant sa place dans cet espace : les signes sont des symboles, les opérations sont symboliques, les lois sont symboliques, les égalités sont symboliques, le système est symbolique… Or, la généralité d'un symbole reste présupposée. En d'autres termes, en quoi, par exemple, la symbolisation des signes « + », « × », etc., par le signe « *a* » constitue-t-elle une généralisation ? Sans doute la symbolisation des signes numériques comme « 3 » ou « 4 » par « *b* » offre une analogie suggestive ; mais elle reste entièrement insuffisante du fait même de la différence de nature entre les signes d'opération et les signes numériques. C'est alors que la notion d'*abstraction* devient un concept fondamental pour l'articulation générale d'une configuration sémiologique stable sur laquelle asseoir un véritable régime sémiotique. Car elle vient justifier la généralité du symbole en qualifiant son rapport aux signes auxquels il se substitue : « *a* » est une opération « abstraite » (devant des opérations concrètes comme « + » ou « × »), tout comme « *b* » est un nombre « abstrait » (devant des nombres concrets comme « 3 » ou « 4 »). L'abstraction est donc ce qui permet d'*effacer des différences* sémiotiques et de réduire la signification à un plan purement symbolique. Tout symbole est donc abstrait, et c'est ce statut qui commande de façon générale le régime sémiotique ainsi institué. D'où le nom d'*Abstraction symbolique* que nous avons choisi pour le désigner.

La compréhension du symbole en termes d'abstraction implique donc que les différences sémiotiques perdues par symbolisation (comme par exemple entre « + » et « × » lorsqu'on les symbolise par « *a* »), soient envisagées comme « concrètes », et ce caractère concret est attribué au « contenu » dont le symbole « fait abstraction ». C'est du côté de ce contenu que la signification ou le sens (*meaning*) sont placés, si bien que les symboles abstraits sont dits dénués de signification. On ne dirait pas pour autant qu'ils sont insignifiants, puisqu'ils sont censés contenir la forme de la signification comme telle. Autrement dit, ils définissent les conditions mêmes de la signification, de telle sorte que si un contenu concret peut avoir une signification ou un sens, c'est dans la mesure où il est susceptible d'entrer dans la structure de signification définie par le fonctionnement symbolique (c'est-à-dire, où il peut être envisagé à la place d'un symbole abstrait, comme un cas particulier). S'établit ainsi une opposition, ou plutôt un écart entre symbole abstrait et contenu concret. De manière diffuse, les algébristes ont envisagé depuis le début l'opposition entre l'abstrait et le concret comme celle entre les *concepts* (ou « termes généraux ») et les *objets* (où ils plaçaient systématiquement d'ailleurs les nombres de l'Arithmétique). Ils ne sont toutefois pas allés jusqu'à développer l'ontologie qui aurait pu justifier cette distribution des rôles ; elle s'imposera de manière relativement discrète dans ce cadre comme effet de la systématisation logique de la notion de concept comme classe. Toujours est-il que l'écart entre l'abstrait et le concret peut être traversé dans les deux directions, correspondant aux deux directions possibles de la substitution d'un signe par l'autre. Soit on symbolise un contenu concret au moyen d'un symbole abstrait (ce qui, en termes de fonctionnement sémiotique, veut dire qu'on substitue un signe par une lettre fonctionnant comme un symbole) ; soit on attribue un contenu concret à un symbole abstrait (opérant sémiotiquement la substitution inverse). Le premier cas est compris au moyen du concept de *représentation* (on « représente » « $+$ » ou « $\times$ » par « a », par exemple) ; le second l'est par le concept fondamental d'*interprétation* (on « interprète » le symbole « a » comme « $+$ » ou « $\times$ »).

Il suffit de concevoir le symbole abstrait comme *concept*[610] pour que le principe de la construction d'une logique soit posé. Ce pas n'est pas trivial pourtant, car en tant qu'élaboration sémiologique, un tel concept de « concept » doit être associé à des fonctionnements sémiotiques très précis. C'est pourquoi l'appel à l'abstraction comme principe subjectif ou psychologique ne saurait être d'aucune utilité dans ce cadre ; une définition du concept comme résultat d'une abstraction psychologique resterait purement spéculative. Il revient à Boole d'avoir trouvé le mécanisme sémiotique d'une telle élaboration, accomplissant ainsi la traversée menant des mathématiques à la logique : un symbole « x » peut être envisagé comme un concept s'il est soumis à la loi symbolique $xx = x$, ou encore $x^2 = x$. Autrement dit, pour qu'un symbole *fonctionne* comme un concept, il faut que sa simple répétition, ou son itération, soit comprise comme identité. Regardés comme opérateurs, les symboles qui répondent à cette condition se laissent comprendre comme des *opérateurs de sélection*, et c'est ainsi qu'une définition du concept est initialement donnée. Elle évoluera ensuite au moyen d'une confrontation aux mécanismes du langage courant. Les différents symboles et opérations sont ainsi associés à différentes catégories de mots (noms, adjectifs…), selon une règle tacite de reformulation des expressions, que Boole exemplifie par la transformation de « Les pierres sont lourdes » en « Les pierres sont des choses lourdes ». Ces « choses » pourtant tombent de l'autre côté des concepts abstraits, celui des contenus concrets. Par cette exclusion des choses concrètes hors du plan symbolique-conceptuel, celui-

[610] Nous ne voulons pas dire par là que la notion de symbole doit devenir un concept au sens sémiologique (ce qu'elle est déjà), mais que chaque symbole (« a », « b »…) puisse être regardé lui-même comme un concept (non sémiologique cette fois-ci). Autrement dit, que le concept sémiologique de « concept » soit construit autour de la notion de symbole.

ci reste déterminé de manière purement opératoire, et c'est par ces opérations que le concept abstrait se voit déterminé symboliquement. L'opérationnalisation de l'abstraction fait apparaître le concept comme *classe*, définie en extension car elle est toujours une classe de « choses ». Au moyen de cette même logique des classes, non seulement les concepts, mais aussi les propositions se laissent aussi traiter symboliquement. Mais à la différence de la Syllogistique traditionnelle, la proposition n'est pas vue comme une composition des concepts ; entièrement dépendantes des fonctionnements sémiotiques de ce régime, les propriétés logiques de ces propositions sont capturées par un calcul qui envisage sémiotiquement les propositions sous le même mode atomique que les concepts.

L'ensemble de ces traitements, qui plonge ses racines dans les mécanismes des pratiques mathématiques et qui n'arrive à s'instituer que par la médiation d'une multiplicité d'articulations sémiotiques et sémiologiques, peut se donner comme une logique « formelle ». L'opposition entre « forme » et « contenu » apparaît comme la polarité émergente de l'ensemble de ces articulations, et le statut symbolique homogène des propriétés qui circulent depuis les pratiques mathématiques jusqu'aux différentes dimensions du système logique assure la continuité de la notion de formel dans cet espace. Dans le cadre de l'Abstraction symbolique, être formel ne veut rien dire d'autre qu'être *abstrait* (c'est-à-dire sans contenu) et *symbolique*[611].

*
* *

Le second régime que nous avons identifié de manière parallèle à celui de l'Abstraction symbolique est celui que nous avons appelé : *Expressionnisme*. Sa restitution systématique est bien plus difficile, et cela pour plusieurs raisons. D'abord, par le mode problématique sous lequel nous avons réalisé notre parcours, l'analyse de ce régime s'est vue coupée en deux, et menée dans le sens inverse à celui que la systématisation réclamerait : nous sommes allés du système logique en surface aux pratiques mathématiques sur lesquelles il s'est construit, et cela de façon non linéaire de surcroît. Mais plus profondément, nous avons vu comment l'Expressionnisme amorcé par Frege, a été aussi pour ainsi dire trahi par lui à cause de sa dérive *figurative*. De telle sorte que la restitution de l'Expressionnisme comme tel devrait pouvoir écarter les principes figuratifs qu'y a déposés celui-là même qui l'a inauguré. Cela ne

[611] Pour la configuration sémiologique de l'Algèbre abstraite on pourra se rapporter à la Figure 2 (ci-dessus p. 211), et plus généralement, au tableau comparatif en Annexe.

sera possible que jusqu'à un certain point, car sans prendre en considération les aspects de l'idéographie frégéenne, la strate logique de l'Expressionnisme resterait indéterminée, du moins dans la période considérée. Ces raisons rendent donc délicate la restitution systématique de l'Expressionnisme. Mais elles la rendent pour la même raison d'autant plus pressante.

Le problème mathématique qui déclencha l'intervention d'une analyse sémiotique procédant de manière expressive est dans ce cas beaucoup moins clair que dans celui de l'Abstraction symbolique. Il est, dans tous les cas, associé à l'Arithmétique, comme domaine des nombres entiers, et à l'Analyse, comme domaine des fonctions. Aussi, a-t-il été typiquement reconnu comme celui de l'arithmétisation de l'Analyse, par lequel un ensemble de mathématiciens, fondamentalement dans la seconde moitié du XIXe siècle, cherchait à capturer l'essence des fonctions de l'Analyse au moyen d'extensions successives à partir des nombres entiers. Bien que cette inspiration ne soit pas absente dans l'œuvre de Frege, elle ne fournit dans le meilleur des cas qu'un but instrumental pour son projet, à savoir celui de contribuer à la fondation de l'Arithmétique et des mathématiques. Ce but *fondationnel* est d'ailleurs présenté dès la préface de la *Begriffsschrift* comme un but parmi d'autres de son langage formulaire, conçu comme un langage général pour l'ensemble des sciences. Plutôt que d'étendre successivement l'Arithmétique pour atteindre les fonctions de l'Analyse, le problème qui anime la *constitution* de son système est inverse : il s'agit de comprendre le nombre à partir d'un élargissement de la notion de fonction. Ce problème s'enracine, notamment, dans la « Théorie générale des grandeurs », dont Frege extrait de manière explicite les premières distinctions sémiotiques pour la construction de son système. Son œuvre mathématique de jeunesse non seulement confirme l'origine de ces problèmes, mais les précise quant à leur contexte d'émergence : c'est dans la perspective fonctionnelle des nombres, des quantités ou plus généralement des « grandeurs », qui s'articule dans les mathématiques continentales de la fin du XVIIIe et du début du XIXe siècle, que les élaborations sémiotiques de Frege trouvent leur substrat mathématique. Notamment, dans ce lieu d'articulation fondamental qui a été pour les mathématiques modernes l'œuvre de Gauss. Parmi les multiples aspects de cette œuvre immense, les travaux mathématiques de Frege prennent comme point de départ la représentation géométrique des nombres imaginaires ou complexes, d'inspiration ouvertement gaussienne, à partir de laquelle ces nombres pourraient trouver un principe de justification ou un fondement, alors que leur nature quantitative fait défaut.

Plus précisément, derrière la question initialement abordée par le jeune Frege dans ses travaux mathématiques, nous avons reconnu l'approche fonctionnelle de la question des nombres et des quantités que Gauss articule dans l'évolution qui mène de l'Analyse algébrique de Lagrange à l'Analyse complexe de Cauchy. Dans le contexte de ces pratiques mathématiques, ce qui pose problème, c'est l'extension du domaine des quantités ou grandeurs. Doués initialement d'un caractère intuitif (ou « matériel » dira Frege), la prolifération des cas de grandeurs dans les mathématiques du début du XIXe siècle met en échec ce fondement purement intuitif et réclame un critère nouveau pour décider de leur nature et de leur conformité aux exigences de la pratique mathématique. Dans cette situation se trouvent, par exemple, les « grandeurs négatives » ou les angles. Mais les nombres imaginaires sont, à n'en pas douter, ceux qui posent le problème de la façon la plus urgente. La première tentative de Frege consiste ainsi en une sémiotisation géométrique des grandeurs, qui reprend, comme il vient d'être dit, la célèbre représentation géométrique gaussienne des nombres complexes, dans le but d'étendre les propriétés quantitatives des imaginaires au moyen d'une extension (projective) de cette sémiotisation géométrique. L'approche fonctionnelle est ici omniprésente à travers l'Analyse complexe, stabilisée sous l'effet des travaux de Cauchy, qui assure l'existence des quantités derrière les fonctions complexes représentées (sémiotisées) géométriquement. Le plan sémiotique sur lequel les propriétés des grandeurs sont projetées reste néanmoins mathématiquement apprivoisé au moyen des déterminations de la Géométrie projective, et la tentative s'avère assez inefficace. C'est sans doute cette inefficacité qui fera que Frege change de stratégie : au lieu de sémiotiser géométriquement les fonctions complexes, *Frege se tourne vers une analyse des aspects sémiotiques de la fonction elle-même, en tant qu'expression (écrite)*. De cette manière Frege comprend que l'expression fonctionnelle *est déjà une sémiotisation des grandeurs*, qui aurait la vertu d'être à la fois suffisante et non intuitive (puisqu'elle n'a pas recours à l'espace géométrique, auquel la notion d'intuition reste toujours attachée dans ce contexte). Ce faisant, Frege ouvre un plan sémiotique inédit, appartenant à la pratique même des mathématiques, mais que les mathématiques n'avaient jamais véritablement envisagé en tant que tel jusqu'alors. C'est là son originalité et son génie. Cette ouverture est comparable à celle que les algébristes anglais avaient effectuée en envisageant le caractère symbolique des opérations : elle marque dans les deux cas le passage de la strate mathématique à une strate sémiotique qui, bien qu'incarnée par les mathématiques, n'est pas, ou n'avait pas été jusque-là, l'objet direct de leurs recherches.

La strate sémiotique ouverte par Frege est pourtant très différente de celle des algébristes anglais. Directement associés à une région différente de l'espace des pratiques mathématiques, les principes qui organisent l'une et l'autre sont profondément hétérogènes. La compréhension fonctionnelle de l'Arithmétique implique qu'un nombre soit vu, non pas comme une unité atomique, mais comme le résultat d'une opération. Ainsi, « 7 » peut être vu comme le résultat de « $2 + 5$ » ou de « $3 + 4$ », par exemple. Ce qu'une fonction sémiotise, ce n'est donc pas une identité (celle du nombre « 7 », par exemple, symbolisé par son écriture caractéristique) mais une *différence* (celle qui agit dans une expression comme « $2 + 5$ », dont « 7 » est le résultat). Et pour affirmer la primauté de la différence sur l'identité, elle est capturée, non pas comme une composition mais comme une *articulation*, c'est-à-dire comme une différence qui ne se laisse pas réduire aux unités qui diffèrent : « $2 + 5$ » ne sera pas sémiotisé comme « $a\phi b$ » par exemple, comme cela pourrait être le cas pour les algébristes (avec la possibilité de traiter les signes « a », « b » et « ϕ » comme des symboles indépendants), mais comme « $f(2)$ », ou « $f(5)$ », ou encore « $f(2,5)$ », où la décomposition sémiotique laisse à côté du « 2 » et/ou du « 5 » un signe « $f(\ )$ », dénoué d'un statut sémiotique indépendant.

De cette manière, les problèmes que pose une expression comme « $\sqrt{-1}$ » ne sont pas envisagés au moyen d'une symbolisation abstraite qui efface toute trace quantitative, sous le modèle de la littéralisation des signes numériques. Le signe « $\sqrt{-1}$ » n'apparaît pas, dans le contexte sémiotique fonctionnel, comme un symbole de type « a » situé sur le même plan que d'autres symboles soumis à des règles opératoires, de manière analogue à la symbolisation de « 4 » par « b ». Si l'expression « $\sqrt{-1}$ » est à accepter au même titre que les signes « 3 » ou « 4 », sa nature de quantité ou de grandeur doit être conservée, et c'est précisément cela que les expressions fonctionnelles assurent. Être quantitatif veut dire être le résultat d'un calcul : que « 7 » soit une quantité implique qu'il est le résultat, par exemple, de « $2 + 5$ ». C'est pourquoi Gauss n'utilisait jamais le signe « $\sqrt{-1}$ » séparément, mais toujours comme partie d'expressions du type « $a + b\sqrt{-1}$ », qui assuraient son inscription dans une structure calculatoire. La fonctionnalité est une forme d'exprimer cette nature calculatoire : en sémiotisant « 7 » par « $f(x)$ », on renvoie à toutes les articulations calculatoires dont « 7 » peut résulter.

Cette perspective met donc en avant la nature articulée des quantités ou de grandeurs, et c'est précisément par cette *articulation* entre deux types de signes, capturée au niveau même des expressions fonctionnelles des mathématiques, que ces grandeurs seront inscrites dans la strate sémiotique. L'articulation est donc le principe sémiotique fondamental extrait de la pratique fonctionnelle des mathématiques, et définit toute la surface portante d'une analyse sémiotique capable de devenir autonome. C'est exactement cette distinction entre deux types de signes dans lesquelles se « décomposent » (*zerfallen*) les signes de la « Théorie générale des grandeurs » que Frege prétend « rendre utilisable de manière générale dans le domaine plus étendu de la pensée pure » ; et c'est bien par cette distinction que commence explicitement la construction de son système en 1879 dans sa *Begriffsschrift* (p. 15).

Les deux types de signes en question, tels que Frege les envisage, sont des « signes variables » (« a, b, c ... », comme dans une expression « $(a + b)c = ac + bc$ ») et des « signes constants » (« $+, -, \sqrt{}, 0, 1, 2$ ... »). Il ne faut pas croire par là que le point de départ de l'Expressionnisme est le même que celui de l'Abstraction anglaise, car ce qu'il s'agit ici de capturer, ce n'est pas le plan des signes variables, *mais la différence elle-même* entre signes variables et signes constants. La sémiotisation de cette différence sera donc celle de l'*articulation* de signes, combinant un signe variable (caractère ou lettre), avec un autre signe, qui capture au moyen d'un caractère un certain rapport entre des signes fixes. Par exemple, si dans « $2 + 5$ », « 5 » est *caractérisé* par le signe variable « a » pour obtenir « $2 + a$ », selon une sémiotisation semblable à la symbolisation des algébristes (mais qui ne s'y réduit pas, comme nous le verrons immédiatement), la sémiotisation fonctionnelle donnera « $f(a)$ », où le signe « f » renvoie au rapport entre les signes fixes « 2 » et « $+$ ». Des variations dans l'écriture du signe de fonction sont possibles, à condition de garder le principe fondamental d'une *asymétrie* articulatoire, selon laquelle la fonction comme signe complexe contient deux parties : une indépendante, et une non indépendante, ou mieux, comme le dira Frege, une « saturée » et une autre « insaturée ». La saturation est associée aux caractères isolés ; l'insaturation est sémiotiquement marquée au moyen de parenthèses attachées à l'un des caractères. Bien que complexe, la *fonction* est la véritable *unité* de ce régime sémiotique ; les parties qui la constituent ne sauraient être des unités que dérivées, et cela uniquement dans le cas des parties saturées. Si bien que la signification ou le sens sur ce régime sémiotique ne commence que lorsqu'un signe complexe de fonction est articulé.

La détermination de ces unités sémiotiques fonctionnelles (c'est-à-dire, la détermination des conditions de leur identité ou de leur différence) est donc bien plus complexe que celle de l'Abstraction symbolique. Pour celle-ci, en raison de la nature atomique des symboles, les unités se déterminaient au moyen de lois opératoires définissant leurs combinaisons avec d'autres signes. On retrouve cette situation également pour les unités fonctionnelles, dans le cas où, deux expressions fonctionnelles étant données, aucun des caractères qui les constituent ne coïncide avec les autres (par exemple : $f(a)$ et $g(b)$). Dans ce cas, tout se passe comme si les expressions fonctionnelles étaient des unités distinctives ou des signes atomiques. Dès lors, des articulations externes entre elles sont envisageables. Frege ne *symbolise* pourtant pas ces liaisons externes au moyen de caractères (par exemple par une flèche : « $f(a) \rightarrow g(b)$ »), pour faire de ces liaisons ou articulations *externes* des opérateurs, à l'instar de l'Algèbre symbolique. De façon originale, ces liaisons sont *diagrammatisées*, à l'aide d'une sémiotisation du plan d'écriture au moyen de traits[612]. Cette diagrammatisation provient elle aussi, comme l'indique Frege, des pratiques sémiotiques de l'Arithmétique ; notamment de la disposition de son écriture dans le processus d'un calcul (tel qu'il était effectivement *pratiqué* au XIX^e siècle). Cette disposition, comportant des propriétés liées à la pratique déductive de l'Arithmétique, reste pourtant implicite dans les mathématiques, tout comme l'était l'articulation pour les fonctions. Frege les extrait de cette strate pratique pour les inscrire sur la strate sémiotique et les combiner avec les expressions fonctionnelles, dans un geste analogue à la sémiotisation de ces dernières[613].

Mais puisque l'unité fonctionnelle comporte également une articulation *interne*, d'autres moyens pour leur détermination sont possibles. Ainsi, deux expressions fonctionnelles étant données, il peut arriver qu'elles coïncident dans une des deux parties qui les constituent : soit elles peuvent coïncider par la partie saturée (comme pour « $f(a)$ » et « $g(a)$ »), soit par la partie insaturée (comme pour « $f(a)$ » et « $f(b)$ »). Or, cette liaison constitue uniquement une possibilité du régime articulatoire, car même dans le cas où l'aurait, comme ici, deux occurrences du même caractère, *l'identité de ces occurrences n'est pas présupposée*. Une marque particulière doit être alors prévue à cet effet, pour indiquer que ces deux caractères constituent bien deux occurrences ou instances particulières du même caractère ou signe. C'est ainsi que les traits diagrammatiques des rapports externes acquièrent un nouveau rôle, à savoir celui de servir à délimitation de la portée ou du *domaine* où l'identité des caractères est valable, car c'est sur ces traits que cette marque sera inscrite (voir Figure 4). Combinée de cette façon avec les traits connectant les signes de fonction « extérieurement », pour ainsi dire, l'identité sémiotique (par laquelle deux caractères comme « a » et « a » peuvent être considérés comme des occurrences du même signe) se trouve déterminée localement et n'est valide qu'à l'intérieur d'un domaine circonscrit. Des cas où « a » et « a » ne constituent pas des occurrences du même signe ont effectivement lieu dans la *Begriffsschrift*, par exemple, dans la loi 65, exprimant un cas du mode d'inférence *Barabara* (p. 72) :

[612] Cf. *supra* p. 88 et la Figure 4 ci-dessous.

[613] Comme nous l'avons indiqué, lorsque Russell adoptera le système d'écriture proposé par Peano, tous ces rapports se verront symbolisés, et la complexité sémiotique de la logique résultante sera entièrement réduite. Des développements comme celui du Calcul de séquents, la Déduction naturelle, ou plus tard les Réseaux de preuves et la Géométrie de l'interaction, montreront qu'elle n'était aucunement futile.

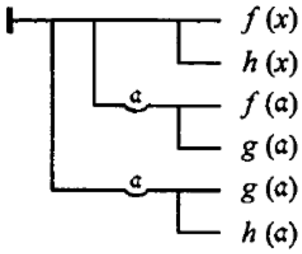


Figure 4

En effet, à propos de cette loi, Frege s'empresse de remarquer que l'apparition de « a » dans deux domaines différents (définis par les deux creux sur les traits), n'indique aucune relation particulière entre ces domaines, au point où dans l'un d'eux « a » pourrait être changé, par exemple, par « e » (p. 73). Des différences sémiotiques supplémentaires doivent dès lors être prévues pour rendre compte des différents niveaux ou portées de validité de l'identité entre deux caractères répétés. Dans la *Begriffsschrift* ces différences sont de nature *typographique* (ou de système alphabétique) : des lettres grecques où cette identité n'est aucunement assurée en dehors du contexte d'une expression fonctionnelle[614] ; des lettres gothiques pour une validité locale de l'identité de deux caractères (comme « a » dans l'exemple ci-dessus), ce qui requiert l'inscription d'une marque (la même lettre dans un creux) dans l'espace des traits pour définir le domaine local de cette validité ; enfin, des lettres latines pour indiquer que cette identité est valable partout (c'est en particulier le cas des signes de fonction dans l'exemple ci-dessous, ce qui permet de lier les différentes propositions entre elles, ainsi que du signe « x », qui épargne le besoin d'inscrire une marque d'identité sémiotique sur les traits).

Enfin, un troisième mode de détermination de ces unités articulées est donné par les différents *niveaux d'articulation*. En effet, en raison de l'asymétrie articulatoire, les unités sémiotiques peuvent se rapporter les unes aux autres par une sorte d'emboîtement interne qui définit une structure spécifique inédite. Car le statut sémiotique du caractère « a » dans le signe « $f(a)$ » est entièrement indéterminé en dehors de sa « saturation ». Mais saturé ne veut pas dire inarticulé. Certes un caractère comme « a » l'est du point de vue de sa constitution sémiotique (c'est en cela que réside sa nature « caractéristique »), mais rien n'empêche de le voir comme la littéralisation, ou la « caractérisation » (sémiotisation par un caractère) d'une expression articulée (à condition que celle-ci soit elle-même saturée). Concrètement, cela veut dire que dans une expression comme « $f(a)$ », le « a » peut être substitué par une autre fonction saturée, comme « $g(b)$ », par exemple, ce qui résulte dans l'expression « $f\big(g(b)\big)$ ».

[614] Comme le dit Frege, à l'intérieur d'une expression fonctionnelle, ces lettres grecques sont uniquement des marqueurs d'identité et de différence (Frege, 1879/1999, pp. 76-77).

Ce rapport entre les fonctions est irréductible aux deux autres que nous venons de mentionner : à la différence du premier, celui-ci est interne aux expressions fonctionnelles et n'a pas besoin de faire appel aux traits diagrammatiques ; à la différence du second, la structure qu'il définit est elle aussi interne (tandis que la structure des domaines d'identité d'un signe dépendait de la disposition des traits externes aux fonctions). Cette structure induit donc des niveaux d'articulation susceptibles de qualifier les unités fonctionnelles ; dans notre exemple, « $f(a)$ » est d'un niveau d'articulation supérieur à celui de « $g(b)$ ». Mais comme ces deux dernières expressions le laissent voir, cette différence de niveau n'est pas donnée de manière immédiate dans l'écriture, et ne pourrait dès lors être déterminée *a priori*. Elle résulte donc de l'interaction effective entre les différentes unités fonctionnelles[615].

Du fait de la nature articulée de l'unité sémiotique fonctionnelle et de la multiplicité de ses modes de détermination, les effets de différence et de répétition des signes sont ici d'une complexité extrême. À l'inverse de l'Abstraction symbolique, l'articulation interne de l'unité sémiotique de l'Expressionnisme fait que le rapport entre différence et répétition se tisse à l'intérieur de chaque unité (sachant que des différences externes entre unités sont toujours également possibles). Le régime ainsi instauré est tel que l'unité sémiotique résulte d'une différence dans une répétition. Ainsi, étant donné une série d'expressions (comme par exemple : « $2 \cdot 1^3 + 1$ », « $2 \cdot 2^3 + 2$ » et « $2 \cdot 4^3 + 4$ »), la sémiotisation fonctionnelle sera le résultat d'envisager ces expressions comme des répétitions, non pas d'un caractère (lettre ou autre) identique, mais d'un motif, c'est-à-dire d'une différence (ici la différence entre « $2 \cdot (\ )^3 + (\ )$ » comme ce qui se répète, et « 1 », « 2 » et « 4 » comme ce qui diffère). « $f(x)$ » sera l'unité résultante de la sémiotisation de cette différence entre une répétition et une différence (ou une série des différences). En tant que telle, la sémiotisation fonctionnelle comporte la capacité de produire des identités ou des identifications complexes en mobilisant cette solidarité étroite entre différence et répétition comme ce qui définit ses unités. En effet, du point de vue de son existence sémiotique, l'identité d'un signe comme « $g(b)$ » se trouve définie au croisement d'une double série (c'est-à-dire, d'une double combinaison de répétition et différence), que l'on peut schématiser de la manière suivante :

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \boldsymbol{g}(a) \\ \cdots\ f(\boldsymbol{b})\ \ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{b})\ \ h(\boldsymbol{b})\ \cdots \\ \boldsymbol{g}(c) \\ \vdots \end{array}$$

[615] Ceci se voit compliqué par le fait que les fonctions peuvent être constituées par plus d'un signe variable saturé (par exemple : « $f(a, b)$ »).

Or, du fait de la non présupposition de l'identité des caractères, la constitution de ces identités complexes dépend de la liaison effectuée par une marque d'identité comme celle du deuxième mode de détermination que nous venons de voir, et n'est donc valable que dans le domaine local où cette marque exerce son action (dans le schéma, une liaison est nécessaire entre les « g » de l'axe vertical, et une autre pour les « b » de l'axe horizontal, assurant respectivement l'identité des caractères). Qui plus est, puisque ces séries sont constituées elles-mêmes d'expressions dont un motif se dégage, elles sont susceptibles d'être sémiotisées à leur tour (par exemple, par « $\Gamma(\alpha)$ » pour la série verticale, et « $\mathrm{B}(\phi)$ » la série horizontale), suivant des niveaux d'articulation croissants, d'après le troisième des modes de déterminations mentionnés ci-dessous. On devine ainsi un rapport intime entre le second et le troisième mode de détermination, parce qu'en présentant l'unité fonctionnelle de cette manière, l'identité des caractères (l'identité des « g » dans la série verticale, par exemple) correspond à la sémiotisation fonctionnelle de niveau supérieur (ici « $\Gamma(\alpha)$ »).

Or, il faut comprendre que jusqu'ici rien n'est de l'ordre du logique dans ce régime. Bien que nous soyons habitués à y voir constamment des fonctions « propositionnelles », des rapports d' « implication », des « quantificateurs », de différences de « type »… tout ce que nous venons de voir reste strictement de l'ordre des fonctionnements de signes, et des conditions pour qu'un signe puisse être compris et manipulé comme tel ; fonctionnements et conditions qui ont été extraits en lien étroit avec la dimension sémiotique d'une région précise des pratiques mathématiques (celle de l'approche fonctionnelle de l'Arithmétique). Ceci est moins un souci de méthode, que la façon même dont l'Expressionnisme s'est effectivement développé et organisé dans l'œuvre de Frege. Certes, l'intelligence de l'ensemble de ce dispositif sémiotique fut, comme dans le cas de l'Abstraction symbolique, progressive et fragmentaire, et requit, ici comme là, l'élaboration des catégories et concepts par lesquels cette fragmentation pouvait être intégrée dans un régime stable. Cette élaboration sémiologique fut pourtant constamment soumise à l'efficacité de ces fonctionnements sémiotiques, quitte à rompre, comme il le fit, avec la tradition de la pensée logique, et à transformer entièrement ses concepts fondamentaux.

Ces catégories ou concepts sémiologiques sont déjà en acte dans la structuration des fonctionnements que nous venons de décrire. Si nous nous sommes efforcés de les éviter dans notre présentation, c'est pour mieux faire ressortir leur caractère strictement sémiotique. C'est notamment le cas de ce qui, dans ces paragraphes, est apparu comme une marque d'identité des caractères. En effet, bien qu'en termes de fonctionnement des signes, sa fonction soit bien celle de définir des plages pour l'identité sémiotique entre des signes caractéristiques, Frege envisage cette identité comme « généralité » (*Allgemeinheit*), ce qui rejoint parfaitement la notion de généralité des symboles de l'Abstraction symbolique. Seulement, la généralité dans le régime d'abstraction est présupposée pour tout signe (c'est l'un des principes qui rend « symbolique » ce régime). Dans le régime fonctionnel, en revanche, la généralité est une propriété *particulière* possible pour les signes ; ce qui se trahit d'ailleurs par le fait que le signe de généralité (le creux sur le trait, marqué de la lettre gothique correspondante) est un signe particulier parmi d'autres dans ce régime. De fait, à part les lettres latines, telles que Frege les envisage[616], rien n'est symbolique dans ce système. Même les caractères qui constituent la fonction propositionnelle[617] ne le sont pas, car leur identité n'est pas assurée en dehors du signe de fonction dans lequel ils apparaissent ; sans compter que l'un d'eux ne possède même pas un statut indépendant dans ce régime. Et surtout, le signe complexe de fonction n'est l'est pas non plus, car ce qui le définit, c'est l'articulation entre ces deux caractères. Irréductible à l'identité, soit de ce qui est sémiotisé (parce que l'unité fonctionnelle sémiotise une différence), soit des signes par lesquels on le fait (car leur unité sémiotique se définit au croisement de deux séries, et que l'identité des caractères qui le constituent n'est pas non plus présupposée par rapport à d'autres occurrences), les signes dans ce régime apparaissent comme des *expressions*. Et cela d'abord dans le sens ordinaire que nous avons mis en avant pour caractériser la présence des signes numériques dans le système de Boole, à savoir celui d'une certaine suite ou configuration de traits ou de marques, reconnaissable d'après les éléments et les règles qui structurent un langage ou un système logique, et pour lesquelles la question de la signification se pose. Dans l'hétérogénéité du plan des signes que la multiplicité d'éléments et de fonctionnements de ce régime instaure (signes variables, constants, saturés, insaturés, articulés et inarticulés, à différents niveaux, caractéristiques, diagrammatiques, typographiques…), la notion courante d'expression vient donner un statut commun à tous les signes et combinaisons de signes qui y circulent. En ce sens, la notion d'expression prend la place de celle de symbole dans le régime homogène d'abstraction, laissée libre par le retrait de la généralité hors de la strate sémiotique. Puisant directement dans le domaine de l'Arithmétique, ce n'est plus la généralité que la strate sémiotique cherche à capturer, mais l'*articulation*. On ne s'étonnera pas qu'en tant que propriété sémiotique fondamentale, la notion d'articulation reste aussi disséminée et implicite que celle de généralité pour le symbolisme[618]. Elle est pourtant présente derrière toutes les élaborations

[616] C'est-à-dire, d'après le système de la *Begriffsschrift*, les caractères pour lesquels la généralité est présupposée dans l'ensemble du domaine des propositions.

[617] « f » et « a » dans « $f(a)$ »

[618] Comme on ne s'étonnera pas non plus qu'elle devienne une propriété particulière devant l'inarticulation des individus dans la configuration sémio-logique russellienne, qui suppose l'abandon de l'Expressionnisme. Cette limitation de l'articulation par Russell s'annonce déjà dans sa correspondance avec Frege, que nous avons analysée au début de la dernière partie de notre travail.

sémiologiques de ce régime, comme cela se laisse voir dans le fait que les concepts appartenant à cette strate se cristallisent le plus souvent par couples. La notion d'expression constitue le terme fondamental par lequel un signe est nommé dans ce cadre. Aussi générique que ce terme puisse paraître, et bien que cela n'ait été guère remarqué par les spécialistes de l'œuvre frégéenne, son usage est technique, et concentre l'ensemble des déterminations sémiotiques de ce régime. D'où le nom d'*Expressionnisme* par lequel nous avons choisi de le baptiser.

De même que le concept de symbole apportait la précision dont la notion de généralité manquait, celle d'expression précise, dans ce régime, la notion disséminée d'articulation. C'est bien là, d'ailleurs, une définition possible pour la notion d'expression : *signe articulé*. Cela correspond d'ailleurs à la définition que Frege en donne dans ses *Grundgesetze* : assemblage ou combinaison de signes (*Verbindung von Zeichen*) (p. 5). Mais c'est la notion d'expression qui précise celle d'articulation, et non pas l'inverse. Et cela parce qu'elle se détermine sémiologiquement par rapport au reste des concepts qui se forgent dans cette strate. À commencer par la distinction première déjà mentionnée entre signe variable et signe fixe, ou plus précisément, partie variable et partie constante, ou encore, comme nous l'avons appelé : rapport de *variation-invariance*. C'est par ce rapport que la propriété d'articulation est effectivement extraite des signes mathématiques et inscrite dans un plan purement sémiotique en tant qu'expression. Il implique un travail d'*analyse* des expressions données par un langage (ici celui de l'Arithmétique), par laquelle on envisage dans les expressions des parties comme remplaçables par d'autres. Dans les faits, cela se réalise par une *comparaison* d'expressions s'ordonnant dans une série, d'où il résulte qu'une partie de chaque expression est envisagée comme variable. En ce sens, l'analyse comparative est l'analogue de l'abstraction dans le régime symbolique, comme responsable de la capture de la généralité des signes dans des symboles.

Du point de vue du fonctionnement sémiotique, le couple de concepts *fonction* et *argument* vient nommer le rapport de variation-invariance comme parties d'une expression[619]. C'est lui qui prétend assurer l'asymétrie de l'insaturation et la saturation, faisant que le véritable niveau des unités ne puisse se cristalliser qu'à un niveau complexe ou composé (puisque à un niveau inférieur, les fonctions insaturées ne constituent pas des signes indépendants). Mais le signe de fonction comme un tout (c'est-à-dire, comme un complexe fonction-argument : « $f(x)$ ») est lui-même une expression, qui sémiotise ou renvoie à la série d'expressions, tout comme un symbole de type « a » renvoyait aux signes d'opérations

[619] En effet, dans un signe de fonction « $f(x)$ », Frege appelle plus précisément « fonction » la partie invariable « $f(\ )$ » et « argument » celle considérée comme variable : « x ».

« $+$ », « $\times$ »,… qu'il sémiotisait. Dans ce rapport d'un signe à ce qu'il sémiotise, un axe s'instaure, où se joue le principe fondamental de détermination du sens dans un régime. La question qui se pose alors est : de quoi le signe en question est le signe ? Tout comme l'Abstraction symbolique pour le symbole, l'Expressionnisme répond qu'une expression est le signe d'un *contenu*. Seulement, ce ne saurait être suivant le même axe que ces deux réponses s'ordonnent, ni de la même manière que le contenu s'organise. C'est là la grande originalité de l'Expressionnisme. Car pour le symbolisme, le contenu reste attaché aux différences sémiotiques qu'un symbole fait disparaître ; les contenus multiples restent ainsi concrets devant cette abstraction des différences qui se produit lors du passage à l'unité du symbole. Signe et contenu s'organisent donc suivant l'axe *unité abstraite-pluralité concrète*, avec la conséquence pour ce régime sémio-logique que les contenus sont congédiés de son domaine. Pour l'Expressionnisme, en revanche, le fait qu'une expression fonctionnelle soit l'effet du principe de variation d'une série d'expressions implique que la multiplicité (qui dans l'autre cas était effacée ou abstraite par l'identité du symbole), est dans ce cas-ci interne à l'unité sémiotique. Le signe de fonction comporte avec soi les différences que le symbole effaçait. Les contenus résident ainsi à même les expressions fonctionnelles.

Dans tout ceci, la grande invention de Frege est d'avoir *défini* le contenu par l'invariance dans une variation expressive. Ainsi, si pour l'Abstraction symbolique « 1 », « 2 », « 3 » renvoyaient à des contenus multiples dont un symbole comme « *a* » faisait abstraction (et donc qu'il faisait disparaître), pour l'Expressionnisme, « $2 \cdot 1^3 + 1$ », « $2 \cdot 2^3 + 2$ » et « $2 \cdot 4^3 + 4$ » ne renvoient pas à des contenus multiples, perdus lorsqu'on les exprime comme « $f(x)$ ». Le contenu ne cesse pourtant d'être là, au niveau de ces expressions ; seulement, il y est comme ce qui n'y varie pas. De cette façon, c'est bien à un contenu qu'une expression comme « $f(x)$ » renvoie. Mais ce contenu n'est pas extérieur ou séparé de cette expression, puisqu'il se donne comme l'invariance d'une série d'expressions, dont l'expression fonctionnelle « $f(x)$ » capture précisément la loi. Loin de se placer dans un rapport d'opposition comme dans le cas du symbolisme, signe et contenu se trouvent intimement liés par un rapport dialectique, lorsque le signe se voit déterminé comme expression. Cette solidarité entre expressions et contenus est telle que, une multiplicité d'expressions étant donnée, ces expressions peuvent être associées les unes aux autres si une invariance est décelable dans la variation qu'elles impliquent. La notion de contenu sert à nommer et à stabiliser donc cette pratique de l'invariance. Le contenu, comme ce qui ne varie pas, est donc un motif, la répétition d'une différence ; c'est lui qui est exprimé par l'expression « $f(x)$ ». Il apparait donc qu'une expression exprime l'invariabilité d'une multiplicité d'expressions, et que dans ce rapport de sémiotisation expressive, le contenu se détermine, déterminant en même temps la façon dont les expressions se rapportent les unes aux autres. *Le contenu se donne ainsi comme organisation ou structuration du plan hétérogène des expressions*. Mais dans l'intimité qu'elle maintient avec les expressions, cette organisation ne saurait être donnée d'avance. C'est pourquoi le contenu n'est pas pour l'Expressionnisme un concept spéculatif, mais sémiologique, au plus près des fonctionnements sémiotiques. L'organisation du plan expressif qu'il détermine se définit dans le rapport complexe entre une multiplicité expressive et une unité expressive qui en extrait son articulation interne. Par exemple, dans la multiplicité expressive de notre exemple, l'invariabilité d'un motif peut être dégagée, qui constitue en tant que telle le contenu de ces expressions, et qui se laisse exprimer comme « $2 \cdot x^3 + x$ », ou encore comme « $f(x)$ ». Que ces deux dernières expressions ne soient pas à placer *à côté* des trois expressions de l'exemple, comme un terme de plus de la multiplicité ou de la série qu'elles constituent, mais qu'elles capturent dans un certain sens l'unité de cette multiplicité, *voilà une différence de contenu*. « x » n'est pas au même niveau que « 1 », « 2 », « 4 »… Tout comme « $f(\ )$ » n'est pas au même niveau que « $2 \cdot (\ )^3 + (\ )$ », même lorsque les blancs de cette dernière expression sont remplis par des « x ». C'est bien cela que veut dire pour le contenu qu'il se donne comme organisation ou structuration du plan expressif. Mais c'est cela aussi que veut dire qu'il n'existe pas en dehors des expressions.

Expressions et contenus ne sont donc aucunement à prendre comme une opposition, telle que celle des symboles abstraits et des contenus concrets. Si cette dernière opposition devenait naturellement le support de l'opposition classique entre le concept et l'objet, la solidarité de l'expression et du contenu a la capacité de tordre cette dualité et, de la rendre, pour ainsi dire, interne au régime des signes qu'elle anime. Mais à bien y regarder, il s'agit moins d'une simple torsion que d'un arrangement entièrement nouveau. Car expressions et contenus sont si solidairement associés que le double régime des expressions (multiplicité expressive, unité expressive[620]), induit une scission au cœur de la notion de contenu qui fait apparaître des catégories inédites. Il s'agit de la célèbre distinction entre *sens* et *référence,* ou plus précisément du décèlement, à l'intérieur du contenu, d'une dimension autonome du sens en plus de la dimension significative[621] ou référentielle. Cette division ou ce décèlement résulte de ce qu'on a reconnu la multiplicité expressive comme une question à la fois sémiotique et de contenu. De ce qu'on a reconnu, en d'autres termes, que le fait pour un contenu de se donner dans des expressions différentes ne constitue pas une circonstance

---

[620] Par exemple : « $2 \cdot 1^3 + 1$ », « $2 \cdot 2^3 + 2$ », « $2 \cdot 4^3 + 4$ » comme multiplicité expressive, et « $f(x)$ » comme unité expressive.

[621] On n'oubliera pas que le terme « *Bedeutung* » par lequel Frege caractérise cette dimension, et que nous traduisons comme « référence » pour ne pas choquer les habitudes de traduction, a en allemand l'acception courante de « signification ».

extrinsèque à ce contenu, mais est une condition même de l'identité dans laquelle il peut se résoudre. C'est pourquoi la notion de sens ainsi définie, dans son rapport à l'identité possible mais incertaine à partir d'une sérialisation (c'est-à-dire, à partir de la répétition d'une différence) dans une multiplicité expressive donnée, offre le concept sémiologique le plus adéquat aux fonctionnements sémiotiques de l'Expressionnisme ; car comme nous l'avons vu, c'est de cette manière que les unités expressives se voyaient déterminées au niveau de leur fonctionnement sémiotique élémentaire. La catégorie de sens ne se substitue pas pour autant à la dimension référentielle, mais se joint à elle pour une détermination conjointe du contenu d'un signe. C'est pourquoi devant les deux directions opposées (interprétation et représentation) qui traversaient l'écart entre l'abstrait et le concret, entre le concept et l'objet, dans l'Abstraction symbolique, l'Expressionnisme, qui n'a pas besoin de quitter le signe pour atteindre son sens et sa référence, propose la double dimension de l'*expression* et de la *désignation* : comme le dit Frege, un signe *exprime* un sens et *désigne* (ou réfère à) une référence.

Mais comme il ressort des fonctionnements sémiotiques de l'Expressionnisme, l'identité d'une expression, fût-elle d'ordre supérieur (par exemple celle de « $f(x)$ » par rapport à « $2 \cdot 1^3 + 1$ » ou même à « $2 \cdot x^3 + x$ ») sur laquelle l'identité référentielle pourrait s'assoir, est le résultat d'un fonctionnement complexe au niveau d'une multiplicité expressive à plusieurs niveaux. De ce point de vue, la désignation référentielle devrait être envisagée comme essentiellement conditionnée par l'expression des sens. Nous avons vu que c'était là le point où Frege trahissait son propre Expressionnisme, en présupposant une identité déjà donnée de la référence, par un recours à la vieille catégorie d'objet, pour laquelle la configuration sémiologique de ce régime n'avait en vérité pas de place. Tout se passe comme si Frege n'était pas arrivé à donner à l'Expressionnisme et à la logique du sens dans lequel il devait se réaliser, l'ontologie qu'ils réclamaient. Du point de vue strict des conditions sémiotiques de ce régime, l'expression, c'est-à-dire la dimension expressive d'un signe, semble s'imposer comme première par rapport à la désignation. Appuyés sur certains fonctionnements sémiotiques spécifiques non seulement de l'Expressionnisme, mais aussi de certaines anomalies de l'Abstraction symbolique, nous avons suggéré qu'une compréhension de cette désignation non immédiatement référentielle pouvait être comprise comme *indication*, à partir notamment d'une réflexion autour du statut à accorder à un signe comme « x » (dans « $2 \cdot x^3 + x$ » ou « $f(x)$ »), comme expression de la variabilité (ce qui a été constamment évité dans les formulations de Frege).

Dans toute cette configuration sémiologique, l'axe fondamental continue à être celui de l'expression et du contenu. C'est lui qui donne une intelligibilité aux fonctionnements sémiotiques, et c'est lui aussi qui organise le reste des concepts sémiologiques. À tel point que Frege continue à parler de contenu et d'expression même après avoir introduit la distinction entre sens et référence. Par la reconfiguration de l'espace sémiologique que cet axe effectue, la polarité classique de la forme et du contenu se voit comme désamorcée, et une notion de contenu prend place au milieu des signes, auxquels la notion de « formel » avait tendance à être associée. Une notion de « contenu formel » a vu ainsi le jour dans le processus de réflexion sémiologique de l'Expressionnisme. Ce qui impliqua, comme nous l'avons suffisamment remarqué, l'émergence d'une notion inédite de *sens*.

Et pourtant rien dans toute cette conceptualisation sémiologique, ni dans la théorie du sens qu'elle implique, n'est encore de l'ordre de la logique ou du langage. Certes, tout dans ces strates parle d' « expressions », mais les signes peuvent être articulés comme des expressions sans être pour autant de l'ordre du langage proprement dit. On dira que cette conceptualisation détermine les bases d'une *théorie de l'expression*[622], capable de devenir le terrain pour l'édification d'une logique, dans un rapport sans doute intime avec le langage. Logique du contenu ou logique du sens, qui est aussi formelle que celle des Booléens, parce que sa constitution résulte d'un processus de mathématisation parallèle, qui habilite la circulation de propriétés ou formes entre les pratiques mathématiques et les systématisations logiques.

C'est précisément l'édification de cette logique du contenu ou du sens que Frege entreprit. Son échec est connu, mais ses défaillances nous sont apparues sous une lumière nouvelle, regardées comme l'effet de la systématisation d'une élaboration sémiotique résultant de l'analyse des pratiques mathématiques. C'est donc sous cet angle que nous la résumerons enfin ici.

Tout comme la configuration sémiologique de l'Abstraction symbolique accède à la strate logique en envisageant le symbole comme concept, l'Expressionnisme frégéen le fait en envisageant l'unité fonctionnelle comme *proposition*. C'est en cela que consiste l'invention de la *fonction propositionnelle*. On voit de quelle manière le caractère articulé de l'unité fonctionnelle sémiotique induit la primauté de la proposition par rapport aux concepts dans la logique frégéenne, et le célèbre principe contextuel qui en résulte. Pourtant, à la différence du

[622] Le mot expression comporte une multiplicité d'usages que justement cette théorie permet de préciser, et qu'il n'est pas inutile ici de rappeler. Ainsi, nous avons vu que, dans un premier sens, le terme « expression » renvoie aux signes eux-mêmes, envisagés comme articulés (on parle alors d'une ou de plusieurs « expressions »). Ensuite, « expression » apparaît comme la nominalisation du verbe « exprimer », comme l'acte particulier par lequel on peut produire du sens au moyen d'un signe (comme lorsque l'on dit que quelqu'un a exprimé une idée, ou plus précisément qu'un signe exprime un sens). Enfin, « expression » nomme une dimension du signe comme tel (comme lorsque l'on parle du « plan de l'expression » face au plan du contenu, ou même d'une dimension sémiotique d' « expression » en plus d'une dimension de « désignation »). Naturellement, la tâche d'une théorie de l'expression est non seulement de distinguer tous ces usages, mais aussi de les lier de manière précise. C'est à quoi une restitution du régime expressionniste permet de contribuer.

système booléen, cette interprétation propositionnelle du signe de fonction ne suppose pas des restrictions sur les signes (comme celle de $x^2 = x$). Définies comme Frege le fait, toutes les expressions fonctionnelles peuvent être comprises comme des propositions, au sens de Frege, c'est-à-dire comme articulation *asymétrique* entre une partie saturée et une partie insaturée. Frege croyait que ce format minimal pour les expressions suffisait à organiser de manière générale le plan expressif, qui serait dès lors entièrement logique. Le paradoxe de Russell montrera que cela ne saurait être le cas, et posera donc la question d'une restriction sur les unités fonctionnelles sémiotiques capables d'être des unités logiques.

Ce format minimal pour l'articulation fonctionnelle (asymétrie « saturé-insaturé ») constitue le principe sémiotique qui supporte la constitution des unités logiques. Ainsi, le signe articulé fonctionnellement (« $f(a)$ ») définit la figure de la *proposition*, et sa désagrégation en un signe insaturé (« $f(\ )$ ») et un signe saturé (« a ») définit respectivement la figure du *concept* et celle de l'*individu*. Enfin, son articulation binaire à un niveau supérieur (« $\vdash f(a)$ ») définit les *valeurs de vérité* comme figures supérieures du contenu logique.

Sans restrictions sémiotiques en principe, la réinterprétation propositionnelle de la fonction se réalise dans une comparaison constante avec le « langage des mots », qui dans le cas de Frege est moins une véritable confrontation, qu'une illustration des mécanismes fonctionnels par le langage et une réduction du langage aux fonctions. La règle de reformulation des expressions dont cette comparaison prétend se justifier *en général* consiste dans la nominalisation des phrases, auxquelles on attribue le prédicat : « …est un fait »[623]. Il ne reste pas moins qu'un tel travail a des effets réels, et qu'il concentre l'aspect le plus philosophiquement efficace de la formalisation frégéenne du sens. Celle-ci habilite une critique puissante du langage courant ou des langues naturelles, non seulement par rapport à leur capacité déductive ou leur puissance référentielle, comme cela a été souvent remarqué, mais aussi et fondamentalement dans leur structuration articulatoire à différents niveaux, qui se concentre dans une critique de la nature phonétique du « langage des mots ». Cette critique cache pourtant, nous y reviendrons, un transfert des propriétés sémiotiques de l'Arithmétique à l'espace du langage en général, qui se retournera contre la position de Frege et confirmera la double articulation comme un fait fondamental de l'expressivité.

Si la logique édifiée sur l'espace de l'Abstraction symbolique était une logique de classes, celle de l'Expressionnisme est clairement une logique des *fonctions*. Mais c'est là une autre difficulté du système de Frege. Car du fait de l'identité attribuée à la référence, il finit par associer fonctions et classes, ce qui ouvre la porte aux paradoxes des fonctions auxquelles

[623] Il s'agit de la reformulation exemplifiée par Frege par la transformation de « Archimède périt lors de la prise de Syracuse » en « la mort violente d'Archimède lors de la prise de Syracuse est un fait ».

aucune classe ne saurait correspondre. Nous avons vu que, dans des textes tardifs, Frege finissait par considérer la notion de classe comme secondaire. Mais une logique véritablement fonctionnelle n'est jamais parvenue à s'esquisser dans son œuvre ; sauf peut-être dans sa correspondance avec Russell, où Frege (tout autant que Russell, d'ailleurs) finit par la rejeter.

Malgré tout, la tentative de Frege est bien celle d'une logique formelle expressive. En effet, toutes les propriétés qui seront plus tard reconnues comme définissant le caractère formel de son système proviennent, comme nous l'avons montré, des propriétés extraites des pratiques mathématiques et rendues disponibles pour la systématisation logique, au moyen de l'organisation de tout l'espace sémiotique comme un espace expressif. De telle sorte que, si comme nous l'avons soutenu tout au long de notre travail, la notion de formel qui résulte de ce processus vient nommer cette continuité qui, depuis la dimension pratique des mathématiques se prolonge à travers l'espace sémiotique jusqu'au domaine de la logique, et même du langage, alors « formel » veut bien dire ici *expressif*, tout comme cela voulait dire *symbolique* pour le régime d'Abstraction symbolique.

*
* *

Notre travail est donc arrivé à dégager deux grands régimes de formalisation du sens à l'œuvre dans l'émergence de la logique formelle au XIX^e^ siècle, *Abstraction symbolique* et *Expressionnisme*, comme deux organisations parallèles de l'espace engendré par le processus de mathématisation de la logique. Parmi toutes les choses que cette double restitution permet de voir, celle qui apparaît finalement avec le plus d'évidence, c'est que la notion de « formel », et avec elle – et même avant elle – celle de « formalisation », qui s'imposent à la pensée et au langage au tournant du XX^e^ siècle, ne sont pas univoques. Comme conséquence des différentes manières d'associer la pensée à la triple racine des pratiques mathématiques, des fonctionnements sémiotiques et des systématisations logiques, « formaliser » voudra alors dire au moins deux choses : soit « symboliser », soit « exprimer ». C'est sous la condition de ces deux sens du mot « formel » que se développeront les projets de formalisation logique (mais pas uniquement) sur lesquels s'ouvre la réflexion du XX^e^ siècle.

Ces deux régimes apparaissent dans ces dernières pages comme deux totalités homogènes et cohérentes. Mais cette cohérence relève fondamentalement d'un effet de reconstitution qui n'a pu venir pour nous qu'à la fin de notre enquête. Cette restitution détaillée était d'autant plus nécessaire que notre enquête a été sinueuse. Toutefois, elle présente un tableau statique de la situation qui ne saurait correspondre que schématiquement au développement effectif de constitution de ces régimes. Qui plus est, une telle présentation de ces régimes comme des totalités achevées, closes et concurrentes ne permet pas de comprendre ce qui constitue le principe de leur dynamique interne et qui les projette au-delà de cette image figée, pas plus que les transversalités qui ont lieu entre eux. Si nous ne dressons ce tableau systématique que dans les pages finales de notre long parcours, c'est justement parce que ce parcours a privilégié l'aspect dynamique du problème, cherchant à le cerner sous la forme d'une enquête ou d'une lecture symptomale.

À travers les multiples facteurs de cette dynamique que cette enquête a pu mettre en lumière, il y en a un que nous considérons comme sa véritable découverte, à savoir *la place problématique de l'Arithmétique dans ce processus constitutif de formalisation du sens*. En effet, comme nous l'avons montré, d'une part, le rapport à l'Arithmétique des deux grands régimes de mathématisation de la logique a constitué le principe de leurs dynamiques respectives ; de l'autre, les aspects sémiotiques liés à l'Arithmétique, et au nombre entier plus précisément, sont apparus comme fournissant les éléments d'une transversalité, liée à la notion de contenu dans la pensée logique. Que ce problème constitue une dimension cruciale du début du développement de la pensée formelle, cela a pu être constaté par le fait que sa restitution dans l'histoire de ce développement a permis de donner une raison, et jusqu'à une cohérence, aux ambiguïtés, équivoques, hésitations, lacunes et contradictions qui habitent les œuvres singulières de Boole et de Frege. Ces difficultés ont été trop rapidement tenues pour des manques et des faiblesses par la tradition logique du XX^e^ siècle alors que, comme nous l'avons montré, elles constituent précisément la marque de la détermination aussi rigoureuse que singulière du problème qui est le leur.

Cette place constitutive de l'Arithmétique apparaît dès que l'on identifie les lacunes du système sémio-logique frégéen, lorsqu'on le restitue d'après les formulations qui furent effectivement les siennes. Nous avons identifié deux de ces lacunes : d'une part, les unités fonctionnelles de la logique étaient censées être déterminées à partir des expressions en fonction d'un principe déductif, qui demeurait pourtant insuffisant dans le système frégéen ; d'autre part, le plan des expressions logiques était censé correspondre de la façon la plus univoque et directe au plan des contenus logiques, alors qu'un excès des expressions par rapport aux unités du contenu pouvait être constaté. Ce n'étaient pas là des insuffisances du système en tant que tel, puisque des unités logiques y étaient effectivement définies, tout comme des correspondances biunivoques entre expressions et contenus parvenaient à être assurées[624]. L'insuffisance portait plutôt sur le *fondement* de ces déterminations (si l'on peut

[624] « Au paradoxe de Russell près », suivant la belle expression de Philippe de Rouilhan (1988, p. 17).

s’exprimer ainsi, pour renverser les termes dans lesquels la question des fondements en logique et mathématiques s’est historiquement posée). D’où pouvaient venir ces déterminations silencieuses mais effectives d’une logique qui se présentait ouvertement comme une logique du contenu ? Les formulations mêmes de Frege nous ont donné la réponse : ces déterminations d’une logique du contenu proviennent de l’Arithmétique en tant que langage ou système des signes.

Cette thèse s’est vue confirmée par la confrontation de la constitution de la logique frégéenne à celle des Booléens, que Frege dénonce lui-même comme abstraite face à sa logique du contenu. La relecture du processus d’émergence de la logique Booléenne à travers ce prisme a fait pourtant bien plus que confirmer cette thèse en constatant que l’Arithmétique a été exclue des conditions d’édification d’une logique mathématisée se proclamant explicitement abstraite. Elle a mis en relief un aspect resté jusque-là inaperçu de ceux qui ont étudié la naissance du formalisme symbolique dans le contexte de l’Algèbre abstraite anglaise. En effet, ces études ont généralement mis l’accent sur la contestation de tout appel à l’intuition géométrique au profit de la manipulation des symboles abstraits de l’Algèbre. Mais dès que l’on pose la question de la place de l’Arithmétique dans ce processus de symbolisation de l’Algèbre, on remarque que si l’exclusion de l’intuition géométrique fut aisée et rapide, la prise de distance de l’Algèbre par rapport à l’Arithmétique a été bien plus subtile, longue et épineuse. Au point que cette expulsion de l’Arithmétique du domaine du symbolique peut être vue comme le principe dynamique même de la constitution de l’Algèbre abstraite, conduisant à la formalisation booléenne de la logique.

En effet, si un signe géométrique, comme une courbe par exemple, comporte des différences évidentes avec un signe algébrique de type caractéristique « a », la différence en termes strictement sémiotiques entre celui-ci et un signe arithmétique, et plus précisément numérique, comme « 3 » par exemple, est loin d’être aussi claire. Le geste plus ou moins conscient des algébristes anglais a été de refuser systématiquement tout statut sémiotique aux nombres, en les traitant constamment comme des objets, dont les signes numériques seraient comme la marque spontanée. Les inconséquences d’une telle approche provoquaient la réapparition de propriétés numériques au niveau des différents symboles de l’Algèbre en train de se construire : au niveau du signe d’opération d’abord (« $+$ », « $\times$ »…), de l’égalité ensuite (« $=$ »), des coefficients et des variables (« a, b »… et « x, y »…), et des indices (« a^m »). Le traitement de ces difficultés comporta l’extension et la consolidation progressive du plan symbolique dans lequel une Algèbre de type nouveau pouvait se développer. Mais en même temps, ce mouvement a conduit l’Algèbre à se rapprocher du terrain de la logique.

Étrangement, celui qui accomplit ce passage de l’Algèbre à la logique fut celui par qui une persistance de l’Arithmétique fut affirmée au sein de l’espace symbolique. La raison de ces deux tendances opposées a sans doute été la même : bien que de manière timide, Boole attribue une existence sémiotique au nombre. C'est ainsi qu'il a pu prévoir une loi symbolique qui pouvait prévenir l'engendrement du nombre là où celui-ci avait trouvé sa dernière demeure, à savoir dans les signes d'indice. Au moyen de la loi $xx = x$ ou $x^2 = x$, sanctionnant l'identité de l'itération, et empêchant l'apparition des signes numériques au niveau des symboles, Boole définit toute la surface d'une logique symbolique. L'adoption de la même loi pour l'addition, comme opération duale de la multiplication, devait achever simultanément le processus d'exclusion sémiotique du nombre et de constitution d'une logique mathématisée symbolique et abstraite.

Seulement, Boole n'est pas allé jusque là, et la systématisation de la logique symbolique a dû attendre les travaux de Jevons pour se réaliser, et ceux de Schröder pour se consolider. Mais comme nous l'avons montré, l'absence d'une loi des indices pour l'addition analogue à celle de la multiplication ne constitue pas chez Boole un oubli ou une erreur. Son absence est consciente et volontaire, et ses effets constituent pour nous une nouvelle confirmation, cette fois positive, du rapport intrinsèque entre l'Arithmétique et le contenu dans la logique mathématisée. En effet, le manque d'une loi comme $x + x = x$ dans le système de Boole entraîne l'introduction des signes numériques au même niveau que les symboles, car sans une telle loi, on a que : $x + x = 2x$, $x + x + x = 3x$, etc. Or, nous avons montré que la présence de ces signes dans le système de la logique symbolique constituait une dimension expressive, mais ininterprétable d'après les conditions de la signification instaurées par le régime symbolique. Le plus surprenant est que cette dimension engendrait de véritables effets de contenu. Par une analyse de leur fonctionnement il est apparu que les signes numériques comportaient dans le système de Boole un principe objectal, irréductible à la conceptualité incarnée par les symboles soumis à la loi multiplicative des indices. Ce principe était celui de la différence numérique non conceptuelle, typiquement associée à la forme des objets individuels, et plus généralement, au rapport des touts et des parties. Ce n'est pourtant pas le seul principe de contenu qui agit dans sa logique. Nous avons aussi identifié un principe conceptuel de contenu, par lequel le système est capable de définir les conditions sur les contenus de ses propres concepts. Ce principe est double, et résulte encore des effets de l'Arithmétique dans le système logique. Car à la différence des Booléens, Boole attribue bien un caractère numérique aux signes d'indice, même lorsqu'ils apparaissent dans la loi multiplicative des indices qui a pour effet de les éliminer. Ainsi pour Boole, la loi $x^2 = x$ constitue bien une équation de *deuxième* degré, et c'est ce degré qui est responsable du caractère *dichotomique* de la conceptualité (tout comme $x^3 = x$ le serait de son caractère trichotomique). Mais d'autre part, et plus profondément, l'invention d'une Arithmétique à deux valeurs (Arithmétique de 0 et 1), permet de définir les conditions d'interprétabilité pour cette conceptualité dichotomique générale.

Toutes ces propriétés, perdues comme telles dans les versions postérieures de la logique symbolique, constituent des principes de contenu logique dans ce qu'elles impliquent ou suggèrent une capacité du système logique pour déterminer de façon interne des propriétés de ce qui, dans sa propre configuration sémiologique, apparaît comme contenu externe (objets ou interprétations). Elles sont toutes associées aux effets de la présence des signes numériques dans le système. Mais si ces effets ne sont pas arrivés à trouver une place dans le cadre de la logique symbolique abstraite, c'est que Boole a été incapable de trouver la façon de donner une consistance symbolique au nombre et à l'Arithmétique. Pour le meilleur ou pour le pire, les destins du nombre et du contenu sont toujours restés indissociablement liés dans le cadre de l'Abstraction symbolique.

Ce parcours minutieux à travers l'espace qui mène de l'Algèbre à la logique symbolique abstraite nous a procuré la perspective adéquate pour pouvoir envisager une réponse directe aux questions soulevées dans le cadre de la logique de contenu frégéenne : l'Arithmétique agit sur la constitution de la logique à travers l'organisation d'un espace sémiotique où s'articulent les catégories sémiologiques fondamentales sur lesquelles elle s'édifie. C'est ainsi que nous avons découvert la présence d'une analyse sémiotique de l'Arithmétique agissant sous toute l'étendue de la configuration sémiologique de la logique frégéenne, informant de façon intime les distributions et les déplacements. Il est apparu alors que si des unités telles que l'individu, le concept, le contenu jugeable et la valeur de vérité pouvaient se définir sur le plan des contenus, alors que le principe déductif qui était censé en être le principe demeurait inefficace, c'était grâce à la mise en avant de la catégorie sémiologique d'*objet*, capable de découper des unités à tous les niveaux d'articulation des expressions. De façon parallèle, si l'excès effectif du plan des expressions par rapport au plan des contenus se trouve réduit dans son système, c'était par la mise en avant d'une notion de *sens*, définissant un territoire dans lequel la multiplicité expressive se résout *nécessairement* en unité *référentielle*. Certes, ces aspects ont été déjà suffisamment remarqués par les multiples études de l'œuvre frégéenne. Mais si d'une part ces aspects n'ont pas été souvent rapportés aux problèmes d'un expressionnisme et d'une logique du contenu ou du sens, de l'autre, jamais on n'avait relevé l'action de l'analyse sémiotique de l'Arithmétique derrière ces deux circonstances. En effet, tant la catégorie d'objet que la résolution référentielle nécessaire de la multiplicité des sens trouve, chez Frege, et sa forme et comme son fondement dans la positivité des signes de l'Arithmétique.

Ce n'est pas le lieu ici de reprendre le détail de cette action souterraine de la sémiotique de l'Arithmétique. Il suffit de rappeler la raison fondamentale dont Frege s'autorise pour court-circuiter les exigences d'une logique du sens à l'égard de la primauté problématique des principes d'inférence sur la constitution des unités, ainsi que de l'excès irrémédiable des expressions sur les contenus, du sens sur la référence. Cette raison est aussi élémentaire dans son énoncé que redoutable dans ses effets : un signe comme « 2 » est une marque simple, renvoyant de manière directe et non problématique au nombre deux. Certes, Frege est connu pour avoir proposé une conception qui fait du nombre deux une entité logique articulée et complexe. Mais ce n'est nullement du nombre deux que nous parlons d'abord ici, mais du rapport qu'un signe comme « 2 » peut maintenir avec lui, même en tant qu'unité logique complexe et articulée. Ce rapport-là, Frege l'a toujours envisagé sous la forme d'une évidence et d'une simplicité qui contrastent avec le poids qu'il lui faisait porter. Au point que non seulement sur lui reposent les mérites comme les lacunes que nous avons soulevés dans sa logique du contenu, mais c'est aussi en lui que résident les principes de son échec. Et ce fut, en effet, au plus profond de l'inquiétude que suscita en lui le paradoxe de Russell qu'il entrevit ce qui pouvait se cacher derrière la simplicité apparente d'un signe comme « 2 ».

Ce qui se cache derrière un signe comme « 2 », c'est d'abord la nature doublement articulée du langage arithmétique. Ce qui est une autre manière de dire : l'articulation de l'Arithmétique sous la forme du « langage des mots » qu'il était appelé à critiquer. Ainsi le contenu d'un signe comme « 2 », même et surtout son contenu proprement arithmétique, est comparable aux signes « a » et « y » comme des unités signifiantes dans la langue française. En effet, simples dans leur aspect strictement sémiotique (en tant que caractères, ou lettres), ils ne peuvent être envisagés respectivement comme la conjugaison d'un verbe, ou comme un pronom adverbial, qu'en mobilisant toute une série d'articulations complexes qui se révèle dès que l'on tente d'exhiber leur sens. Que la simplicité de ces signes ne soit qu'un effet de surface contingent, c'est là quelque chose que la traduction la plus naïve dans une autre langue suffit à montrer ; tout comme devrait suffire à l'établir pour le nombre, l'écriture du nombre 2 dans un autre système de numération, voire tout simplement dans une autre base. Simple, le signe « 2 » ne l'est que comme les signes « a » ou « y » sont simples, c'est-à-dire *lorsqu'ils ne veulent rien dire*. Ce qui se cache sous le signe « 2 », c'est donc tout un faisceau de synthèses à la fois sémiotiques et déductives, qui trouvent dans le domaine des pratiques mathématiques une façon de s'accorder. Nous avons parcouru celles qui agissaient à la base des analyses sur lesquelles tant Boole que Frege appuyaient leurs édifications respectives. Ce sont ces synthèses qui déterminent, à n'en pas douter, le lien énigmatique qui se tisse entre Arithmétique et contenu dans la logique. Les raisons de ce nouage ne sont pourtant pas faciles à déceler. La mise en rapport de nos analyses du système de Boole avec celles du système frégéen nous a pourtant suggéré une réponse. Les signes de l'Arithmétique incarnent un double principe de différence (en rapport à un double principe de répétition) capable de supporter les déterminations logiques typiquement associées à la conceptualité et l'objectalité respectivement, ou d'une autre manière, qui n'est pourtant pas sans lien avec la première, au sens et à la référence. Principes que l'on pourrait nommer très grossièrement de généralité et de singularité. L'essentiel du nombre en tant que signe, c'est qu'il incarne ces principes comme étant strictement indissociables, tant dans les aspects sémiotiques qui le constituent (au niveau de leur écriture), comme dans les aspects calculatoires qui le définissent. *Langue d'un calcul et calcul d'une langue*.

Mais en quoi tout cela peut-il être appelé « contenu », et encore plus « contenu logique » ? Chaque auteur, chaque régime, même, a eu ses raisons pour appeler ainsi l'ensemble de ces propriétés. Mais tout au long de nos analyses une raison est revenue avec insistance. Le contenu logique, c'est-à-dire le problème du contenu dans la logique, ou le problème d'une logique du contenu nous est apparu constamment associé à la possibilité pour un système logique de déterminer ce dont ses signes sont les signes sans faire appel à d'autres principes qu'à ceux du système lui-même. De manière concrète, cela suppose, d'une part, que ni la structure des concepts qu'il manipule, ni les objets auxquels ils réfèrent ne soient reçues comme déjà donnés : ils se déterminent comme résultat du fonctionnement du système lui-même. Double indépendance donc, par rapport à ce que l'on appellera plus tard « métalangage » d'une part, et à une attribution générale et préalable de valeurs de vérité d'autre part. Dans la première partie nous avons vu en quel sens le système frégéen possédait cette puissance. Sans compter la capacité suffisamment connue de définir logiquement des objets comme les suites, ou même les nombres, nous avons repéré cette capacité de contenu, d'une part dans le principe expressif par lequel la notion de contenu était définie (définition qui fait du contenu un effet de la multiplicité expressive), de l'autre dans ses expressions de contenu (par exemple, la généralité) et la réversibilité de la déduction, qui étaient toutes les deux capables de rendre le système indépendant des valeurs de vérité pour ses propositions. Ce sont d'ailleurs les mêmes propriétés que nous avons pu reconnaître dans la troisième partie derrière les effets, actuels ou possibles, des multiples dimensions des signes numériques dans le système de Boole : différence numérique non conceptuelle comme principe d'individualité, régime dichotomique général pour la conceptualité, définitions des conditions d'interprétabilité, résultant dans tous les cas du fonctionnement du système.

*
* *

Si un expressionnisme formel est de nos jours à reprendre en philosophie, si une logique du contenu ou du sens reste encore le lieu où la philosophie peut reconnaitre sa tâche et son urgence, l'affirmation ouverte de la complexité de ces synthèses dans l'espace intermédiaire du signe doit, à n'en pas douter, constituer le point de départ. À la fin de notre parcours nous avons été amenés à exhiber quelques fragments de cette complexité, comme des preuves qu'elle résidait déjà au point de départ qui fut celui même de Frege et de l'Expressionnisme qu'il a introduit en logique. Malgré la dispersion avec laquelle nous les avons disposés, ces fragments nous ont permis de suggérer que c'est la même complexité qui, à travers les travaux de Gödel, détermina les conditions pour une logique qui est toujours la nôtre. D'autre part, la présentation systématique parallèle des régimes symbolique et expressionniste à laquelle nous venons de nous livrer, permet de penser les conditions qui se dégagent pour un prolongement non figuratif d'un expressionnisme capable de prendre en charge une logique du sens. Inspirés par l'ensemble de ces éléments, nous voudrions suggérer pour conclure deux directions dans lesquels il nous semble que l'Expressionnisme formel a trouvé la manière de se développer dans le contexte de la pensée contemporaine, après les impasses qui l'ont finalement réduit au silence au tournant du XIX^e siècle.

D'une part, suivant une lignée qui est restée presque entièrement indépendante de l'émergence de la logique formelle, la tradition du *structuralisme linguistique* qui s'organise à partir des travaux de Saussure prend le relais d'une pensée exhaustive du signe, qui se construit autour d'un axe expression-contenu, qui nous semble correspondre parfaitement à celle qui animait l'Expressionnisme inauguré par Frege. Notamment, les travaux de Hjelmslev sont consacrés à une élaboration minutieuse des catégories d' « expression » et « contenu », définissant la distinction fondamentale d'une analyse fonctionnelle du signe[625]. La sémiologie de Hjelmslev (sa « glossématique ») se présente alors comme un expressionnisme radical, qui semble capable d'adresser à la pensée frégéenne une objection décisive : un système des signes n'a aucunement besoin d'avoir recours à un langage privilégié (comme celui de l'Arithmétique) pour pouvoir se structurer entièrement, structurant du même coup ses contenus. Lorsque les notions d'expression et de contenu sont convenablement définies (ce qui implique leur inscription dans le réseau conceptuel plus ou moins strict d'une véritable théorie du langage et du signe) l'interaction de ce qu'elles décrivent est suffisante pour qu'un système de signes trouve de manière immanente sa structure. Les différents aspects sémiotiques du nombre que nous avons décelés tout au long de notre travail semblent confirmer cette approche, où le contenu des nombres ne peut en

[625] Cf. Hjelmslev (1971), (1966) et (1975). Pour une perspective sur les enjeux philosophiques du structuralisme, où la place de Hjelmslev est centrale, on pourra toujours se référer à Maniglier (2006).

dernière instance être défini que par le jeu complexe de structures agissant à même les conditions de son existence en tant que signe. Il reste pourtant que l'approche structuraliste en linguistique (ou dans les différentes disciplines où le structuralisme a pu exercer son influence) ne s'est jamais véritablement confrontée au problème de la spécificité des signes mathématiques, et arithmétiques tout particulièrement, tout comme aux exigences d'une logique formalisée[626]. Cela soulève à notre avis quelques difficultés qui, plus que des objections, constituent plutôt des pistes pour la continuation des recherches. D'abord, il s'agirait de poser la question de la spécificité des signes mathématiques par rapport aux signes linguistiques. On pourrait se demander même plus précisément, en quoi consiste la singularité sémiotique des nombres, qui a été responsable d'un lien si constant avec la catégorie de contenu dans la logique mathématisée. De ce point de vue, la pensée de Frege, ainsi que celle de Boole, auraient sans doute la capacité de contribuer de façon originale à une conception structuraliste du signe, dans la mesure où elles permettent de comprendre l'association de la sémiotique du nombre à une structure de la référence ou de l'indication, qui est restée relativement négligée par l'approche structuraliste[627]. Ensuite, il faudrait poser la question des conditions formelles propres à la pensée structurale comme telle. Car du point de vue d'un expressionnisme formel, force est de reconnaître qu'il ne peut y avoir des déterminations expressives, même pures comme celles que Hjelmslev semble mettre en avant, sans que des effets mathématiques, fût-ils élémentaires, ne se produisent. Autrement dit, il n'y a pas de structure non mathématique. L'interdépendance entre déterminations expressives structurales et mathématiques, insuffisamment étudiée dans le cadre de ces problèmes, semble donc définir un lieu crucial pour la pensée d'un expressionnisme formel contemporain. Enfin, la question de la conséquence logique, de l'implication, de l'inférence ou de la preuve restent dans le cadre de la pensée structurale étrangement absente. Ceci est certainement dû à la différence dans les origines respectives du structuralisme et de la logique formelle. Néanmoins, dans le cadre de ces croisements réclamés par un expressionnisme formel, la position du problème de l'inférence dans le cadre d'une approche structurale du signe pourrait avoir sans doute des effets décisifs sur le domaine de la logique, comme sur tous les domaines dans lesquels la pensée structurale a exercé, et exerce toujours, son influence.

[626] Nous avons mentionné dans l'introduction de notre travail la tentative de Herreman (2000), comme l'exception qui confirme la règle. D'autre part, bien qu'animée par d'autres motifs que ceux que nous avançons ici, l'œuvre de Jean Petitot est sans doute fondamentale. Voir, par exemple, Petitot (1985).

[627] Ce point a été souligné et élaboré avec particulière acuité par Lyotard (1971), qui a ouvertement recours à la notion frégéenne de référence pour développer sa critique du structuralisme. Nous avons abordé ces questions, en essayant de les mettre en rapport avec le problème d'une sémiotique mathématiques dans Gastaldi (2011).

L'autre direction que nous voudrions indiquer ici pour finir est celle définie par la *Théorie de preuve* qui s'est développée en logique à la suite des résultats de Gödel, à partir des travaux de Gentzen, et qui s'étend jusqu'à nos jours, par exemple, dans le travail de J.-Y Girard[628]. En effet, on peut reconnaître à l'intérieur de cette tradition les différents éléments qui nous sont apparus au long de notre parcours comme définissant le territoire spécifique du contenu ou du sens dans le cadre d'une construction sémio-logique. Nous les avons mis en évidence lorsque l'opportunité s'y présentait. Ce n'est pas le lieu ici d'un traitement rigoureux de ces rapports. On peut néanmoins mentionner la pertinence d'un langage comme le Lambda-calcul de Church[629] pour assumer de façon systématique les exigences que l'Expressionnisme, et plus précisément le projet d'une Logique du sens, a été capable de dresser contre la figuration frégéenne : calcul purement fonctionnel, abandonnant l'asymétrie par laquelle Frege cherchait à brider de façon préalable l'articulation de la fonction, faisant apparaître les exigences d'une structure (d'un typage) pour les expressions fonctionnelles définies de manière immanente, et où un concept de nombre (les entiers de Church) se laisse définir au niveau même des articulations expressives, qui semble répondre aux questions que nous avons soulevées à propos de la conception figurative des nombres. Ce n'est donc pas par hasard si une version embryonnaire de Lambda-calcul émergeait naturellement, comme nous l'avons mentionné, des discussions entre Frege et Russell autour des écueils de la figuration[630]. La Théorie de la preuve qui trouve dans ce langage l'un de ses moyens privilégiés d'expression relèvera pour sa part le défi manqué par Frege d'une délimitation des unités logiques à partir, non pas de l'articulation propositionnelle, mais de la structure de la déduction, ou plus précisément, des preuves. Qui plus est, ces structures des preuves (et donc, les unités aux différents niveaux qui en résultent) ne cherchent pas, dans le cadre de ces travaux, à être définies extérieurement et de façon préalable à la construction de ses contenus, mais ont la vocation d'être déterminées comme résultat de l'interaction des propriétés inhérentes au système[631]. Les déplacements originaux qu'une telle perspective peut faire subir à la question de l'identité, de la répétition et de la différence des signes sont considérables, et se trouvent d'ailleurs assumées dans une approche comme celle de la logique linéaire de J.-Y.

---

[628] Ces remarques s'inspirent pour une grande part de la perspective que J.-Y. Girard a élaborée sur les développements de la Théorie de la preuve, et sur les multiples contributions qu'il y a réalisées. Une présentation remarquable de l'ensemble de sa « doctrine » peut être trouvée dans les deux volumes de son ouvrage *Le point aveugle*, Girard (2006; 2007).

[629] La filiation frégéenne de Church était, au demeurant, ouvertement assumée. Pour une étude du lien entre Frege et Church du point de vue d'une logique du sens et de la référence, voir Klement (2002; 2010).

[630] Cf. Klement (2003).

[631] Sur la question de l'interaction en logique depuis le point de vue de la Théorie de la preuve, on pourra voir la préface de l'ouvrage dirigé par Jean-Baptiste Joinet (2007).

Girard (qui nie explicitement la règle de contraction $AA = A$). Enfin, la correspondance établie dans ce contexte entre preuves logiques et programmes fonctionnant sous la forme de règles de réécriture trahit la nature expressive de cette perspective. Mais d'autres dimensions de l'Expressionnisme s'y devinent également, par exemple, dans l'incorporation dans le système logique de dimensions sémiotiques hétérogènes au pur symbolisme ; notamment des déterminations diagrammatiques, voire géométriques ou topologiques, qui viennent capturer des propriétés essentielles des preuves (comme dans le cas des réseaux de preuves, des domaines de Scott, ou de la Géométrie de l'interaction de Girard, par exemple). Pourtant, c'est sans doute sur ce point que la tradition logique de la Théorie de la Preuve montre ses limites par rapport à une approche expressionniste capable d'étendre son action au-delà du terrain après tout très circonscrit d'une logique scientifique mathématisée[632]. Pour qu'une véritable théorie formelle du sens puisse être informée par ces développements, il faudrait certainement que la Théorie de la preuve trouve les concepts, ou plus généralement, la configuration sémiologique capable d'intégrer la puissance critique qu'elle recèle par rapport à une réflexion sur le signe en tant que tel.

Certes, ce ne sont encore là, tout au plus, que des simples indices. Comme n'est sûrement qu'un nouveau symptôme ambigu le fait que, tant Gilles Deleuze dans le sillage de la tradition structuraliste, que Jean-Yves Girard dans celui de la Théorie de la preuve, parviennent, avec vingt ans d'écart et de façon radicalement indépendante, à postuler la nécessité d'élaborer une *logique du sens*[633]. Mais comme pour tous les indices et les symptômes que nous avons eu l'occasion de rencontrer et de suivre au long de toutes ces pages, nous voudrions voir dans ceux-ci un appel et en l'occurrence une promesse, ouvrant pour l'avenir à de nouvelles alliances, qui poursuivront et approfondiront le projet d'une véritable logique du sens.

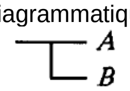
---

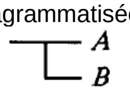
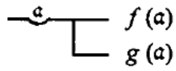
[632] Le volume dirigé par Jean-Baptiste Joinet et Samuel Tronçon (2009) constitue à cet égard une belle tentative pour explorer les multiples effets de cette approche sur des domaines non immédiatement liés aux aspects scientifiques de la logique formelle.

[633] Cf. Deleuze (1969) et Girard (1988).

Annexe

Tableau comparatif des régimes de formalisation du sens

		ABSTRACTION SYMBOLIQUE	**EXPRESSIONNISME**
STRATE MATHÉMATIQUE (pratiques)	Domaine défini	Algèbre abstraite	Arithmétique fonctionnelle
	Domaines concernés	Analyse algébrique Calcul d'opérations	Théorie des grandeurs Théorie des fonctions Théorie des nombres
	Effet de retour sémiologique	Sémiotisation générale de l'espace mathématique Algèbre abstraite vs. Algèbre arithmétique	Arithmétisation de l'Analyse
STRATE SÉMIOTIQUE I (fonctionnements)	Principe sémiotique à sémiotiser	Unité simple	Différence articulatoire (saturation-insaturation)
	Signes mathématiques concernés	Signes d'opération $+, \times, \frac{d}{dx}\ldots$	Différence entre signes variables a, b, c ... et constants $+, -, \sqrt{}, 0, 1, 2$ ...
	Sémiotisation principale	Littérale $a, b, c \ldots, \phi, \rho$ ...	Articulatoire $f(a)$
	Sémiotisations accessoires	Indicielle : $aa = a'' = a^2$	Diagrammatique  Typographique α, a, a
	Unités sémiotiques	Simple : Opérateur	Complexe : Fonction

		ABSTRACTION SYMBOLIQUE	EXPRESSIONNISME
	Détermination des unités	Lois opératoires ex : $f(a) + f(b) = f(a + b)$	Liaison au niveau des fonctions par connexions diagrammatisées  Liaison des constituants par marquage d'identification  Niveaux d'articulation $f\big(g(b)\big)$
	Articulation des unités sémiotiques	Externe : Symbolique	Interne : Caractéristique Externe : Spatiale ou digrammatique, définissant des domaines
	Principes de différence et de répétition des unités	Différence comme distinction : $a \neq b$ Indistinction comme répétition : $a = a$ Répétition comme itération : $aa = a^2$ Possibilité de l'itération comme identité : $a^2 = a$	Unités comme résultat de la sémiotisation d'une différence entre répétition et différence. Identité définie au croisement des séries. $\vdots$ $\boldsymbol{g}(a)$ $\cdots\ f(\boldsymbol{b})\ \ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{b})\ \ h(\boldsymbol{b})\ \cdots$ $\boldsymbol{g}(c)$ $\vdots$ Possibilité de poursuivre la sémiotisation dans des niveaux plus élevés
	Morphologie du plan sémiotique	Homogène	Hétérogène
	Propriétés généralement induites	Symétrie externe (commutativité, associativité des opérations)	Asymétrie interne (signe constant-signe variable) Asymétrie externe (différences de niveaux et de domaines)
STRATE SÉMIOTIQUE II : SÉMIOLOGIE (concepts)	Propriété à saisir	Généralité	Articulation
	Nature du signe	Symbole	Expression
	Acte	Abstraction	Analyse comparative

		ABSTRACTION SYMBOLIQUE	EXPRESSIONNISME
	Méthode	Effacement des différences	Variation-Invariance (fonction-argument)
	Axe	Symbole abstrait-Contenu concret	Expression-Contenu
	Ontologie	Concept-Objet	Sens-Référence
	Dimensions du signe	Représentation (d'un contenu par un symbole) Interprétation (d'un symbole par un contenu)	Expression (d'un sens par un signe) Désignation (d'une référence par un signe)
	Effet de sens	Signification	Expression
	Polarité émergente	Forme-Contenu	Expression-Contenu
STRATE LOGIQUE (système)	Unité logique principale	Concept	Proposition
	Dispositif sémio-logique	Opérateur de sélection	Fonction propositionnelle
	Condition sur les signes	Identité de l'itération $x^2 = x$	Asymétrie articulatoire saturé-insaturé : « $f(\ )$ »-« a »
	Support sémiotique des figures logiques	Concepts ou propositions associés à l'identité ou indistinction de la répétition d'un signe, équivalente à la contradiction : $x(1-x) = 0$ $Aa = 0$	Niveaux d'articulation : « a » : individu « $f(\ )$ » : concept « $f(a)$ » : proposition « $\vdash f(a)$ »: valeur de vérité
	Saisie sur le langage ou règle informelle de réécriture	Nominalisation de l'attribution adjectivale ex : « Les pierres sont lourdes » en « Les pierres sont des choses lourdes »	Nominalisation des phrases adverbiales, suivie du prédicat « …est un fait » ex : « Archimède Périt… » en « La mort d'Archimède… est un fait »
	Unités sémio-logiques formelles	Classes	Fonctions

		ABSTRACTION SYMBOLIQUE	EXPRESSIONNISME
	Détermination des unités logiques	Extensionnelle	Ni Extensionnelle ni Intensionnelle
	Sens du mot « formel »	« symbolique »	« expressif »
	Décidabilité	Décidable	Indécidable
	Type de logique	Logique propositionnelle	Calcul fonctionnel (Calcul des prédicats)
	Nature de la logique	Logique du concept	Logique du contenu et du sens

Bibliographie

Agazzi, E., & Vassallo, N. (Éds.). (1998). *George Boole. Filosofia, Logica, Matematica.* Milan: Franco Angeli.

Arbogast, L. F. (1800). *Du Calcul des Dérivations.* Strasbourg: Imprimérie de l'Évrault, Frères.

Aristote. (2007). *Organon VI. Réfutations sophistiques.* (J. Tricot, Trad.) Paris: Vrin.

Aristote. (2008). *Organon I et II. Catégories. De l'interprétation.* (J. Tricot, Trad.) Paris: Vrin.

Avigad, J. (2006). Methodology and metaphysics in the development of Dedekind's theory of ideals. Dans J. Ferreirós, & J. Gray (Éds.), *2006* (pp. 159-186).

Babbage, C. (1826). *On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning.* Cambridge: J. Smith, Printer to the University.

Baker, G. P., & Hacker, P. (1984). *Frege: logical excavations.* New York: Oxford University Press.

Barlow, P. (1811). *An Elementary Investigation of the Theory of numbers.* London: J. Johnson and Co.

Barlow, P. (1849). Theory of Numbers. Dans E. Smedley, R. H. J., & J. Rose Henry, *Encyclopaedia Metropolitana* (pp. 642-671). London: John Joseph Griffin and Company.

Barot, E. (2005). En quoi la crise des fondements des mathématiques est-elle terminée? *Philosophie Scientiae*(9-2), 23-39. Consulté le 13 Octobre, 2012.

Beaney, M. (1996). *Frege. Making Sense.* London: Duckworth.

Beaney, M. (2003). Russell and Frege. Dans N. Griffin (Éd.), *2003* (pp. 128-170).

Beatty, R. (1969, Janvier). Peirce's developpement of quantifiers and of predicate logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic, X*(1), 64-76.

Bell, D. (1983). Russell's Correspondance with Frege [review of Gottlob Frege, Philosophical and Mathematical Correspondence, ed. B. McGuinness]. *Russell: the Journal of Bertrand Russell Studies*, *3*(2), 159-170.

Bell, E. T. (1927, Février). Successive Generalizations in the Theory of Numbers. *The American Mathematical Monthly*, *34*(2), 55-75.

Belna, J.-P. (2002). Frege et la géométrie projective : La Dissertation inaugurale de 1873. *Revue d'histoire des sciences, 55*(3), 379-410.

Benmakhlouf, A. (1997). *Frege Logicien Philosophe.* Paris: P.U.F.

Benmakhlouf, A. (2001). *Le vocabulaire de Frege*. Paris: Ellipses.

Benmakhlouf, A. (2002). *Frege, le nécessaire et le superflu.* Paris: Vrin.

Benoist, J. (2001). *Représentations sans objet. Aux origines de la phénoménologie et de la philosophie analytique.* Paris: P.U.F.

Benoist, J. (2002). Husserl et Frege sur le concept. Dans R. Brisart (Éd.), *2002* (pp. 203-224).

Benoist, J. (2004). Le problème de la référence au début du XXe siècle. Essai de philosophie comparée. Dans F. Worms (Éd.), *Le moment 1900 en philosophie.* Villeneuve: Presses Universitaires du Septentrion.

Benoist, J. (2009). *Sens et sensibilité.* Paris: Les Éditions du Cerf.

Bölling, R. (2007). From Reciprocity Laws to Ideal Numbers: An (Un)Known Manuscript by E.E. Kummer. Dans C. Goldstein, & N. S. Schappacher (Éds.), *2007* (pp. 271-290).

Boniface, J. (2007). The Concept of Number from Gauss to Kronecker. Dans C. Goldstein, N. Schappacher, & J. Schwermer (Éds.), *2007* (pp. 315-342).

Boole, G. (1841a). Researches on the Theory of Analytical Transformations. *Cambridge Mathematical Journal, II*, 64-73.

Boole, G. (1841b). On Certains Theorems in the Calculus of variations. *Cambridge Mathematical Journal, II*, 97-102.

Boole, G. (1841c). On The Integration Of Linear Differential Equations With Constant Coefficients. *Cambridge Mathematical Journal, II*, 114-119.

Boole, G. (1841d). Analytical Geometry. *Cambridge Mathematical Journal, II*, 179-188.

Boole, G. (1843a). Exposition of a General Theory of Linear Transformations. Part I. *Cambridge Mathematical Journal, III*, 1-20.

Boole, G. (1843b). Exposition of a General Theory of Linear Transformations. Part II. *Cambridge Mathematical Journal, III*, 106-119.

Boole, G. (1843c). On the Transformation of Definite Integrals. *Cambridge Mathematical Journal, III*, 216-224.

Boole, G. (1844). On a General Method in Analyis. *Philosophical Transactions of The Royal Society, 134*, 225-282.

Boole, G. (1845a). On the Inverse Calculus of Definite Integrals. *Cambridge Mathematical Journal, IV*, 82-87.

Boole, G. (1845b). On the Theory of Developments. Part I. *The Cambridge Mathematical Journal*, 214-223.

Boole, G. (1846). On the Equation of Laplace's Function. *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, I*, 10-22.

Boole, G. (1847). *The Mathematical Analysis of Logic*. Cambridge: Macmillan, Barclay, & Macmillan.

Boole, G. (1848a). The Calculus of Logic. *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, III*, 183-198.

Boole, G. (1848b). The Nature of Logic. Dans Boole, *1997* (pp. 1-12).

Boole, G. (1849). Elementary Treatise on Logic not mathematical including philosophy of mathematical reasoning. Dans Boole, *1997* (pp. 13-41).

Boole, G. (1851). Sketch of a theory and method of probabilities founded upon the calculus of logic. Dans Boole, *1952* (pp. 141-166).

Boole, G. (1854). *An Investigation of the Laws of Thought.* London: Walton and Maberly.

Boole, G. (1854/60). The Philosophy of Logic - A Sequel to "The Laws of Thought". Dans Boole, *1997* (pp. 117-153).

Boole, G. (1855). Phylosophy of Mathematics. Dans Boole, *1997* (pp. 167-178).

Boole, G. (1856). On the Foundations of the Mathematical Theory of Logic and on the Philosophical Interpretation of Its Methods and Processes. Dans Boole, *1997* (pp. 63-104).

Boole, G. (1871). Of Propositions Numerically Definite. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*(11), 396-411.

Boole, G. (1952). *Studies in Logic and Probability.* (R. Rhees, Éd.) London: Watts & Co.

Boole, G. (1962). Analyse mathématique de la logique. Dans G. Boole, & S. Jevons, *Algèbre et logique.*

Boole, G. (1969). L'analyse mathématique de la logique. (J.-A. Miller, Éd.) *Cahiers pour l'Analyse*(10), 27-34.

Boole, G. (1992). *Le lois de la pensée.* (S. B. Diagne, Trad.) Paris: Vrin.

Boole, G. (1997). *Selected Manuscripts on Logic and its Philosophy.* (I. Grattan-Guinness, & G. Bornet, Éds.) Basel: Birkhäuser Verlag.

Bornet, G. (1997). Boole's Psychologism as a Reception Problem. Dans Boole, *1997* (pp. xlvii-lviii).

Bourbaki, N. (1984). *Elements d'histoire des mathématiques.* Paris: Masson.

Bourbaki, N. (1998). L'architecture des mathématiques. Dans F. Le Lionnais (Éd.), *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 35-47). Paris: Hermann.

Bréhier, É. (1962). *La théorie des incorporels dans l'ancien stoïcisme.* Paris: Vrin.

Brisart, R. (Éd.). (2002). *Husserl et Frege. Les ambiguïtés de l'antipsychologisme.* Paris: Vrin.

Brisart, R. (2002a). Le problème de l'abstraction en mathématiques: l'écart initial de Husserl par rapport à Frege entre 1891 et 1894. Dans R. Brisart (Éd.), *2002* (pp. 13-47).

Bynum, T. W. (1972). On the life and work of Gottlob Frege. Dans G. Frege, *Conceptual notation and related articles* (pp. 1-80). London: Oxford University Press.

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notation.* Mineola: Dover Publications.

Carnap, R. (1937/2001). *Logical Syntax of Language.* London: Routledge.

Carnap, R. (1948). *Meaning and Necessity*. Chicago: University of Chicago.

Carnap, R. (1958). *Introduction to Symbolic Logic and its Applications.* New York: Dover.

Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique.* Paris: De l'Imprimerie royale. Chez Debure frères, libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi.

Cavaillès, J. (1938/1994). Méthode axiomatique et formalisme. Dans J. Cavaillès, *Œuvres complètes de Philosophie des sciences* (pp. 1-202). Paris: Hermann.

Cortázar, J. (1970). *Rayuela.* Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Couturat, L. (1903). *Opuscules et Fragmens inédits de Leibniz.* (L. Couturat, Éd.) Paris: Félix Alcan.

Couturat, L. (1980). *L'Algèbre de la Logique.* Paris: Blanchard.

Dahan-Dalmedico, & Peiffer, J. (1986). *Une histoire des mathématiques.* Paris: Seuil.

De Morgan, A. (1830/46). *Elements of Arithmetic.* London: Walton and Maberly.

De Morgan, A. (1836). *The connexion of Number and Magnitude: An Attempt to Explain the Fifth Book of Euclid.* London: Taylor and Walton.

De Morgan, A. (1842). On the foundations of Algebra. Dans W. Ewald (Éd.), *1997* (Vol. I, pp. 336-348).

De Morgan, A. (1847a). *Formal Logic.* London: Taylor and Walton.

De Morgan, A. (1847b). *Arithmetical Books from the invention of printing to the present time.* London: Taylor and Walton.

de Rouilhan, P. (1988). *Frege. Les paradoxes de la représentation.* Paris: Minuit.

de Rouilhan, P. (1998). *Russell et le cercle des paradoxes.* Paris: P.U.F.

Dedekind, R. (2008). *La création des nombres.* (H. Sinaceur, Trad.) Paris: Vrin.

Deleuze, G. (1969). *Logique du sens.* Paris: Minuit.

Descartes, R. (1637/1964). La Géométrie. Dans R. Descartes, C. Adam, & P. Tannery (Éds.), *Oeuvres* (Vol. 6). Vrin-CNRS.

Dhombres, J., & Alvarez, C. (2011). *Une histoire de l'imaginaire mathématique.* Paris: Hermann.

Dhombres, J., & Alvarez, C. (2013). *Une histoire de l'invention mathématique.* Paris: Hermann.

Diagne, S. B. (1982). De l'algèbre numérique à l'algèbre de la logique.

Diagne, S. B. (1989). *Boole: 1815-1864. L'oiseau de nuit en plein jour.* Paris: Belin.

Dudman, V. (1971). Peano's Review of Frege's Grundgesetze. *The Southern Journal of Philosophy, 9*(1), 25-37.

Dugac, P. (1976). *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques.* Paris: Vrin.

Dummett, M. (1959). Review of Boole, Studies in Logic and Probability, and of 'Celebration of the Centenary of The Laws of Thought'. Dans J. Gasser (Éd.), *2000* (pp. 79-85).

Dummett, M. (1973). *Frege, Philosophy of Language.* New York; Evanston; San Francisco; London: Harper & Row.

Dummett, M. (1978). George Boole. Dans *Truth and Other Enigmas* (pp. 66-73). Cambridge (Mass): Harvard University Press.

Dummett, M. (1991). *Les origines de la philosophie analytique.* Paris: Gallimard.

Durand-Richard, M.-J. (2000). Logic versus Algebra: English debates and Boole's Mediation. Dans J. Gasser (Éd.), *2000* (pp. 139-166).

Durand-Richard, M.-J. (2011). Peacock's "History of Arithmetic", an attempt to reconcile empiricism to universality. *Indian Journal for History of Science*, 251-283.

Edwards, H. M. (1980). The Genesis of Ideal Theory. *Archive for History of Exact Science, 23*(4), 321-378.

Edwards, H. M. (1983). Dedekind's Invention of Ideals. *Bulletin of the London Mathematical Society*(15), 8-17.

English, J. (2002). Frege, dans sa recension de Philosophie de l'arithmétique, a-t-il vraiment compris le projet de Husserl ?. Dans R. Brisart (Éd.), *2002* (pp. 153-202).

Ewald, W. (Éd.). (1997). *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics (2 vols.).* Oxford: Clarendon Press.

Eymard, P., & Lafon, J. (1956). Le Journal mathématique de Gauss. Traduction française annotée. *Revue d'histoire des sciences, 9*(1), 21-51.

Ferraro, G., & Panza, M. (2012, Mars). Lagrange's theory of analytical functions and his ideal of purity of method. *Archive for History of Exact Sciences, 66*(2), 95-197.

Ferreirós, J. (2007). The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss. Dans C. Goldstein, & N. S. Schappacher (Éds.), *2007.*

Ferreirós, J., & Gray, J. (Éds.). (2006). *The Architecture of Modern Mathematics. Essays in History and Philosphy.* New York: Oxford University Press.

Føllesdal, D. (1994). *Husserl and Frege: A Contribution to Elucidating the Origins of Phenomenological Philosophy.* Dordrecht ; Boston ; London: Kluwer.

Frege, G. (1873). On a Geometrical Representation of Imaginary Forms in the Plane. Dans *1984* (pp. 1-55).

Frege, G. (1874). Methods of Calculation based on an Extension of the Concept of Quantity. Dans *1984* (pp. 56-92).

Frege, G. (1879). Application of the "Conceptual Notation". Dans Frege, *1972* (pp. 204-208).

Frege, G. (1879/1999). *Idéographie.* (C. Besson, Trad.) Paris: Vrin.

Frege, G. (1879-91). Logique. Dans Frege, *1994* (pp. 9-16).

Frege, G. (1880-81). La logique calculatoire de Boole et l'idéographie. Dans Frege, *1994* (pp. 17-59).

Frege, G. (1882a). Le langage formulaire logique de Boole et mon idéographie. Dans Frege, *1994* (pp. 61-66).

Frege, G. (1882b). Que la science justifie le recours à une idéographie. Dans Frege, *1971* (pp. 63-69).

Frege, G. (1882c). Sur le but de l'idéographie. Dans Frege, *1971* (pp. 70-79).

Frege, G. (1884). Dialogue avec Pünjer sur l'existence. Dans Frege, *1994* (pp. 67-84).

Frege, G. (1884/1969). *Les fondéments de l'arithmétique.* (C. Imbert, Trad.) Paris: Seuil.

Frege, G. (1891). Fonction et concept. Dans Frege, *1971* (pp. 80-101).

Frege, G. (1892). Concept et objet. Dans Frege, *1971* (pp. 127-141).

Frege, G. (1892/2009). Sur le sens et la référence. Dans B. Ambroise, & S. Laugier (Éds.), *Philosophie du langage I* (J. Benoist, Trad., pp. 49-84). Paris: Vrin.

Frege, G. (1892-95). Précision sur sens et signification. Dans Frege, *1994* (pp. 139-147).

Frege, G. (1893/1964). *The Basic Laws of Arithmetic.* (M. Furth, Trad.) London: University of California Press.

Frege, G. (1893-1903/1966). *Grundgesetze der Arithmetik.* Hildesheim: G. Olms.

Frege, G. (1894). Compte rendu de Philosophie der Arithmetik I de E. G. Husserl. Dans *1971* (pp. 142-159).

Frege, G. (1897). On Mr. Peano's Conceptual Notation and My Own. Dans Frege, *1984* (pp. 234-248).

Frege, G. (1904). Qu'est-ce qu'une fonction? Dans *1971* (pp. 160-169).

Frege, G. (1906a). Introduction à la logique. Dans *1994* (pp. 221-233).

Frege, G. (1906b). Sur Schoenflies: Les paradoxes logiques de la théorie des ensembles. Dans *1994* (pp. 209-217).

Frege, G. (1918-1923). Recherches Logiques. Dans Frege, *1971* (pp. 170-234).

Frege, G. (1924). Le nombre. Dans *1994* (pp. 313-314).

Frege, G. (1924-25a). Les sources de connaissance en mathématiques et en sciences mathématiques de la nature. Dans *1994* (pp. 315-323).

Frege, G. (1924-25b). Nouvelle tentative de fondation de l'arithmétique. Dans *1994* (pp. 329-333).

Frege, G. (1971). *Écrits logiques et philosophiques.* (C. Imbert, Trad.) Paris: Éditions du Seuil.

Frege, G. (1972). *Conceptual notation and related articles.* (T. W. Bynum, Éd., & T. W. Bynum, Trad.) London: Oxford University Press.

Frege, G. (1976). *Wissenschaftlicher Briefwechsel.* Hamburg: Felix Meiner.

Frege, G. (1980). *Philosophical and Mathematical Correspondance.* (G. e. Gabriel, Éd., & H. Kaal, Trad.) Oxford: Basil Blackwell.

Frege, G. (1984). *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy.* (B. McGuinness, Éd.) Oxford: Basil Blackwell.

Frege, G. (1994). *Écrits Posthumes.* (P. d. Rouilhan, & C. Tiercelin, Trads.) Nîmes: Éditions Jacqueline Chambon.

Frege, G., & Russell, B. (1994). *Correspondance.* (C. Webern, Éd., & C. Webern, Trad.) Paris: E.P.E.L.

Gabbay, D. M., & Woods, J. (Éds.). (2004). *Handbook of the History of Logic. Volume 3, The rise of modern logic.* Amsterdam; Boston; Heildelberg: Elsevier North Holland.

Gabriel, G. (2002). Frege, Lotze and the Continental Roots of Early Analytic Philosophy. Dans E. H. Reck (Éd.), *From Frege to Wittgenstein* (pp. 39-51). New York: Oxford University Press.

Gasser, J. (Éd.). (2000). *A Boole Anthology.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gastaldi, J. L. (2011). L'esthétique au sein des mots: Discours, Figure, ou le renouvellement du projet critique. Dans P. Maniglier (Éd.), *Le Moment philosophique des années 1960 en France* (pp. 537-556). Paris: P.U.F.

Gauss, C. F. (1799). Nouvelle démonstration du théorème assurant que toute fonction algébrique entière d'une variable est résoluble en facteurs réels du premier ou du second degré. Dans Dhombres et Alvarez, *2013* (pp. 110-140).

Gauss, C. F. (1801/1989). *Recherches Arithmétiques.* (A. C. Poullet-Delisle, Trad.) Sceaux: J. Gabay.

Gauss, C. F. (1816). Une autre nouvelle preuve du théorème selon lequel toute fonction rationnelle algébrique entière d'une variable peut être résolue en facteurs réels du premier et du second degré. Dans Dhombres et Alvarez, *2013* (pp. 227-250).

Gauss, C. F. (1832). Theoria Residuorum biquadraticum. Commentatio Secunda. Dans *1863* (pp. 93-148).

Gauss, C. F. (1863). *Werke* (Vol. II). Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften.

Gauss, C. F. (1917). *Werke* (Vol. X1). Leipzig: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften.

Girard, J.-Y. (1987). Le champ du signe ou la faillite du réductionnisme. Dans E. Nagel, J. R. Newman, K. Gödel, & J.-Y. Girard, *Le théorème de Gödel* (pp. 145-171). Paris: Éditions du Seuil.

Girard, J.-Y. (1988). *Philosophie de la logique linéaire: logique et informatique, point de vue d'un logicien; la logique comme science de l'interaction.* Unesco. Récupéré sur http://unesdoc.unesco.org/images/0008/000832/083213fb.pdf

Girard, J.-Y. (2006). *Le Point Aveugle* (Vol. I). Paris: Hermann.

Girard, J.-Y. (2007). *Le Point Aveugle* (Vol. II). Paris: Hermamann.

Godart-Wendling, B. (2000). The Conceptualisation of Time in Boole's Algebraic Logic. Dans J. Gasser (Éd.), *2000* (pp. 241-255).

Gödel, K. (1931/1986). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I. Dans *Collected Works I* (pp. 144-195). New York: Oxford University Press.

Goldstein, C., & Schappacher, N. (2007a). A Book in Search of a Discipline (1801–1860). Dans C. Goldstein, & N. S. Schappacher (Éds.), *2007* (pp. 3-65).

Goldstein, C., & Schappacher, N. (2007b). Several Disciplines and a Book (1860-1901). Dans C. Goldstein, N. Schappacher (Éds.), *2007* (pp. 67-103).

Goldstein, C., Schappacher, N., & Schwermer, J. (Éds.). (2007). *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithméticae.* Berlin; Heildelberg; New York.

Grattan-Guinness, I. (1991). The Correspondence between George Boole and Stanley Jevons, 1863-1864. *History and Philosophy of Logic*(12), 15-35.

Grattan-Guinness, I. (2000). *The Search for Mathématical Roots. 1870-1940.* Princeton: Princeton University Press.

Gregory, D. (1838/1865). On the Real Nature of Symbolical Algebra. Dans *The Mathematical Writings* (pp. 1-13). Cambridge: Deighton, Bell and Co.

Gregory, D. (1841/1846). *Examples of the Processes of the Differential and Integral Calculus* (éd. 2e). Cambridge: J. and J. J. Deighton.

Gregory, D. (1843/1865). On a Difficulty in the Theory of Algebra. Dans *The Mathematical Writings* (pp. 235-242). Cambridge: Deighton, Bell and Co.

Griffin, N. (Éd.). (2003). *The Cambridge Companion to Bertrand Russell.* Cambridge; New York: Cambridge University Press.

Haaparanta, L. (Éd.). (2009). *The developement of modern logic.* New York: Oxford University Press.

Hailperin, T. (1981, Sep). Boole's Algebra Isn't Boolean Algebra. *Mathematics Magazine, 54*(4), 172-184.

Hailperin, T. (1986). *Boole's Logic and Probability* (éd. 2e). Amsterdam: Elsevier Science Publishers.

Hailperin, T. (2000). Algebraical Logic: Leibniz and Boole. Dans J. Gasser, *A Boole Anthology* (pp. 129-138). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hailperin, T. (2004). Algebraical Logic 1685-1900. Dans D. M. Gabbay, & J. Woods (Éds.), *2004* (pp. 323-388).

Hamilton, W. (1870). *Lectures on Metaphysics and Logic* (Vol. II). Edinburgh and London: W. Blackwood.

Hegel, G. W. (1986). *Encyclopédie des Sciences Philosophiques, I - La Science de la Logique.* (B. Bourgeois, Trad.) Paris: Vrin.

Herreman, A. (2000). *La topologie et ses signes. Éléments pour une histoire sémiotique des mathématiques.* Paris: L'Harmattan.

Hilbert, D. (1900). Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*(8), 180-184.

Hintikka, J. (1995). What is Elementary Logic? Independence-Friendly Logic as the True Core Area of Logic. Dans K. Gavroglu, J. J. Stachel, & M. W. Wartofsky (Éds.), *Physics, Philosophy and the Scientific Community* (pp. 301-326). Dordrecht: Kluwer.

Hintikka, J. (1996). *The Principles of Mathematics Revisited.* Cambridge: Cambridge University Press.

Hintikka, J. (1997a). Defining truth, the whole truth, and nothing but the truth. Dans Hintikka, *1997* (pp. 46-103).

Hintikka, J. (1997b). *Lingua Universalis Vs. Calculus Rationcinator.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hintikka, J., & Sandu, G. (1994). What is a quantifier? *Synthèse*(98), 113-129.

Hjelmslev, L. (1966). *Le Langage.* Paris: Minuit.

Hjelmslev, L. (1971). *Prolégomènes à une théorie du langage.* Paris: Minuit.

Hjelmslev, L. (1975). *Résume of a theory of language.* (F. J. Whitfield, Trad.) Copenhage: Naturmetodens sprog-institut.

Husserl, E. (1891a). Récension du livre de Schröder : Leçons sur l'algèbre de la logique. Dans Husserl, *1975* (pp. 9-61).

Husserl, E. (1891b). Le calcul de la conséquence et la logique du contenu. Dans Husserl, *1975* (pp. 62-91).

Husserl, E. (1891c). Le calcul de la conséquence et la logique du contenu (Supplément à l'article du même nom). Dans Husserl, *1975* (pp. 92-100).

Husserl, E. (1893a). La « Logique élémentaire » de A. Voigt et mes exposés sur la logique du calcul logique. Dans Husserl, *1975* (pp. 101-112).

Husserl, E. (1893b). Réponse à la précédente « réplique » de M. Voigt. Dans Husserl, *1975* (pp. 118-122).

Husserl, E. (1901/1991). *Recherches Logiques* (Vol. II). (A. L. H. Elie, Trad.) Paris: PUF.

Husserl, E. (1975). *Articles sur la logique.* (J. English, Trad.) Paris: P.U.F.

Husserl, E., & Frege, G. (1987). *Correspondance.* Mauvezin: Trans-Europe-Repress.

Hutchings, E. (2005). Material anchors for conceptual blends. *Journal of Pragmatics, 37,* 1555–1577.

Hylton, P. (2003). The Theory of Descriptions. Dans N. Griffin (Éd.), *2003* (pp. 202-240).

Hylton, P. (2010). Frege and Russell. Dans P. Michael, & T. Rickkets (Éds.), *2010* (pp. 509-549).

Jevons, S. (1864/1890). *Pure Logic and Other Minor Works.* London: McMillan and Co.

Jevons, S. (1870). On a General system of numerically definite reasoning. Dans *1864/1890* (pp. 173-196).

Jevons, S. (1886). *Letters and journal.* (H. Jevons, Éd.) Londres: Macmillan.

Joinet, J.-B. (Éd.). (2007). *Logique, dynamique et cognition.* Paris: Publications de la Sorbonne.

Joinet, J.-B., & Tronçon, S. (Éds.). (2009). *Ouvrir la logique au monde. Philosophie et mathématique de l'interaction.* Paris: Hermann.

Jourdain, P. (1915). Introduction. Dans G. Cantor, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers* (pp. 1-82). New York: Dover Publications.

Kant, E. (2006). *Critique de la raison pure* (éd. 3). (A. Renaut, Trad.) Paris: Flammarion.

Klement, K. (2002). *Frege and the Logic of Sense and Reference.* New York: Psychology Press.

Klement, K. (2003). Russell's 1903-1905 Anticipation of the Lambda Calculus. *HIstory and Philosophy of Logic*(24), 15-37.

Klement, K. (2010, Juin). The senses of function in the logic of sens and denotation. *The Bulletin of Symbolic Logic, 16*(2), 153-188.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times.* New York: Oxford University Press.

Koppelman, E. (1971, XII 31). The Calculus of Operations and the Rise of Abstract Algebra. (Springer, Éd.) *Archive for History of Exact Sciences, 8*(3), pp. 155-242.

Kremer, M. (2010). Sense and reference: the origins and developpement of the distinction. Dans Potter, *The Cambridge Companion to Frege* (pp. 220-292). Cambridge: Cambridge University Press.

Kusch, M. (1989). *Language as Calculus Vs. Language as Universal Medium.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lagrange, J.-L. (1877). Discours sur l'objet de la Théorie des Fonctions Analytiques. Dans *Oeuvres* (Vol. VII, pp. 325-328). Paris: Gauthier-Villars.

Lagrange, J.-L. (1881). Théorie des Fonctions Analytiques. Dans *Oeuvres* (Vol. IX). Paris: Gauthier-Villars.

Laita, L. M. (2000). The Influence of Boole's Search for a Universal Method in Ananlysis on the Creation of His Logic. Dans J. Gasser, *A Boole Anthology* (pp. 45-60). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lalande, A. (1926). *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*. Paris: P.U.F.

Lasswitz, K. (1879). Review of the Conceptual Notation. Dans Frege, & T. W. Bynum (Éd.), *1972* (pp. 210-212).

Leibniz, G. W. (1666/1858). Dissertatio de Arte Combinatoria. Dans *Gesammelte Werke* (Vol. 3-V, pp. 7-79). Halle: H. W. Schmidt.

Leibniz, G. W. (1989). *Philosophical Papers and Letters.* (L. E. Loemker, Éd.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lejeune, G. (Éd.). (2013). *La question de la logique dans l'Idéalisme allemand.* Hildesheim ; Zürich ; New York: Georg Olms Verlag.

Longo, G. (2010). Incompletezza. Dans C. Bartocci, & P. Odifreddi (Éds.), *La Matematica* (pp. 219-262). Torino: G. Einaudi.

Lorgna, M. (1788). Théorie d'une nouvelle espèce de calcul fini et infinitésimal. *Mémoires de l'Académie royale des sciences, 8,* 409-448.

Lotze, H. (1874/1989). *Logik. 1. , Vom Denken (Reine Logik).* Hamburg: Felix Meiner.

Lukasiewicz, J., & Russell, B. e. (1954/56). Letters from Jan Lukasiewicz, Betrand Russell, Garrett Birkhoff and I. M. Bochenski. *Proceedings o f th e Royal Irish Academy. Section A: Ma th ematical and Physical, 57*, 63-65.

Lyotard, J.-F. (1971). *Discours, Figure.* Paris: Klincksieck.

Macfarlane, A. (1879). *Principle of the Algebra of Logic.* Edimburgh: David Douglas.

MacFarlane, J. G. (2000). What does it mean to say that logic is formal? Pittsburgh: PhD dissertation, University of Pittsburgh.

Mancosu, P. (Éd.). (2008). *The Philosophy of Mathematical Practice.* New York: Oxford University Press.

Manetti, G. (Éd.). (1996). *Knowledge Trough Signs. Ancient Semiotic Theories and Practices.* Turnhout: Brepols.

Maniglier, P. (2006). *La vie énigmatique des signes. Saussure et la naissance du structuralisme.* Paris: Léo Scheer.

Maniglier, P. (2011). Le Tournant anthropologique d'Alain Badiou. Dans F. Tarby, & I. Vodoz (Éds.), *Autour d'Alain Badiou.*

Maniglier, P. (2013). Manifesto para um comparatismo superior em filosofia. *Veritas, 58*(2).

Michaëlis, C. T. (1880/1972). Review of Frege's Conceptual Notation. Dans G. Frege, & T. W. Bynum (Éd.), *Conceptual notation and related articles* (T. W. Bynum, Trad.). London: Oxford University Press.

Mohanty, J. (1984). Husserl and Frege: A New Look at Their Relationship. Dans H. Hall, & H. L. Dreyfus (Éds.), *Husserl, Intentionality, and Cognitive Science* (pp. 43-56). Cambridge (Ms.); London: The M.I.T. Press.

Mugnai, M. (1998). Boole e lo psicologismo: la caratterizzazione delle leggi. Dans E. Agazzi, & N. Vassallo (Éds.), *1998* (pp. 111-130).

Netz, R. (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Nidditch, P. (1963, Janvier). Peano and the Recognition of Frege. *Mind, New Series, 72*(285), 103-110.

Nový, L. (1973). *Origins of modern algebra.* Leyden: Noordhoff international Publ. Prague.

Panteki, M. (1991). Relationships between algebra, differential equations and logic in England 1800-1860. (Thèse de Doctorat, Middlesex University, Angleterre). Récupéré sur https://eprints.mdx.ac.uk/6482/

Panteki, M. (2000). The Mathematical Background of George Boole's 'Mathematical Analysis of Logic' (1847). Dans J. Gasser (Éd.), *2000* (pp. 167-212).

Panza, M. (2011, Septembre 1). From Lagrange to Frege: Functions and Expressions. *1*. [s.n.]. Récupéré sur http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00618399

Peacock, G. (1826/1849). Arithmetic. Dans E. Smedley, & H. J. Rose, *Encyclopaedia Metropolitana* (pp. 369-523). London: John Josph Griffin and Company.

Peacock, G. (1830). *Treatise on Algebra.* Cambridge: J. & J.J. Deighton.

Peacock, G. (1833). *Report on the Recent Progress and Present State of certain Branches of Analysis.* London: John Murray.

Peacock, G. (1842). *A treatise on Algebra* (Vol. I: Arithmetical Algebra). Cambridge: J. & J.J. Deighton.

Peano, G. (1888). The geometrical calculus according tothe Ausdehnungslehre of H. Grassmann, preceded by the operations ofdeductive logic. Dans *1973* (pp. 75-100).

Peano, G. (1889). The principles of arithmetic, presented by a new method. Dans *1973* (pp. 100-134).

Peano, G. (1895). *Formulaire de mathématiques.* Turin: Bocca Frères Ch. Clausen.

Peano, G. (1897). Studies in mathematical logic. Dans *1973* (pp. 190-205).

Peano, G. (1915). The importance of symbols in mathematics. Dans *1973* (pp. 227-234).

Peano, G. (1973). *Selected Works.* (H. C. Kennedy, Éd.) London: George Allen & Unwin.

Peckhaus, V. (1999, Décembre). 19th Century Logic between Philosophy and Mathematics. *The Bulletin of Symbolic Logic*, pp. 433-450.

Peckhaus, V. (2000). Was George Boole really the 'father' of modern logic? Dans J. Gasser, *A Boole Anthology* (pp. 271-285). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Peckhaus, V. (2004a). Calculus ratiocinator versus characteristica universalis? The two traditions in logic, revisited. *History and Philosophy of Logic*, *25*(1), 3-14.

Peckhaus, V. (2004b). Schröder's Logic. Dans D. M. Gabbay, & J. Woods (Éds.), *2004* (pp. 557-609).

Peckhaus, V. (2009a, Août). Language and logic in german post-hegelian philosophy. *The Baltic International Yearbook of Cognition, Logic and Communication, 4*, pp. 1-17.

Peckhaus, V. (2009b). The mathematical origins of nineteenth-century algebra of logic. Dans L. Haaparanta (Éd.), *The developpement of modern logic.* New York: Oxford University Press.

Peckhaus, V. (2012a). Algebra of Logic, Quantification Theory, and the Square of Opposition. Dans J.-Y. Béziau, Payette, & Gillman, *The Square of Opposition: A General Framework for Cognition* (pp. 25-42). Bern; Berlin; Bruxelles; Frankfurt am Main; New York; Oxford; Wien: Peter Lang.

Peckhaus, V. (2012b). The Reception of Leibniz's Logic in 19th Century German Philosophy. Dans R. Krömer, & Y. Chin-Drian (Éds.), *New Essays in Leibniz Reception: In Science and Philosophy of Science 1800-2000* (pp. 13-24). Basel: Springer.

Peckhaus, V. (2013). Logik und Metaphysik bei Adolf Trendelenburg. Dans Lejeune (Éd.), *2013* (pp. 283-296).

Peirce, C. S. (1867/1933). On an Improvement in Boole's Calculus of Logic. Dans *The Collected Papers III - Exact Logic.* Cambridge: Harvard University Press.

Peirce, C. S. (1890/2010). Logical Studies of the Theory of Numbers. Dans C. S. Peirce, *Writings of Charles S. Peirce* (Vol. 8, pp. 55-56). Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press.

Petitot, J. (1985). *Morphogenèse du sens.* Paris: P.U.F.

Petri, B., & Schappacher, N. (2007). On Arithmetization. Dans Goldstein et alii (Éds.), *2007* (pp. 343-374).

Potter, M. (2010). Introduction. Dans M. Potter, & T. Rickkets (Éds.), *2010.*

Potter, M., & Rickkets, T. (Éds.). (2010). *The Cambridge companion to Frege.* New York: Cmbridge University Press.

Pulkkinen, J. (2005). *Thought and Logic. The Debates between German-Speaking Philosophers and Symbolic Logicians at the Turn of the 20th Century.* Frankfurt: Peter Lang.

Rabouin, D. (2011). Structuralisme et comparatisme en sciences humaines et en mathématiques: un malentendu? Dans P. Maniglier (Éd.), *Le moment philosophique des années 1960 en France* (pp. 37-57). Paris.

Rabouin, D. (2014). Proclus' conception of geometric space and its actuality. Dans V. De Risi (Éd.), *Space, Geometry and the Imagination.* Springer.

Redding, P. (2007). *Analytic Philosophy and the Return of Hegelian Thought.* Cambridge: Cambridge University Press.

Rickkets, T. (2010). Concepts, objects and the Context Principle. Dans P. Michael, & T. Rickkets (Éds.), *2010* (pp. 149-219).

Rosado Haddock, G. E. (2006). *A critical introduction to the philosophy of Gottlob Frege.* Hampshire: Ashgate.

Rotman, B. (2000). *Mathematics as Sign. Writing, Imagining, counting.* Stanford: Stanford University Press.

Russell, B. (1903/2010). *Principles of Mathematics.* Abingdon: Routledge.

Russell, B. (1905, Octobre). On denoting. *Mind, 14*(56), 479-493.

Russell, B. (1918). Mathematics and the metaphysicians. Dans *Mysticism and Logic and other essays* (pp. 74-96). London: Longmans, Green and Co.

Russell, B. (1940/1956). *An Inquiry Into Meaning and Thruth.* London: George Allen and Unwin Ltd.

Russell, B. (1954). Letter from Bertrand Russell. Dans J. Lukasiewicz, & B. e. Russell, *1954/56* (p. 64).

Russell, B., & Whitehead, A. N. (1910). *Principia Mathematica* (Vol. I). Cambridge: Cambridge University Press.

Salanskis, J.-M. (1991). *L'herméneutique formelle.* Paris: Éditions du CNRS.

Salanskis, J.-M. (2001). *Sens et philosophie du sens.* Paris: Desclée de Brouwer.

Sánchez Valencia, V. (2004). The Algebra of Logic. Dans D. M. Gabbay, & J. Woods (Éds.), *2004* (pp. 389-556).

Schröder, E. (1877). *Der Operationskreis des Logikkalkuls.* Leipzig: G. Teubner.

Schröder, E. (1880a). Recensionen. G. Frege, Begriffsschrift. *Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik, 25,* 81-94.

Schröder, E. (1880b). Review of Frege's Conceptual Notation. Dans Frege, & Bynum (Éd.), *1972* (pp. 218-232).

Schröder, E. (1890/1966). *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (Vol. I). New York: Chelsea.

Schröder, E. (1898, Octobre). On Pasigraphy. Its Present State and the Pasigraphie Movement in Italy. *The Monist*, *IX*(1), pp. 44-62.

Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique.* Paris: Pétra.

Sher, G. (2012). Logical Quantifiers. Dans D. Graff Fara, & G. Russell (Éds.), *Routledge Companion to Philosophy of Language* (pp. 579-595). New York: Routledge.

Shin, S.-J. (1994). *The logical status of diagrams.* Cambridge, New York: Cambridge University Press.

Sluga, H. D. (1980). *Gottlob Frege, The arguments of the philosophers.* London: Routledge.

Sluga, H. D. (1987, Janvier). Frege Against the Booleans. *Notre Dame Journal of Formal Logic, 28*(1), 80-98.

Stein, G. (1947). *Four in America.* New Haven: Yale University Press.

Stevens, G. (2006, Juillet). Russell's Repsychologising of the proposition. *Synthèse, 151*(1), 99-124.

Sullivan, P. (2004). Frege's Logic. Dans D. M. Gabbay, & J. Woods, *Handbook of the History of Logic. Volume 3, The rise of modern logic.* (pp. 671-762). Amsterdam; Boston; Heildelberg: Elsevier North Holland.

Sullivan, P. (2010). Dummett's Frege. Dans M. Potter, & T. Rickkets (Éds.), *2010* (pp. 86-117).

Tannery, P. (1879). Review of Frege's Conceptual Notation. Dans Frege, *1972* (pp. 232-234).

Tappenden, J. (2006). The Riemannian Background to Frege's Philosophy. Dans J. e. Ferreiros, *The architecture of modern mathematics* (pp. 97-132). Oxford: Oxford University Press.

Trendelenburg, A. F. (1867). *Historische Beiträge zur Philosophie* (Vol. III). Berlin: Verlag von G. Bethge.

Trinchero, M. (1998). Frege, Boole, lo psicologismo o: la caccia dell'oca selvatica. Dans E. Agazzi, & N. Vassallo (Éds.), *1998* (pp. 151-253).

Urquhart, A. (2003). The Theory of Types. Dans N. Griffin (Éd.), *2003* (pp. 286-309).

van Heijenoort, J. (1997). Logic as Calculus and Logic as Language. Dans J. Hintikka, *Lingua Universalis Vs. Calculus Ratiocinator* (pp. 233-239). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vassallo, N. (1998). Mente e conoscenza: una lettura della filosofìa booleana. Dans E. Agazzi, & N. Vassallo (Éds.), *1998* (pp. 131-149).

Venn, J. (1880/1972). Review of Frege's Conceptual Notation. In G. Frege, & T. W. Bynum (Ed.), *Conceptual notation and related articles* (T. W. Bynum, Trans.). London: Oxford University Press.

Venn, J. (1881). *Symbolic Logic.* London: Macmillan and Co.

Verbeke, G. (2006). La philosophie du signe chez les stoïciens. Dans J. Brunschwig (Éd.), *Les stoïciens et leur logique* (pp. 261-282). Paris: Vrin.

Vilkko, R. (1998). The Reception of Frege's Begriffsschrift. *Historia Mathematica*(25), pp. 412-422.

Vilkko, R. (2009). The Logic Question During the First Half of the Nineteenth Century. Dans L. Haaparanta, *The Development of Modern Logic* (pp. 203-221). Oxford: Oxford University Press.

Voigt, A. H. (1983). Sur la logique du contenu. Dans Husserl, *1975* (pp. 113-117).

Wahl, R. (1993, Janvier). Russell's Theory of Meaning and Denotation and "On Denoting". *Journal of the History of Philosophy, 31*(1), 71-94.

Whitehead, A. N., & Russell, B. (1927). *Principia Mathematica* (Vol. II). Cambridge: Cambridge University Press.

Wilson, M. (1992, Juin). Frege: The Royal Road from Geometry. *Noûs, 26*, 149-180.

Wilson, M. (2010). Frege's Mathematical Setting. Dans M. Potter, & T. Rickkets (Éds.), *2010* (pp. 379-412).

Wittgenstein, L. (1921/1993). *Tractatus logico-philosophicus.* (G. G. Granger, Trad.) Paris: Gallimard.

Woodhouse, R. (1801). On the necessary Truth of certain Conclusions obtained by Means of imaginary Quantities. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 89-119.

Woodhouse, R. (1802). On the Independence of the Analytical and geometrical Methods of Investigation; and on the Advantages to be derived from their Separation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 85-125.

Woodhouse, R. (1803). *The Principles of Analytical Calculation.* Cambridge: University Press.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences, 16*(1), 37-85.

Index Nominum

F

G

H

J

K

L

M

Y

Z

Table des matières